MATLAB中文论坛鼎力支持

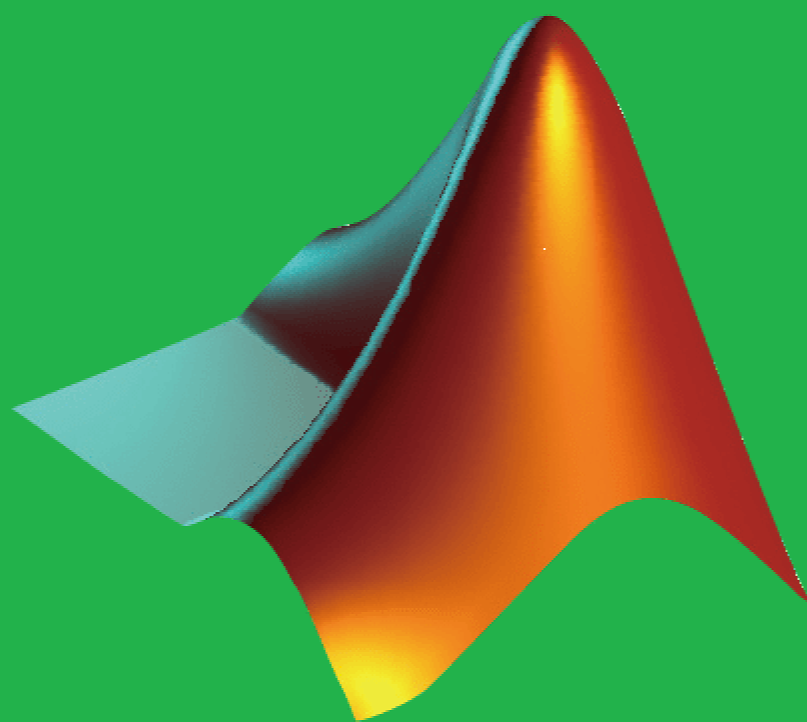
提供“在线交流，有问有答”网络互动答疑服务

- **全面、系统地介绍了利用MATLAB等工具进行数学建模的知识**
- **详解54个工程应用案例、65个算法案例和31种算法应用**
- **详解21种常用数据处理算法和10种高级数据分析处理算法**
- 结合历年全国**大学生数学建模竞赛试题，**将建模案例与算法程序结合起来讲解
- 在案例的分析和计算中巧妙地结合了MATLAB、LINGO和SPSS等不同工具，**并采用不同的算法进行模型求解，**达到异曲同工之妙
- 循序渐进，逐步引导读者**深入挖掘实际问题背后的数学问题及求解方法**

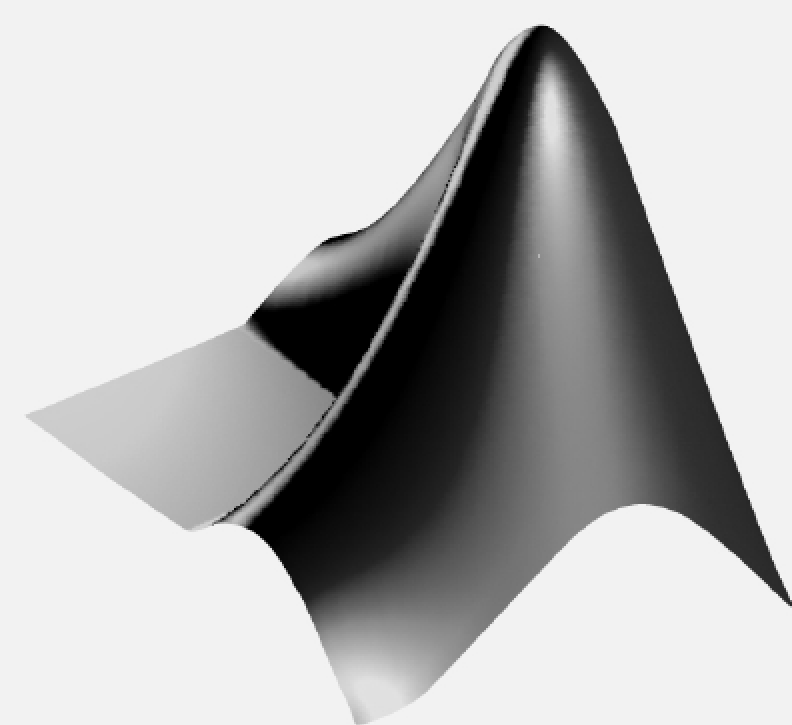
MATLAB

数学建模经典案例实战

余胜威　编著



清华大学出版社



MATLAB 数学建模经典案例实战

余胜威　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书全面、系统地讲解了数学建模的知识。书中结合历年全国大学生数学建模竞赛试题，采用案例与算法程序相结合的方法，循序渐进，逐步引导读者深入挖掘实际问题背后的数学问题及求解方法。在本书案例的分析计算中巧妙地结合了 MATLAB 等工具，并采用不同的算法进行模型求解，达到异曲同工之妙。本书结合实际，对网上讨论的很多疑难问题也做了解答。

本书共 25 章，分 3 篇。主要内容有：MATLAB 基础知识、LINGO 基础知识、SPSS 基础知识、数学建模基础理论及算法设计、基于 LINGO 的基础理论及算法设计、企业销售额问题、日报销售问题、钢管加工用料问题、航空运输能力问题、人员安排问题、食堂用餐满意度问题、城市居民食品分类及零售价格预测、景区灭火问题、煤矿最优通风量问题、住房的合理定价、发电机安排计划、大气污染问题、交巡警服务平台的设置与调度问题、风电功率预测问题、大学毕业生就业问题、蛛网结构合理性研究、太阳能小屋的设计、高校硕士研究生指标分配问题、碳排放约束下的江苏省煤炭消费量预测、变循环发动机部件法建模及优化。

本书适合所有想全面学习数学建模并提高数学应用能力的人员阅读，也适合各种使用数学分析软件（MATLAB、LINGO 和 SPSS）进行开发的工程技术人员使用。对于各大高校师生解决工程问题，进行课堂教学等也是一本不可或缺的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

MATLAB 数学建模经典案例实战 / 余胜威编著. —北京：清华大学出版社，2014（2017.12 重印）
ISBN 978-7-302-37852-5

Ⅰ. ①M… Ⅱ. ①余… Ⅲ. ①Matlab 软件-应用-数学模型 Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 199324 号

责任编辑： 夏兆彦
封面设计： 欧振旭
责任校对： 胡伟民
责任印制： 沈　露

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 三河市君旺印务有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×260mm　　**印　　张：** 37.75　　**字　　数：** 950 千字
版　　次： 2015 年 1 月第 1 版　　**印　　次：** 2017 年 12 月第 5 次印刷
印　　数： 8001～9000
定　　价： 89.00 元

产品编号：061187-01

前　　言

当需要从定量的角度分析和研究一个实际问题时，人们就需要在深入调查研究，了解对象信息，做出简化假设，并分析内在规律等工作的基础上，用数学的符号和语言进行表述，也就是建立数学模型，然后用通过计算得到的结果来解释实际问题，并接受实际的检验。这个建立数学模型的全过程就称为数学建模。

数学建模是广大科研人员，特别是学生学习的起点，通过数学建模的锻炼和学习，数学建模爱好者能够掌握很多算法、求解数学建模问题的思想及对科研问题的喜好。本书采用全国大学生数学建模竞赛认可的软件 MATLAB、LINGO 和 SPSS 进行数学模型的求解，以达到软件之间互补取优，快速高效求解问题的目的。

1. MATLAB简介

MATLAB 作为一款科学计算软件逐渐被广大科研人员所接受，其强大的数据计算功能、图像可视化界面及代码的可移植性受到广大高校师生的认可。MATLAB 也是一款功能强大的仿真软件，现在 Mathworks 公司正在不断地开发各种开发板的集成接口及仿真器，做到真正理论与实际相结合的目的。因此，作为一名数据分析和计算方面的工作者和学习者，MATLAB 是较好的选择。

2. LINGO简介

LINGO（Linear Interactive and General Optimizer）是一款交互式的线性和通用优化求解器。它是一套设计用来帮助你快速、方便、有效地构建和求解线性、非线性及整数最优化模型的功能全面的工具。它包括功能强大的建模语言、建立和编辑问题的全功能环境、读取和写入 Excel 和数据库的功能，以及一系列完全内置的求解程序。

3. SPSS简介

SPSS 是世界上最早的统计分析软件，由美国斯坦福大学的三位研究生 Norman H. Nie、C. Hadlai Hull 和 Dale H. Bent 于 1968 年研究开发成功，同时成立了 SPSS 公司，并于 1975 年成立法人组织，在芝加哥组建了 SPSS 总部。1984 年，SPSS 总部推出了世界上第一款统计分析软件微机版本 SPSS/PC+，开创了 SPSS 微机系列产品的开发方向，极大地扩充了它的应用范围，并使其能很快地应用于自然科学、技术科学和社会科学的各个领域。世界上许多有影响的报刊杂志纷纷就 SPSS 的自动统计绘图、数据的深入分析、使用方便和功能齐全等方面给予了高度的评价。

本书列举了常用的数学建模算法，并通过 MATLAB 等常用的数学建模软件（还涉及 LINGO 和 SPSS 软件）的有机结合，完成一个复杂问题的求解，让广大数学建模爱好者学有所获。本书内容充实，清晰易读，通过各种算法的仿真求解，能够实现举一反三的效果，

使得读者能够真正地掌握和运用本书所讲知识。本书中的所有案例均采用理论分析和程序代码实现相结合的形式进行设计，针对具体工程背景，编写相应的数学模型进行分析，通过程序实现，让读者能够结合理论推导过程，从而学习和掌握数学建模算法设计。

本书特色

1. 提供“在线交流，有问必答”网络互动答疑服务

国内最大的 MATLAB&Simulink 技术交流平台——MATLAB 中文论坛（www.iLove Matlab.cn）联合本书作者和编辑，一起为你提供与本书相关的问题解答和 MATLAB 技术支持服务，让你获得最佳的阅读体验。具体参与方式请详细阅读本书封底的说明。

2. 内容丰富，覆盖面广

本书首先介绍了数学建模的基础知识，并对数学建模的常用工具软件 MATLAB、LINGO 和 SPSS 做了介绍。然后通过大量案例讲解如何利用这些工具软件进行建模。另外，本书对网上讨论的大多数疑难问题也有涉猎。通过阅读本书，读者可以了解工程项目设计需要注意的细节，还可以全面、系统地掌握常见数学建模算法在工程领域的应用。

3. 案例丰富，注重实战

本书深入、系统地讲解了 19 个数学建模案例的分析和实现过程，实用性非常强。这些案例很多来源于历年全国大学生数学建模竞赛试题，涵盖面广，涉及多种问题，有很强的针对性。本书针对每一个数学建模问题，从完整的数学建模写作出发，并加以代码和图形相结合的形式，让读者能够直观地阅读各个应用案例程序以及领悟编程思想，对数学建模有一定深入的理解。

4. 实用性强，适用广泛

本书以案例教学的模式展开，通过分析大量的数学建模经典案例的编程算法，让读者可以比较容易地理解算法的思想及数模问题的求解思路，有较强的实用性。本书案例涉及面广，几乎适合所有对数学建模感兴趣的人员，有非常广泛的读者基础。

本书内容及体系结构

第1篇　数学建模基础及常用工具（第1～5章）

本篇介绍数学建模基础知识及 MATLAB、LINGO 和 PSS 软件的基本应用。第 1 章介绍了 MATLAB 的基础知识；第 2 章介绍了 LINGO 的基础知识；第 3 章介绍了 SPSS 的基础知识；第 4 章介绍了数学建模的基础理论及算法设计，包括分段函数处理、线性规划、非线性规划、层次分析法、BP 神经网络、最小树问题、最短路问题及粒子群算法等；第 5 章介绍了 LINGO 软件的基础理论及算法，包括目标规划、混合整数规划、非线性规划和大规模数学规划等。通过本篇内容的学习，可以为后续的数学建模学习打下坚实的基础。

第2篇　数学建模基础案例分析（第6～17章）

本篇涉及面较广，主要内容包括：采用 SPSS 进行多元回归等方法、采用 LINGO 软件进行优化问题求解、基于 0-1 变量的人员安排问题、采用层次分析法对食堂用餐满意度评价问题、采用马尔科夫链模型的物价预测问题、采用图像处理方法及最短路径求解方法实现景区三维重建及最佳灭火路径求解、掌握分段函数的处理方法及混合整数规划问题、涉及动态加权和 BP 神经网络算法的大气污染情况求解等。本篇为第 3 篇做铺垫，由易到难，层层推进，可以让读者循序渐进地学习与提高。

第3篇　数学建模分析与提高（第18～25章）

本篇主要涉及数学建模的数据处理及问题自身复杂性的分析，主要以 MATLAB 和 LINGO 相结合讲解。涵盖的案例有：进行图论问题求解的交巡警服务平台的设置与调度问题；涉及马尔科夫链模型、三次指数平滑及 BP 神经网络的风电功率预测问题；采用 SPSS 进行问题建模与求解的大学毕业生就业问题和高校硕士研究生指标分配问题；采用三维建模方法，得到相应的评价指标，然后采用模糊综合评价对蛛网结构的评价问题；采用计算机的模拟优化设计太阳能小屋电池板的铺设问题；采用 LINGO 求解带约束的多元回归最优值的碳排放约束下的江苏省煤炭消费量预测问题；采用粒子群算法实现发动机部件性能参数求解等。通过本篇内容的学习，可以真正提高读者的数学建模实战能力。

本书读者对象

- 全国大学生数学建模参赛人员；
- 想全面学习数学建模的人员；
- 想提高数学应用能力的人员；
- 数学建模爱好者；
- 使用数学分析软件的工程技术人员；
- 相关科学技术研究人员；
- 相关培训学校的学员。

本书配套资源获取方式

本书涉及的配套资源主要包括以下几类：

- 书中的实例源程序；
- 书中的案例需要用到的源数据；
- 本书教学 PPT。

这些配套资源需要读者自行下载。请按照封底的说明到 MATLAB 中文论坛上的相关页面下载，也可以到清华大学出版社的网站上（www.tup.com.cn）搜索到本书页面后按照提示下载。

本书作者

本书由余胜威主笔编写。作者结合在西南交通大学学习期间掌握的各类算法及出于对 MATLAB 的爱好，通过参阅大量资料，精心准确，编写了本书。感谢马翠翠在此期间给予的帮助。其他参与编写的人员有李小妹、周晨、陈超、陈锴、陈佩霞、黎华、李鹏钦、李森、李奕辉、李玉莉、刘仲义、卢香清、鲁木应、马向东、麦廷琮、米永刚、欧阳昉、綦彦臣、冉卫华、宋永强、滕科平、王秀丽、王玉芹、魏莹、魏宗寿、温本利。

阅读本书的过程中若有疑问，可以在 MATLAB 中文论坛的本书交流版块提问，也可以发邮件到 bookservice2008@163.com，我们会及时答复。

编者

目　　录

第 1 篇　数字建模基础

第 2 篇　数学建模基础案例分析

第 3 篇 数学建模分析与提高

第 1 篇　数字建模基础

第 1 章　MATLAB 基础知识

MATLAB 的基本数据单位是矩阵(Matrix)。MATLAB 解算问题要比用 C 和 FORTRAN 等语言完成相同的事情简捷得多，并且 MATLAB 也吸收了像 Maple 等软件的优点，从而使 MATLAB 成为一款强大的数学软件。本章从最基本的运算单元出发，讲述了 MATLAB 矩阵的表示方法，符号变量的应用，基本图形绘制、数值拟合和插值等计算等问题，使用户能初步了解和掌握 MATLAB 基本技巧。

学习目标：

（1）学习和掌握 MATLAB 基本功能；

（2）掌握 MATLAB 矩阵运算及基本图形绘制等方法；

（3）掌握 MATLAB 常用数值拟合和插值运算等方法；

（4）掌握 MATLAB 工具箱函数的查询等功能。

1.1　MATLAB 简介

在 MATLAB 集成开发环境下，它集成了管理文件、变量和应用程序的许多编程工具。当启动 MATLAB 后，界面如图 1-1 所示。

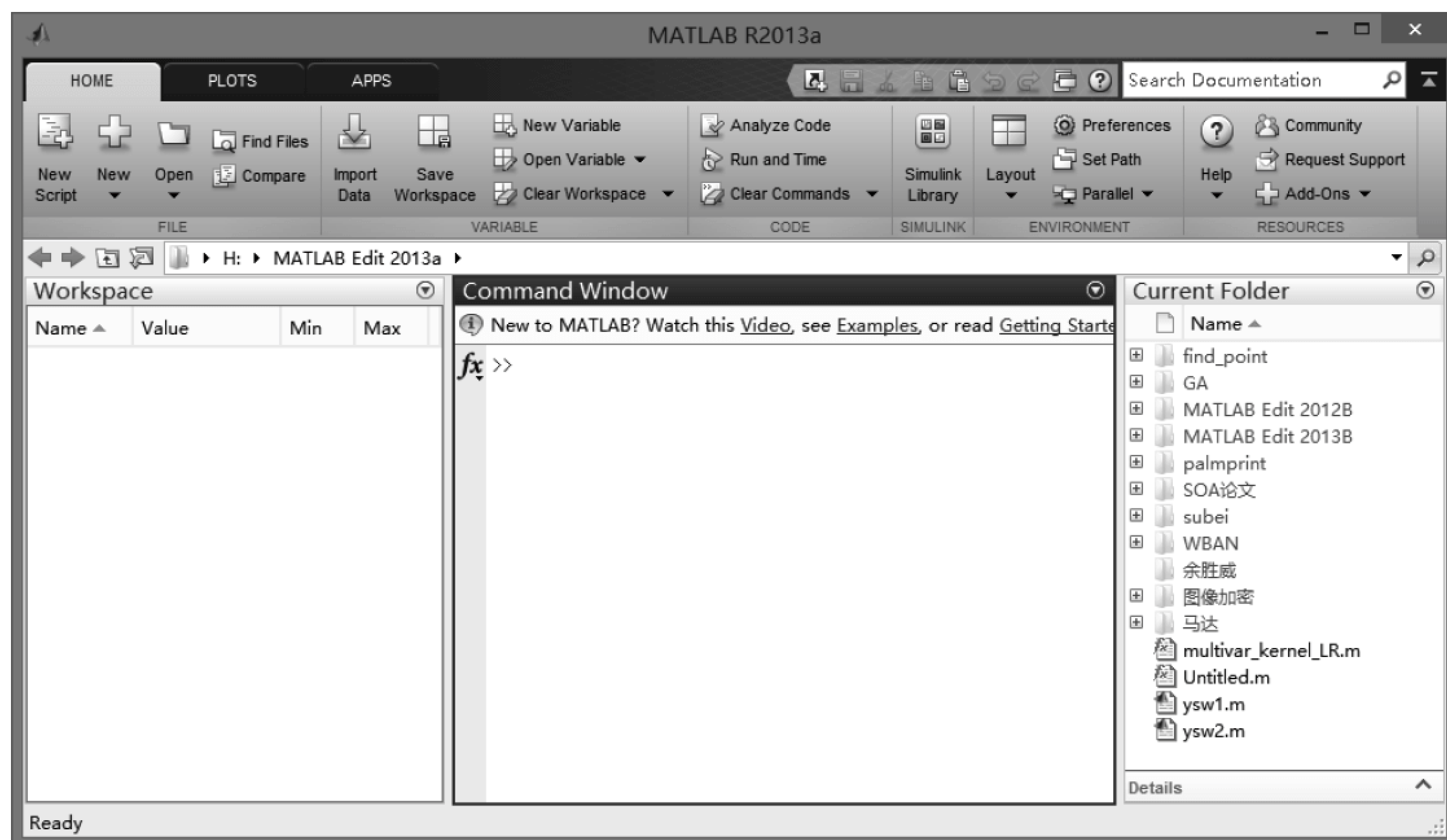


图 1-1　MATLAB 启动界面

在 MATLAB 界面上可以得到和访问的窗口主要有：

- ❑ 命令窗口（The Command Window）；
- ❑ 命令历史窗口（The Command History Window）；
- ❑ 启动平台（Launch Pad）；
- ❑ 编辑调试窗口（The Edit/Debug Window）；
- ❑ 工作台窗口和数组编辑器（Workspace Browser and Array Editor）；
- ❑ 帮助空间窗口（Help Browser）；
- ❑ 当前路径窗口（Current Directory Browser）。

MATLAB 集成了很多工具箱，不同版本 MATLAB 工具箱更新程度不同。对于查询工具箱种类以及查询工具箱版本，可直接在 MATLAB Command Windows 窗口输入 ver 命令，回车可得到 MATLAB 版本信息。

MATLAB 版本信息如下：

```
>> ver
-----------------------------------------------------------------------
MATLAB Version: 8.1.0.604 (R2013a)
MATLAB License Number: 724504
Operating System: Microsoft Windows 7 Version 6.1 (Build 7600)
Java Version: Java 1.6.0_17-b04 with Sun Microsystems Inc. Java HotSpot(TM)
Client VM mixed mode
-----------------------------------------------------------------------
MATLAB                                  Version 8.1         (R2013a)
Simulink                                Version 8.1         (R2013a)
Aerospace Blockset                      Version 3.11        (R2013a)
Aerospace Toolbox                       Version 2.11        (R2013a)
Bioinformatics Toolbox                  Version 4.3         (R2013a)
Communications System Toolbox           Version 5.4         (R2013a)
Computer Vision System Toolbox          Version 5.2         (R2013a)
Control System Toolbox                  Version 9.5         (R2013a)
Curve Fitting Toolbox                   Version 3.3.1       (R2013a)
DO Qualification Kit                    Version 2.1         (R2013a)
DSP System Toolbox                      Version 8.4         (R2013a)
Data Acquisition Toolbox                Version 3.3         (R2013a)
Database Toolbox                        Version 4.1         (R2013a)
Datafeed Toolbox                        Version 4.5         (R2013a)
Econometrics Toolbox                    Version 2.3         (R2013a)
Embedded Coder                          Version 6.4         (R2013a)
Filter Design HDL Coder                 Version 2.9.3       (R2013a)
Financial Instruments Toolbox           Version 1.1         (R2013a)
Financial Toolbox                       Version 5.1         (R2013a)
Fixed-Point Designer                    Version 4.0         (R2013a)
Fuzzy Logic Toolbox                     Version 2.2.17      (R2013a)
Gauges Blockset                         Version 2.0.7       (R2013a)
Global Optimization Toolbox             Version 3.2.3       (R2013a)
HDL Coder                               Version 3.2         (R2013a)
HDL Verifier                            Version 4.2         (R2013a)
IEC Certification Kit                   Version 3.1         (R2013a)
Image Acquisition Toolbox               Version 4.5         (R2013a)
Image Processing Toolbox                Version 8.2         (R2013a)
Instrument Control Toolbox              Version 3.3         (R2013a)
MATLAB Builder EX                       Version 2.3.1       (R2013a)
MATLAB Builder JA                       Version 2.2.6       (R2013a)
MATLAB Builder NE                       Version 4.1.3       (R2013a)
MATLAB Coder                            Version 2.4         (R2013a)
MATLAB Compiler                         Version 4.18.1      (R2013a)
```

```
MATLAB Distributed Computing Server          Version 6.2        (R2013a)
MATLAB Report Generator                      Version 3.14       (R2013a)
Mapping Toolbox                              Version 3.7        (R2013a)
Model Predictive Control Toolbox             Version 4.1.2      (R2013a)
Model-Based Calibration Toolbox              Version 4.6        (R2013a)
Neural Network Toolbox                       Version 8.0.1      (R2013a)
OPC Toolbox                                  Version 3.2        (R2013a)
Optimization Toolbox                         Version 6.3        (R2013a)
Parallel Computing Toolbox                   Version 6.2        (R2013a)
Partial Differential Equation Toolbox        Version 1.2        (R2013a)
Phased Array System Toolbox                  Version 2.0        (R2013a)
RF Toolbox                                   Version 2.12       (R2013a)
Real-Time Windows Target                     Version 4.2        (R2013a)
Robust Control Toolbox                       Version 4.3        (R2013a)
Signal Processing Toolbox                    Version 6.19       (R2013a)
SimBiology                                   Version 4.3        (R2013a)
SimDriveline                                 Version 2.4        (R2013a)
SimElectronics                               Version 2.3        (R2013a)
SimEvents                                    Version 4.3        (R2013a)
SimHydraulics                                Version 1.12       (R2013a)
SimMechanics                                 Version 4.2        (R2013a)
SimPowerSystems                              Version 5.8        (R2013a)
SimRF                                        Version 4.0        (R2013a)
Simscape                                     Version 3.9        (R2013a)
Simulink 3D Animation                        Version 6.3        (R2013a)
Simulink Code Inspector                      Version 1.3        (R2013a)
Simulink Coder                               Version 8.4        (R2013a)
Simulink Control Design                      Version 3.7        (R2013a)
Simulink Design Optimization                 Version 2.3        (R2013a)
Simulink Design Verifier                     Version 2.4        (R2013a)
Simulink PLC Coder                           Version 1.5        (R2013a)
Simulink Report Generator                    Version 3.14       (R2013a)
Simulink Verification and Validation         Version 3.5        (R2013a)
Spreadsheet Link EX                          Version 3.1.7      (R2013a)
Stateflow                                    Version 8.1        (R2013a)
Statistics Toolbox                           Version 8.2        (R2013a)
Symbolic Math Toolbox                        Version 5.10       (R2013a)
System Identification Toolbox                Version 8.2        (R2013a)
SystemTest                                   Version 2.6.5      (R2013a)
Trading Toolbox                              Version 1.0        (R2013a)
Vehicle Network Toolbox                      Version 2.0        (R2013a)
Wavelet Toolbox                              Version 4.11       (R2013a)
xPC Target                                   Version 5.4        (R2013a)
xPC Target Embedded Option                   Version 5.4        (R2013a)
>>
```

MATLAB 功能相当强大，几乎所有的工程分析问题都可以胜任，而且 MATLAB 计算精度较高，借助于强大的工具箱和矩阵处理能力，被广大学术界的研究人员所认可。因此，MATLAB 是一款高效的科学计算软件。

1.2　联机帮助系统

联机演示系统提供给 MATLAB 初学者一个演示学习的平台，用户可以根据 Help 系统进行相关功能的查看与学习。命令窗口查询帮助系统可以在命令窗口中快速查询相关帮助。常用的帮助命令如表 1-1 所示。

表 1-1　常用的帮助命令

命　　令	功　　能
help	显示当前帮助系统中包含的所有项目
help+函数名/类名	显示函数/类的相关信息
lookfor+关键字	显示包含关键字的函数/类的所有项目
what	显示当前目录中 MATLAB 文件列表
who	显示工作区间中所有变量的列表
whos	显示工作区间中变量的详细信息

单击 MATLAB 窗口上面的 Help 按钮，即可打开 Help 查询窗口，如图 1-2 所示。

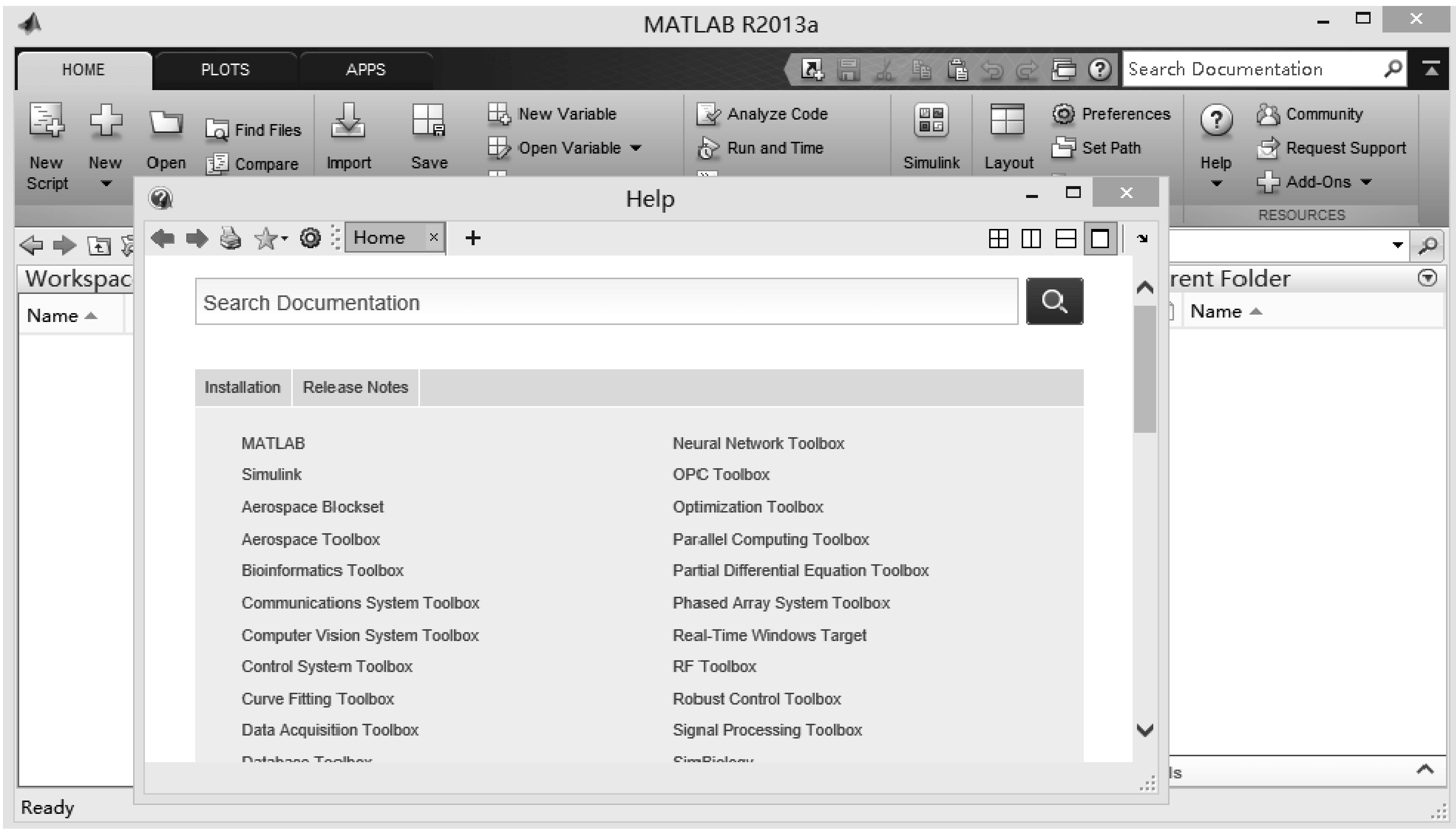


图 1-2　Help 查询窗口

在命令窗口中输入 demo 或 demos 即可进入 MATLAB 帮助系统的主演示页面，如图 1-3 所示。

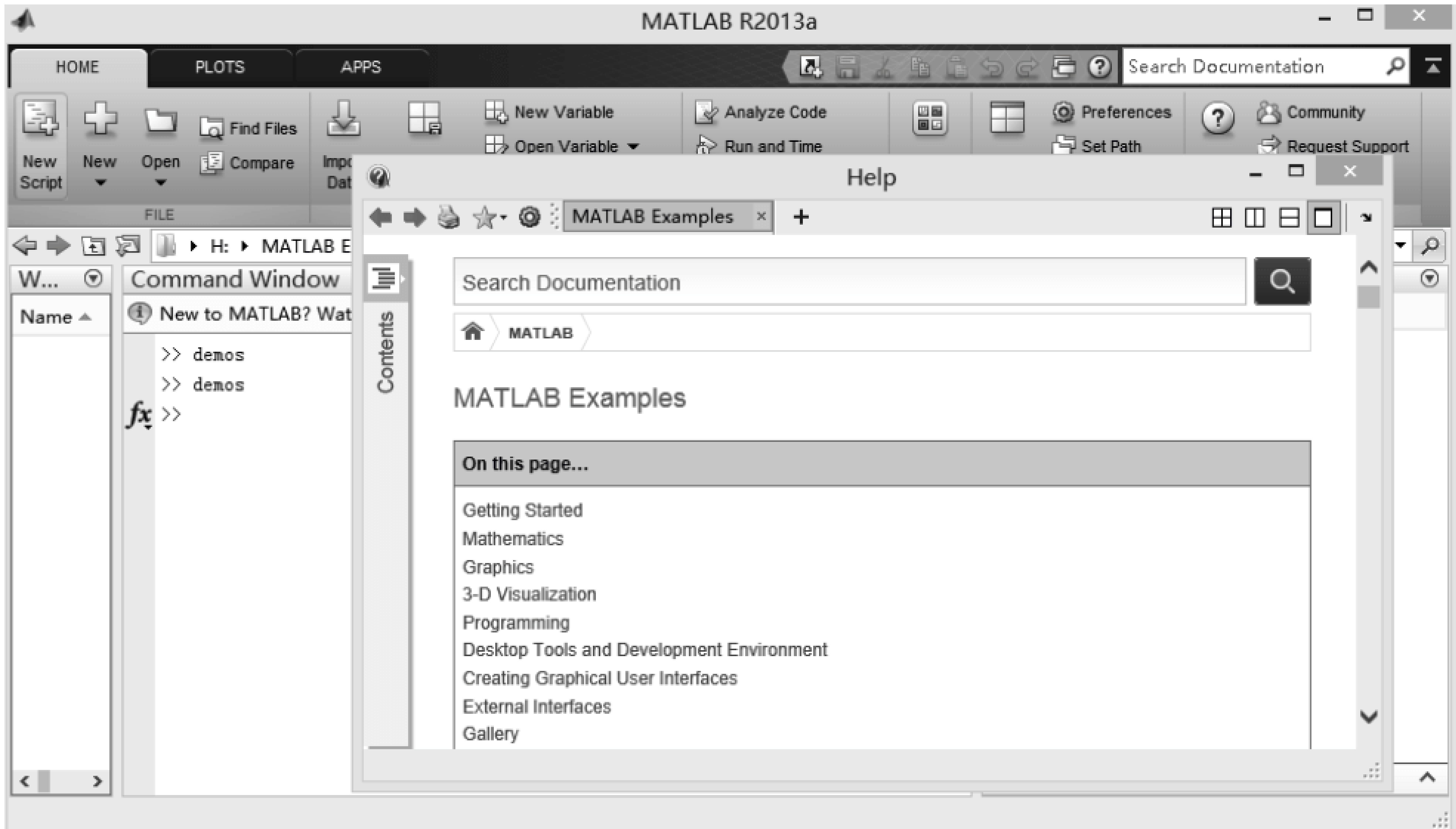


图 1-3　MTALAB 自带实例

单击相应的实例资源即可进入具体的演示界面，如图 1-4 所示为选择 Graphics 实例资源的情形。

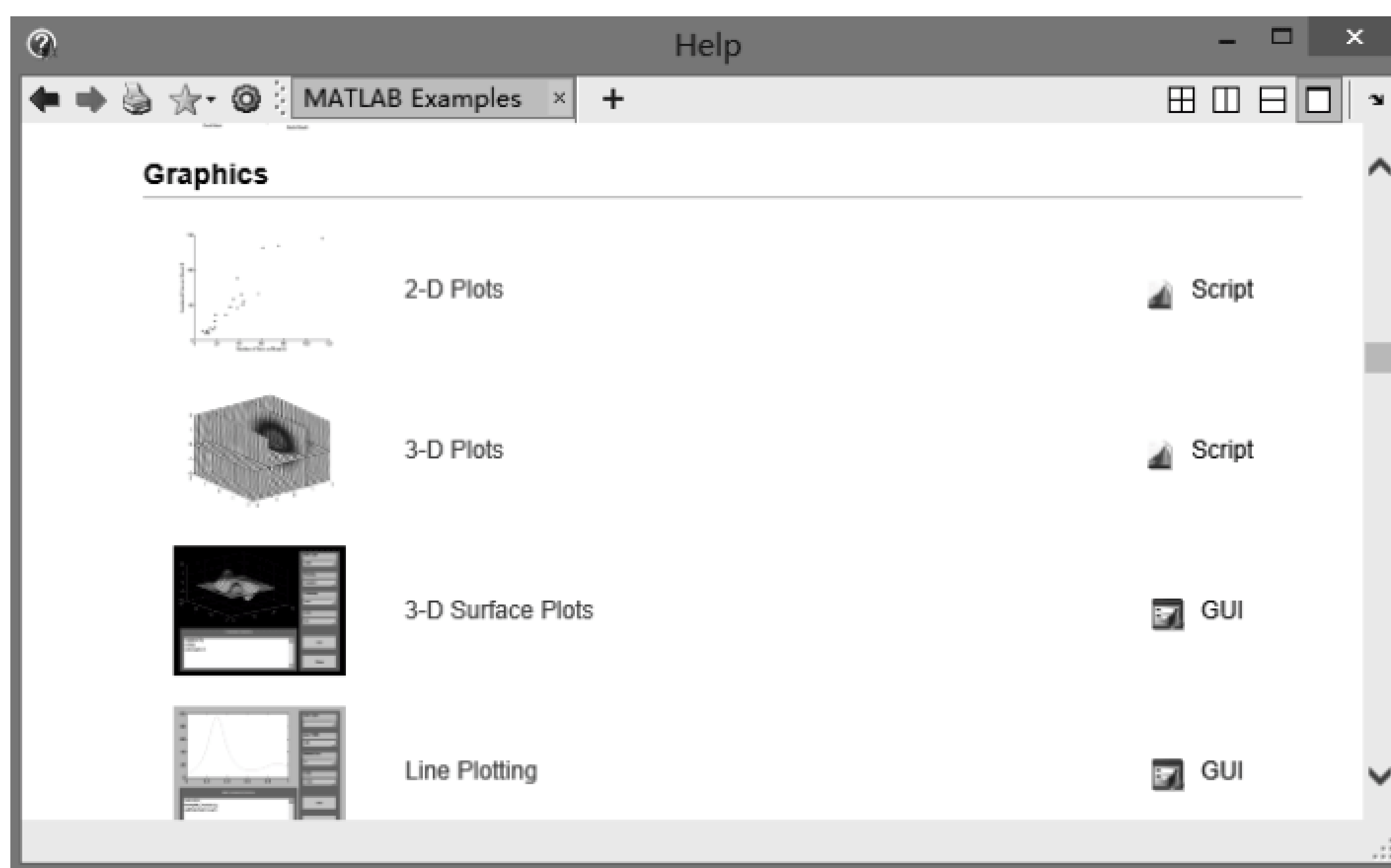


图 1-4　Graphics 实例

MATLAB 具有丰富的工具箱函数，能够满足用户各种需求，用户合理地使用 Help 工具，能够提高编程效率。

1.3　用户路径设置

为了保护 MATLAB 目录结构的严整，用户常常需要建立自己的工作目录。MATLAB 启动后的默认目录为“X\MATLAB\work\”，若不建立目录则 MATLAB 环境产生的数据文件就登录在这个缺省目录上。建立工作目录有以下两种方法：

（1）在 DOS 环境下建立；

（2）在 Windows 环境下建立。

MATLAB 在启动时，不能与原定路径以外的其他目录交换信息。修改 MATLAB 工作路径可用以下方式扩充：

（1）在 MATLAB 指令窗口中输入“cd c\:mydir”；

（2）在 MATLAB 环境下，输入“pathtool”或者在 MATLAB 指令窗口的菜单 HOME 中的 Set Path 选项设置，如图 1-5 所示。

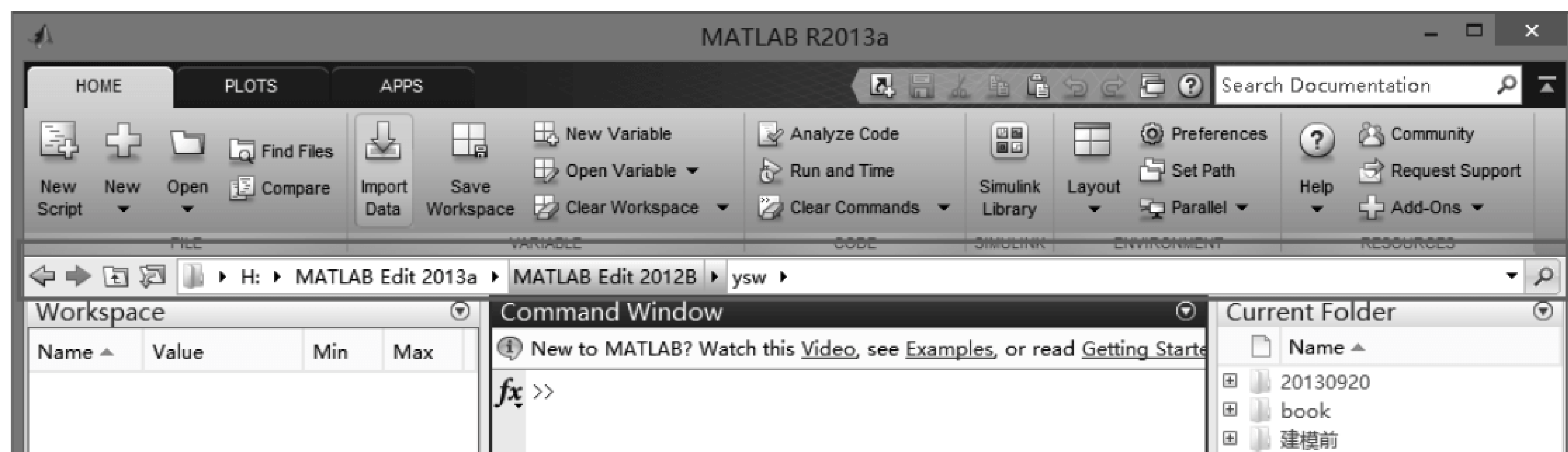


图 1-5　用户路径

当然，用户还可以更加直接的在 MATLAB 图标的属性窗口进行用户工作路径的设置，如图 1-6 所示。



图 1-6　工作路径设置

图 1-6 中，用户可以在起始位置区域输入用户自己的工作路径，从而每次启动 MATLAB 时，默认的工作路径为该起始位置下的路径。如"H:\MATLAB Edit 2013a\MATLAB Edit 2013B"。

1.4　矩阵的表示

矩阵和向量是一样的，用来描述某一个问题的方程组的系数，由方程组的系数和常数构成的方阵。矩阵包括数值矩阵、符号矩阵和特殊矩阵等三种基本样式。

1.4.1　数值矩阵的生成

1．实数值矩阵的输入

MATLAB 的强大功能之一体现在能直接处理向量或矩阵。前提是用户根据具体的问题输入待处理的向量或矩阵。

一般简单的定义矩阵，可以直接按行方式输入每个元素：同一行中的元素用逗号（,）或者用空格符来分隔，且空格个数不限；不同的行用分号（;）分隔。所有元素均在方括号（[ ]）内；当矩阵是多维（三维以上），且方括号内的元素是维数较低的矩阵时，会有多重的方括号。具体如下所示。

【例 1.1】实数值矩阵的输入实例如下：

```
clc                          %清屏
clear all;                   %删除 workplace 变量
close all;                   %关掉显示图形窗口
>> x1 = [1,2,3,4,5,6]
x1 =

    1     2     3     4     5     6
>> x2 = [1;2;3;4;5;6]
x2 =

    1
    2
    3
    4
    5
    6
>> x3 = [1:6]

x3 =

    1     2     3     4     5     6
>> x4= [1:3;2:4;3:5]

x4 =

    1     2     3
    2     3     4
    3     4     5

>> Null = [ ]                %生成一个空矩阵
Null =
     []
```

2. 复数矩阵的输入

复数在控制工程及复平面计算里面应用较多。复数矩阵是指带有虚数的数值矩阵。复数矩阵有两种生成方式，如下所示。

【例 1.2】复数矩阵的输入方式一实例：

```
clc,clear,close all
x1 = 1;
x2 = 2;
x3 = [x1*i,x1;x2,x2*i*i;]
x3 =

   0.0000 + 1.0000i   1.0000 + 0.0000i
   2.0000 + 0.0000i  -2.0000 + 0.0000i
```

【例 1.3】 复数矩阵的输入方式二实例：

```
clc,clear,close all
x1 = [1,2;3,4];
x2 = [2,3;4,5];
x3 = x1 + x2*i
x3 =
```

```
  1.0000 + 2.0000i   2.0000 + 3.0000i
  3.0000 + 4.0000i   4.0000 + 5.0000i
```

1.4.2　符号矩阵的生成

在 MATLAB 中输入符号向量或者矩阵的方法和输入数值类型的向量或者矩阵在形式上很相像，只不过要用到符号矩阵定义函数 sym，或者是用到符号定义函数 syms，先定义一些必要的符号变量，再像定义普通矩阵一样输入符号矩阵。

1．用命令sym定义矩阵

这时的函数 sym 实际是在定义一个符号表达式。这时的符号矩阵中的元素可以是任何的符号或者是表达式，而且长度没有限制，只是将方括号置于用于创建符号表达式的单引号中。

【例 1.4】 sym 定义矩阵的实例如下：

```
clc,clear,close all
x1 = sym('[y,s,w;ysw welcome you!]')
x2 = sym('[1,2,3,ysw;SWJTU YuShengWei welcome you!]')

x1 =
[   y,       s,             w]
[ ysw, welcome, factorial(you)]

x2 =
[     1,          2,       3,            ysw]
[ SWJTU, YuShengWei, welcome, factorial(you)]
```

2．用命令syms定义矩阵

先定义矩阵中的每一个元素为一个符号变量，然后与数值矩阵操作相同，输入符号矩阵。

【例 1.5】 syms 定义矩阵的输入实例如下：

```
clc,clear,close all
x3 = sym('YuShengWei');
x4 = sym('HuBei Province');
x5 = sym('SWJTU Engineering Department');
x6 = [1,2,3;x3,x4,x5;x3,x3,x3]
x6 =
 [          1,             2,                            3]
[ YuShengWei, HuBei_Province, SWJTU_Engineering_Department]
[ YuShengWei,     YuShengWei,                   YuShengWei]
```

3．把数值矩阵转化成相应的符号矩阵

数值型和符号型在 MATLAB 中是不相同的，它们之间不能直接进行转化。MATLAB 提供了一个将数值型转化成符号型的命令，即 sym。

【例 1.6】 数值型转化成符号型的输入实例如下：

```
clc,clear,close all
format short
```

```
x1 = [1/3,pi;sin(pi),2*pi;log(10),exp(2)]
sym(x1)

x1 =

    0.3333    3.1416
    0.0000    6.2832
    2.3026    7.3891

ans =

[                                    1/3,                               pi]
[ 4967757600021511/40564819207303340847894502572032,          2*pi]
[   2592480341699211/1125899906842624, 4159668786720471/562949953421312]
```

注意：矩阵是用分数形式还是浮点形式表示的，一般情况下，矩阵是浮点型变量保存。针对本例，将矩阵转化成符号矩阵后，都将以最接近原值的有理数形式表示或者是函数形式表示。

1.4.3　特殊矩阵的生成

MATLAB 特殊矩阵较多，主要是为了方便用户快速编程调用，或者用于特殊计算而设定的矩阵，具体的特殊矩阵有 0-1 矩阵、随机分布矩阵、对角矩阵等。

（1）全零阵的生成

```
函数  zeros
格式  B = zeros(n)              %生成 n×n 全零阵
B = zeros(m,n)                  %生成 m×n 全零阵
B = zeros([m n])                %生成 m×n 全零阵
B = zeros(d1,d2,d3…)            %生成 d1×d2×d3×…全零阵或数组
B = zeros([d1 d2 d3…])          %生成 d1×d2×d3×…全零阵或数组
B = zeros(size(A))              %生成与矩阵 A 相同大小的全零阵
```

该实例输出结果如下：

```
clc,clear,close all
zeros(3)
ans =
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

（2）单位阵的生成

```
函数 eye
格式  Y  =  eye(n)              %生成 n×n 单位阵
Y  =  eye(m,n)                  %生成 m×n 单位阵
Y  =  eye(size(A))              %生成与矩阵 A 相同大小的单位阵
```

该实例输出结果如下：

```
>> eye(3)
ans =
     1     0     0
```

```
     0     1     0
     0     0     1
```

（3）全 1 阵的生成

```
函数  ones
格式  Y = ones(n)              %生成 n×n 全 1 阵
Y = ones(m,n)                  %生成 m×n 全 1 阵
Y = ones([m n])                %生成 m×n 全 1 阵
Y = ones(d1,d2,d3…)            %生成 d1×d2×d3×…全 1 阵或数组
Y = ones([d1 d2 d3…])          %生成 d1×d2×d3×…全 1 阵或数组
Y = ones(size(A))              %生成与矩阵 A 相同大小的全 1 阵
```

该实例输出结果如下：

```
>> ones(3)
ans =
     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1
```

（4）均匀分布随机矩阵的生成

```
函数  rand
格式  Y = rand(n)                      %生成 n×n 随机矩阵，其元素在（0，1）内
Y = rand(m,n)                          %生成 m×n 随机矩阵
Y = rand([m n])                        %生成 m×n 随机矩阵
Y = rand(m,n,p,…)                      %生成 m×n×p×…随机矩阵或数组
Y = rand([m n p…])                     %生成 m×n×p×…随机矩阵或数组
Y = rand(size(A))                      %生成与矩阵 A 相同大小的随机矩阵
rand                                   %无变量输入时只产生一个随机数
s = rand('state')                      %产生包括均匀发生器当前状态的 35 个元素的向量
rand('state', s)                       %使状态重置为 s
rand('state', 0)                       %重置发生器到初始状态
rand('state', j)                       %对整数 j 重置发生器到第 j 个状态
rand('state', sum (100*clock))         %每次重置到不同状态
```

该实例输出结果如下：

```
>> rand(3)
ans =
    0.8147    0.9134    0.2785
    0.9058    0.6324    0.5469
    0.1270    0.0975    0.9575
```

（5）正态分布随机矩阵的生成

```
函数  randn
格式  Y = randn(n)                     %生成 n×n 正态分布随机矩阵
Y = randn(m,n)                         %生成 m×n 正态分布随机矩阵
Y = randn([m n])                       %生成 m×n 正态分布随机矩阵
Y = randn(m,n,p,…)                     %生成 m×n×p×…正态分布随机矩阵或数组
Y = randn([m n p…])                    %生成 m×n×p×…正态分布随机矩阵或数组
Y = randn(size(A))                     %生成与矩阵 A 相同大小的正态分布随机矩阵
randn                                  %无变量输入时只产生一个正态分布随机数
s = randn('state')                     %产生包括正态发生器当前状态的两个元素的向量
s = randn('state', s)                  %重置状态为 s
```

```
s = randn('state', 0)                %重置发生器为初始状态
s = randn('state', j)                %对于整数 j 重置状态到第 j 状态
s = randn('state', sum(100*clock))   %每次重置到不同状态
```

该实例输出结果如下：

```
>> randn(3)
ans =
    2.7694    0.7254   -0.2050
   -1.3499   -0.0631   -0.1241
    3.0349    0.7147    1.4897
```

（6）产生随机排列

```
函数  randperm
格式  p = randperm(n)     %产生 1～n 之间整数的随机排列
```

该实例输出结果如下：

```
>> randperm(3)
ans =
     3     1     2
```

（7）产生线性等分向量

```
函数  linspace
格式  y = linspace(a,b)         %在(a,b)上产生 100 个线性等分点
y = linspace(a,b,n)             %在(a,b)上产生 n 个线性等分点
```

该实例输出结果如下：

```
>> linspace(1,2,10)
ans =
  Columns 1 through 6
    1.0000    1.1111    1.2222    1.3333    1.4444    1.5556
  Columns 7 through 10
    1.6667    1.7778    1.8889    2.0000
```

（8）产生对数等分向量

```
函数  logspace
格式  y = logspace(a,b)         %在(10^a,10^b)之间产生 50 个对数等分向量
y = logspace(a,b,n)             %在(10^a,10^b)上产生 n 个线性等分点
y = logspace(a,pi)
```

该实例输出结果如下：

```
>> logspace(1,2,10)
ans =
  Columns 1 through 6
   10.0000   12.9155   16.6810   21.5443   27.8256   35.9381
  Columns 7 through 10
   46.4159   59.9484   77.4264  100.0000
```

（9）计算矩阵中元素的个数

```
函数  numel
格式  n = numel(a)      %返回矩阵 A 的元素的个数
```

该实例输出结果如下：

```
>> numel(rand(3))
ans =
     9
```

（10）产生以输入元素为对角线元素的矩阵

```
函数  blkdiag
格式  out = blkdiag(a,b,c,d,…)  %产生以 a,b,c,d,…为对角线元素的矩阵
```

该实例输出结果如下：

```
>> blkdiag(rand(3),rand(3))
ans =
    0.7060    0.0462    0.6948         0         0         0
    0.0318    0.0971    0.3171         0         0         0
    0.2769    0.8235    0.9502         0         0         0
         0         0         0    0.0344    0.7655    0.4898
         0         0         0    0.4387    0.7952    0.4456
         0         0         0    0.3816    0.1869    0.6463
```

（11）友矩阵的生成

```
函数  compan
格式  A = compan(u)     %u 为多项式系统向量，A 为友矩阵，A 的第 1 行元素为-u(2:n)/u(1)，
其中 u(2:n)为 u 的第 2 到第 n 个元素，A 为特征值就是多项式的特征根
```

该实例输出结果如下：

```
>> compan([1,2,3])
ans =
    -2    -3
     1     0
```

（12）hadamard 矩阵的生成

```
函数  hadamard
格式  H = hadamard(n)       %返回 n 阶 hadamard 矩阵
```

该实例输出结果如下：

```
>> H = hadamard(4)
H =
     1     1     1     1
     1    -1     1    -1
     1     1    -1    -1
     1    -1    -1     1
```

（13）Hankel 方阵的生成

```
函数  hankel
格式  H = hankel(c)                 %第 1 列元素为 c，反三角以下元素为 0
H = hankel(c,r)                    %第 1 列元素为 c，最后一行元素为 r，如果 c 的最后一个
元素与 r 的第一个元素不同，交叉位置元素取为 c 的最后一个元素
```

该实例输出结果如下：

```
>> hankel(3)
ans =
     3
```

（14）Hibert 矩阵的生成

```
函数  hilb
格式  H = hilb(n)       %返回 n 阶 Hibert 矩阵，其元素为 H(i,j)=1/(i+j−1)
```

该实例输出结果如下：

```
>> hilb(3)
ans =
    1.0000    0.5000    0.3333
    0.5000    0.3333    0.2500
    0.3333    0.2500    0.2000
```

（15）逆 Hibert 矩阵的生成

```
函数  invhilb
格式  H = invhilb(n)     %产生 n 阶逆 Hibert 矩阵
```

该实例输出结果如下：

```
>> invhilb(3)
ans =
     9   -36    30
   -36   192  -180
    30  -180   180
```

（16）Magic（魔方）矩阵的生成

```
函数  magic
格式  M = magic(n)     %产生 n 阶魔方矩阵
```

该实例输出结果如下：

```
>> magic(3)
ans =
     8     1     6
     3     5     7
     4     9     2
```

（17）pascal 矩阵的生成

```
函数  pascal
格式  A = pascal(n)      %产生 n 阶 pascal 矩阵，它是对称、正定矩阵，它的元素由 pascal
三角组成，它的逆矩阵的所有元素都是整数
A = pascal(n,1)          %返回由下三角的 Cholesky 系数组成的 pascal 矩阵
A = pascal(n,2)          %返回 pascal(n,1)的转置和交换的形式
```

该实例输出结果如下：

```
>> pascal(3)
ans =
     1     1     1
     1     2     3
     1     3     6
```

（18）托普利兹矩阵的生成

```
函数  toeplitz
格式  T = toeplitz(c,r)    %生成一个非对称的托普利兹矩阵，将 c 作为第 1 列，将 r 作为第
```

```
1 行，其余元素与左上角相邻元素相等
T = toeplitz(r)           %用向量 r 生成一个对称的托普利兹矩阵
```

该实例输出结果如下：

```
>> toeplitz([3,4])
ans =
     3     4
     4     3
```

（19）Wilkinson 特征值测试阵的生成

```
函数  wilkinson
格式  W = wilkinson(n)   %返回 n 阶 wilkinson 特征值测试阵
```

该实例输出结果如下：

```
>> wilkinson(3)
ans =
     1     1     0
     1     0     1
     0     1     1
```

1.5　一般矩阵运算

MATLAB 简称矩阵实验室。对于矩阵的运算，MATLAB 软件有着得天独厚的优势。

（1）随机矩阵输入

```
clc,clear,close all
A = rand(3)
```

运行如下：

```
A =
    0.8407    0.2435    0.1966
    0.2543    0.9293    0.2511
    0.8143    0.3500    0.6160
```

（2）矩阵的乘法运算

```
A^3
```

运行如下：

```
ans =
    1.1910    0.8123    0.5222
    1.1646    1.2543    0.6529
    1.7710    1.2170    0.8228
```

（3）矩阵的点乘运算

```
>> A.^3
```

运行如下：

```
ans =
```

```
    0.5942    0.0144    0.0076
    0.0164    0.8024    0.0158
    0.5399    0.0429    0.2338
```

（4）矩阵的除法运算

```
A^3/A.^3
```

运行如下：

```
ans =
    0.0053    0.8961    2.1727
   -0.5454    1.4280    2.7138
   -0.1775    1.3363    3.4348
```

（5）矩阵的减法运算

```
A^3-A.^3
```

运行如下：

```
ans =

    0.5967    0.7979    0.5146
    1.1482    0.4519    0.6371
    1.2311    1.1741    0.5890
```

（6）矩阵的加法运算

```
A^3+A.^3
```

运行如下：

```
ans =
    1.7852    0.8267    0.5298
    1.1810    2.0568    0.6688
    2.3109    1.2599    1.0566
```

（7）Hankel 矩阵求解

```
%%hankel 矩阵
clc,clear,close all
c=[1:5],
r=[3:9],
H=hankel(c,r)
```

运行程序输出结果如下：

```
c =
     1     2     3     4     5
r =
     3     4     5     6     7     8     9
H =
     1     2     3     4     5     4     5
     2     3     4     5     4     5     6
     3     4     5     4     5     6     7
     4     5     4     5     6     7     8
     5     4     5     6     7     8     9
```

（8）Hibert 矩阵及逆 Hibert 矩阵的生成

```
clc,clear,close all
A=hilb(5)
```

运行程序输出结果如下：

```
A =
    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000
    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667
    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429
    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429    0.1250
    0.2000    0.1667    0.1429    0.1250    0.1111
```

更改输出格式，如下：

```
format rat
A
```

运行程序输出结果如下：

```
A =
       1             1/2            1/3            1/4            1/5
      1/2            1/3            1/4            1/5            1/6
      1/3            1/4            1/5            1/6            1/7
      1/4            1/5            1/6            1/7            1/8
      1/5            1/6            1/7            1/8            1/9
```

希尔伯特逆矩阵求解如下：

```
A=invhilb(5)
```

运行程序输出结果如下：

```
A =
       25          -300          1050         -1400           630
     -300          4800        -18900         26880        -12600
     1050        -18900         79380       -117600         56700
    -1400         26880       -117600        179200        -88200
      630        -12600         56700        -88200         44100
```

1.6　基本图形绘制

图形是 MATLAB 的主要特色之一。MATLAB 图形指令具有自然、简洁、灵活及扩充的特点。MATLAB 的指令很多，例如在同一坐标下绘制多条曲线，编程如下：

```
clc,clear,close all
t=0:pi/50:4*pi;                %变量
y0=exp(-t/3);                  %指数函数
y=exp(-t/3).*sin(3*t);         %指数函数
plot(t,y,t,y0,t,-y0);          %画图
grid on                        %网格化
```

运行程序输出结果如图 1-7 所示。

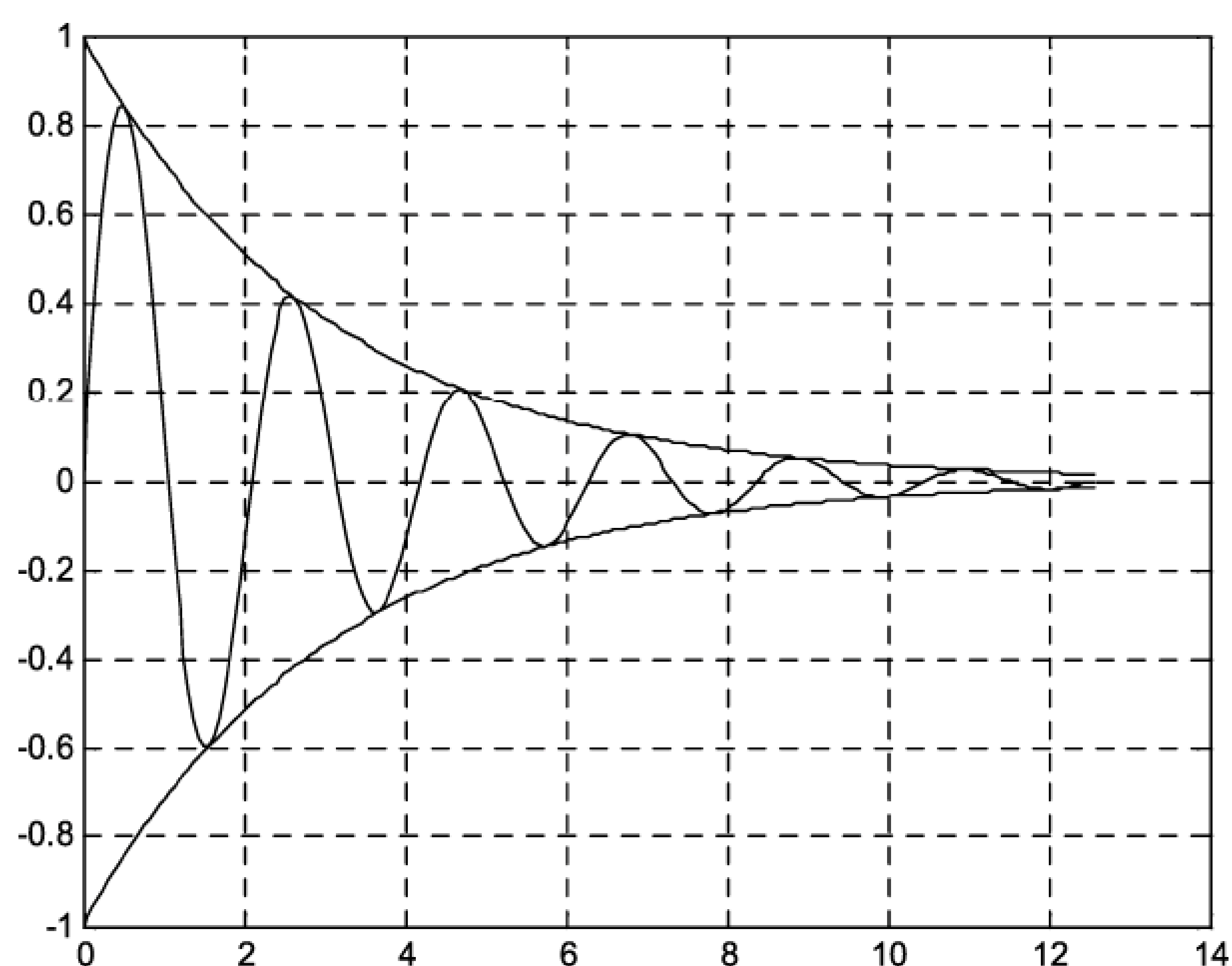


图 1-7　同一坐标系绘制多条曲线

加载 MATLAB 自带的噪音信号进行图形绘制，具体 MATLAB 程序如下：

```
clc                        %清屏
clear all;                 %删除 workplace 变量
close all;                 %关掉显示图形窗口
load noisdopp;             %加载带噪音的多普勒信号
plot(noisdopp)
```

运行程序输出结果如图 1-8 所示。

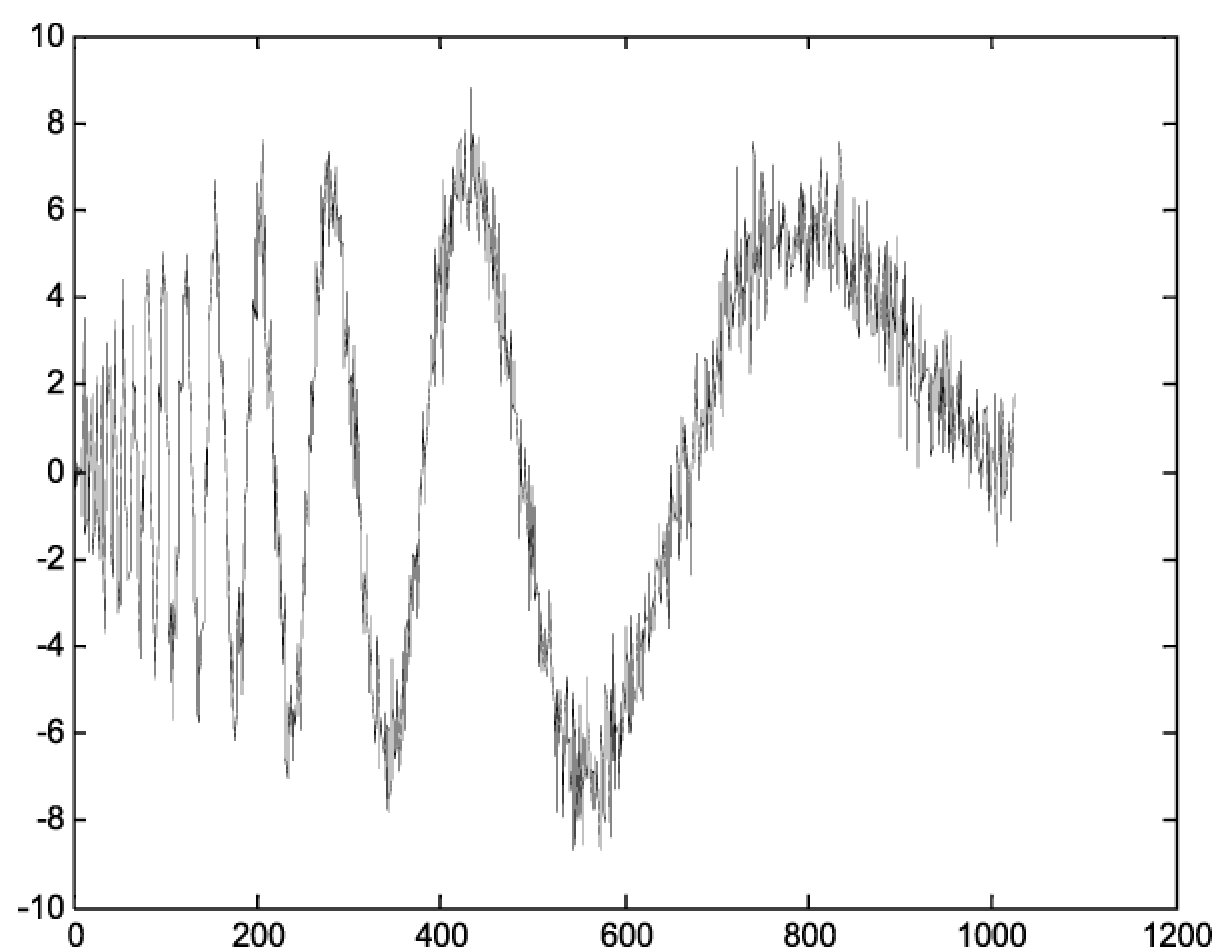


图 1-8　连接矩阵图

【例 1.7】图形窗口的创建与分割，变成如下：

```
clc,clear,close all
b=2*pi;
x=linspace(0,b,50);                                    %分割点
for k =1:9
    y=sin(k*x).*cos(.52*x);                            %函数
    subplot(3,3,k),plot(x,y,'linewidth',2),            %多个窗口画图
    axis([0,2*pi,-1,1])                                %坐标轴
end
```

运行程序输出图形如图 1-9 所示。

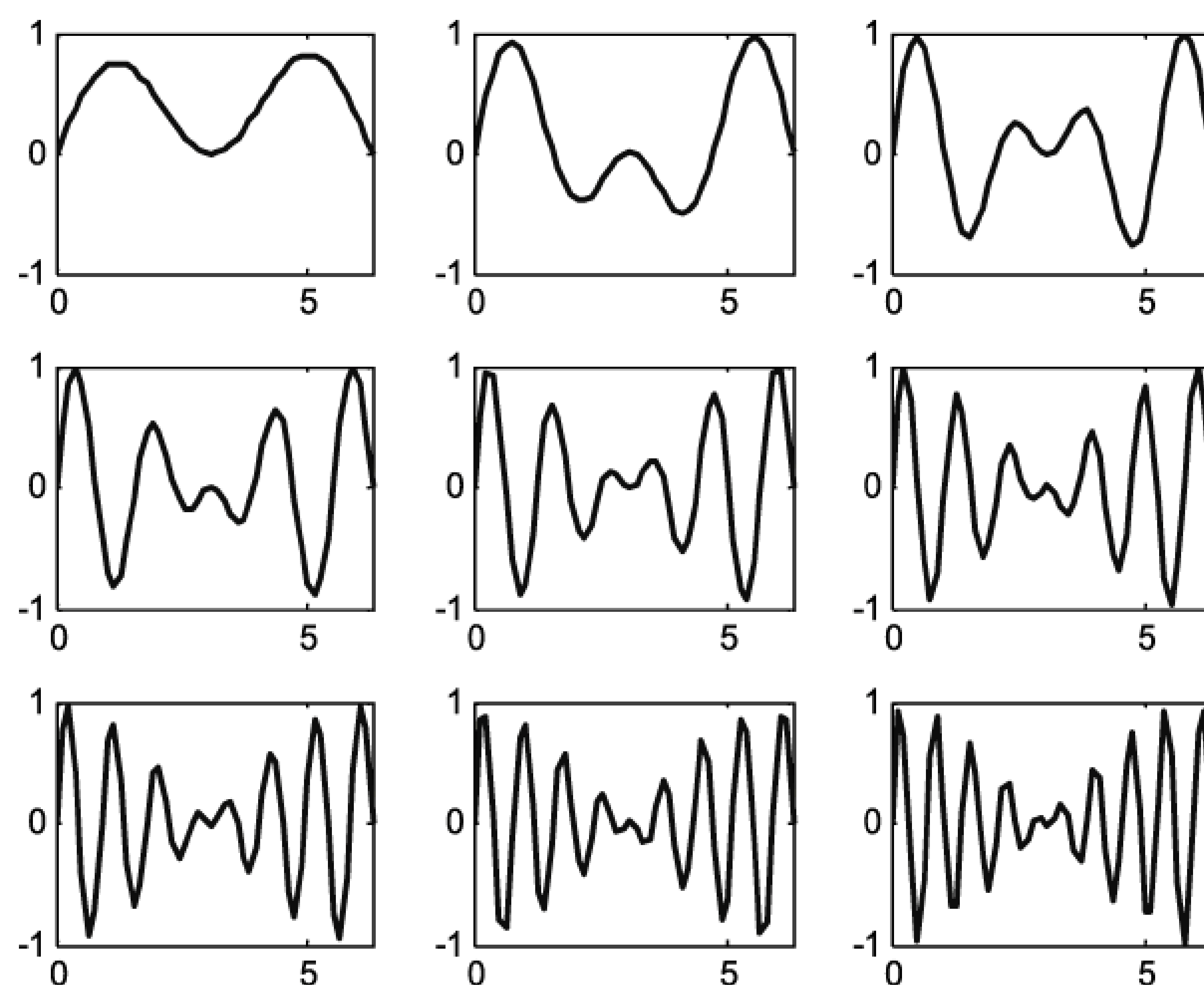


图 1-9　图形窗口设置

【例 1.8】画 $y=x^2\sin(x)$的图形，编程如下：

```
clc,clear,close all
x=linspace(-10,10,50);     %分割点
y = x.^2.*sin(x);          %函数
plot(x,y,'linewidth',2),   %画图
```

运行程序输出图形如图 1-10 所示。

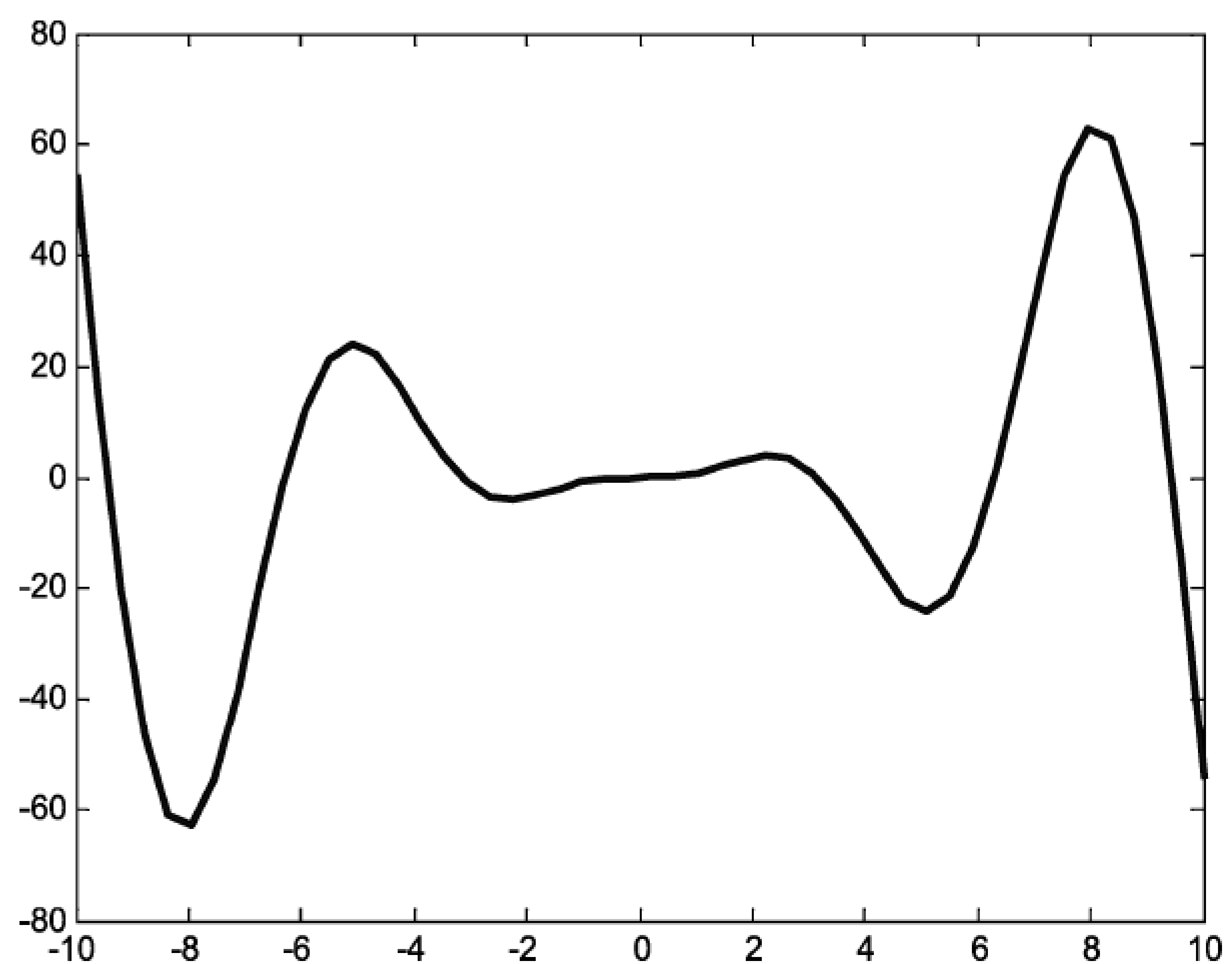


图 1-10　二维图形绘制

【例 1.9】绘制三元函数 $w=x^2+y^2+z^2$ 的可视化图形，编程如下：

```
clc,clear,close all
x=linspace(-2,2,40);                        %等间隔分割点
y=x;
z=x;
[X,Y,Z]=meshgrid(x,y,z);                    %网格点化
w=X.^2+Y.^2+Z.^2;                           %函数
```

```
slice(X,Y,Z,w,[-1,0,1],[-1,0,1],[-1,0,1])     %切片画图
colorbar                                       %颜色条
```

运行程序输出图形如图 1-11 所示。

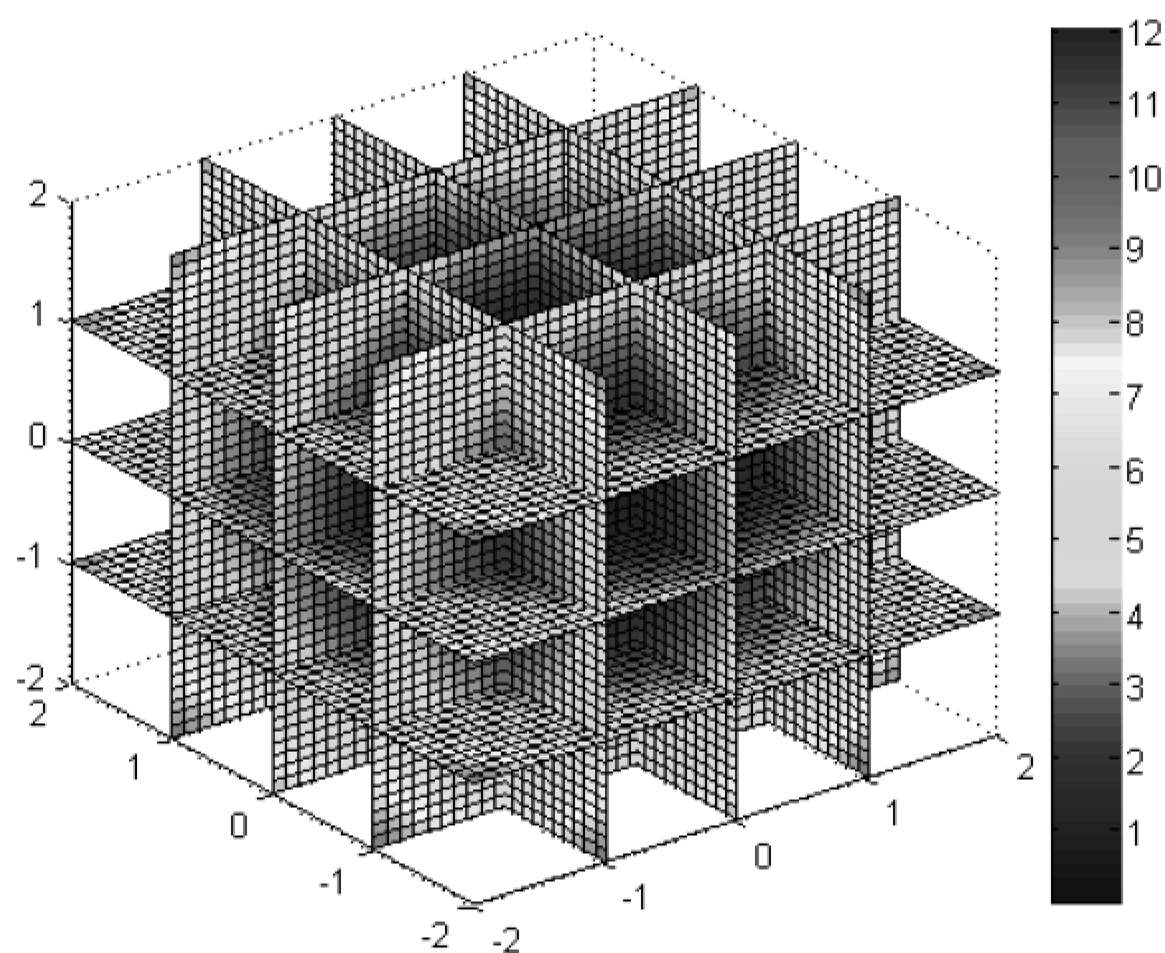


图 1-11　切片图

【例 1.10】空间曲线及其运动方向的表现，编程如下：

```
clc,clear,close all
t=0:0.1:1.5;
Vx=2*t;Vy=2*t.^2;Vz=6*t.^3-t.^2;
x=t.^2;y=(2/3)*t.^3;z=(6/4)*t.^4-(1/3)*t.^3;    %由速度得到曲线
plot3(x,y,z,'r.-'),hold on                        %画飞行轨迹
Vx=gradient(x);Vy=gradient(y);Vz=gradient(z);
quiver3(x,y,z,Vx,Vy,Vz),grid on                   %画速度矢量图
xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('z')               %标记坐标轴
```

运行程序输出图形如图 1-12 所示。

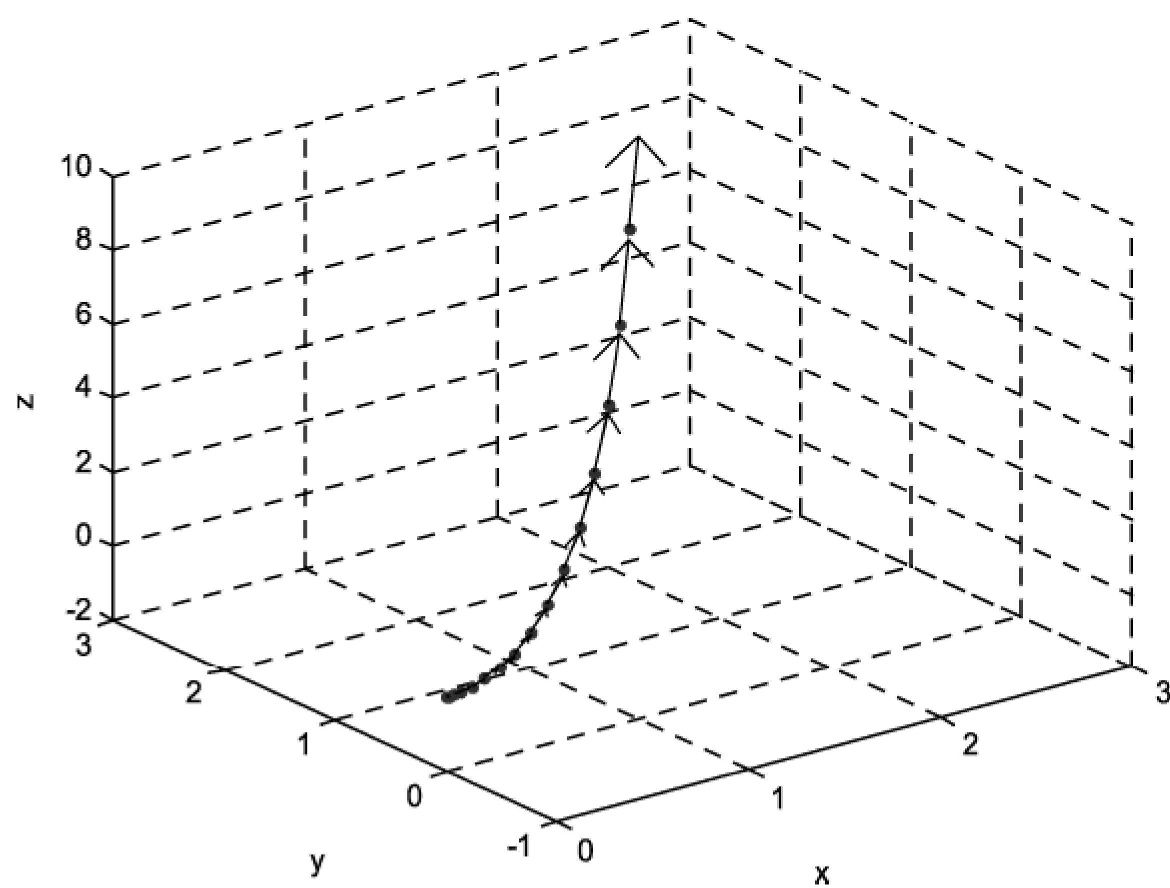


图 1-12　曲线指向图

【例 1.11】用平行截面法讨论由曲面 $z = x^2 - 2y^2$ 构成的马鞍面形状，编程如下：

```
clc,clear,close all
```

```
clf, a=-20;eps0=1;
[x,y]=meshgrid(-10:0.2:10);          %生成平面网格
v=[-10 10 -10 10 -100 100];          %设定空间坐标系的范围
%colormap(gray)                      %将当前的颜色设置为灰色
z1=(x.^2-2*y.^2)+eps;                %计算马鞍面函数 z1=z1(x,y)
z2=a*ones(size(x));                  %计算平面 z2=z2(x,y)
r0=abs(z1-z2)<=eps0;
zz=r0.*z2;xx=r0.*x;yy=r0.*y;             %计算截割的双曲线及其对应的坐标
subplot(2,2,2),                          %在第 2 图形窗口绘制双曲线
h1=plot3(xx(r0~=0),yy(r0~=0),zz(r0~=0),'+');
set(h1,'markersize',2),hold on,
axis(v),grid on
subplot(2,2,1),                      %在第 1 图形窗口绘制马鞍面和平面
mesh(x,y,z1);
grid,
hold on;
mesh(x,y,z2);
h2=plot3(xx(r0~=0),yy(r0~=0),zz(r0~=0),'.');          %画出二者的交线
set(h2,'markersize',6),hold on,axis(v),
for i=1:5                                     %通过循环绘制一系列的平面去截割马鞍面
    a=70-i*30;                                %在这里改变截割平面
    z2=a*ones(size(x));
    r0=abs(z1-z2)<=1;
    zz=r0.*z2;
    yy=r0.*y;
    xx=r0.*x;
    subplot(2,2,3),                           %窗口画图
    mesh(x,y,z1);                             %三维图
    grid,hold on;
    mesh(x,y,z2);
    hidden off  %取消掩藏
    h2=plot3(xx(r0~=0),yy(r0~=0),zz(r0~=0),'.');
    axis(v),grid
    subplot(2,2,4),
    h4=plot3(xx(r0~=0),yy(r0~=0),zz(r0~=0),'o');
    set(h4,'markersize',2),
    hold on,
    axis(v),
    grid on   %网格化
end
```

运行程序输出图形如图 1-13 所示。

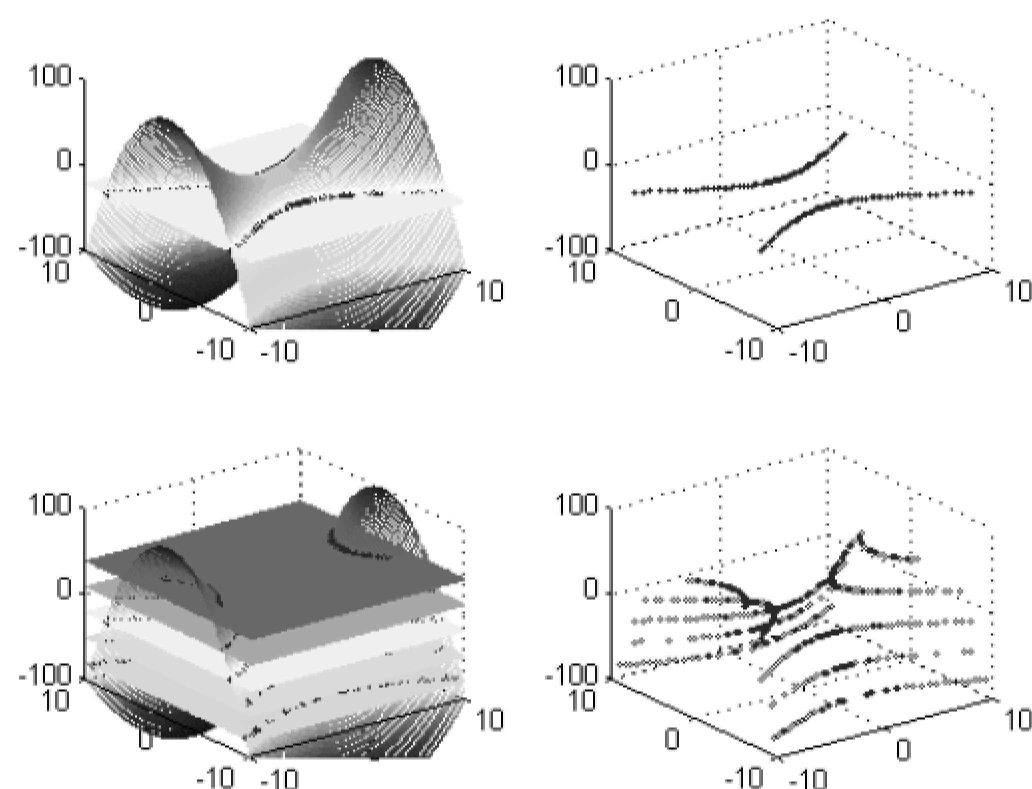


图 1-13　马鞍面

1.7　简单图像处理

图像颜色千变万化，人眼亦能够识别很多种不同的颜色。最常见的是自然光，可以分解成不同的颜色分量，主要由红、绿和黄三原色光合成 RGB，即代表红、绿和蓝三个通道的颜色，是现今应用最广泛的颜色空间之一。对于图像处理，2013 年数学建模竞赛再次出现此类问题，因此具备一定图形处理知识是必要的。

图像颜色区域选择处理对于静态图像也非常重要。在 MATLAB 中提供了 roicolor 函数根据颜色选定区域。其调用格式如下：

BW=roicolor(A, low, high)：色图范围为[low, high]，返回这些像素选择区域。BW 内部区域的值为 1，外边为 0 的矩阵。

BW= roicolor (A, v)：返回 A 中像素与向量 v 相匹配的区域，BW 为二值化图像，若 A 中的像素值在向量 v 中存在则返回 1，否则返回 0。

图像基本示例编程如下：

```
%%读取图像
clc,clear,close all
obj=imread('logo.bmp');                  %读图像
R = obj(:,:,1);                          %R 通道
G = obj(:,:,2);                          %G 通道
B = obj(:,:,3);                          %B 通道
obj_gray = rgb2gray(obj);                %灰度图像
BW1 = im2bw(obj_gray,0.49);              %二值化
BW2 = roicolor(obj_gray,120,200);        %区域二值化
subplot(331),imshow(obj);title('原图像')
subplot(332),imshow(obj_gray);title('灰度图像')
subplot(333),imshow(BW1);title('二值化图像')
subplot(334),imshow(R);title('R 通道图像')
subplot(335),imshow(G);title('G 通道图像')
subplot(336),imshow(B);title('B 通道图像')
subplot(313),imshow(BW2);title('区域选择处理')
```

运行程序结果如图 1-14 所示。

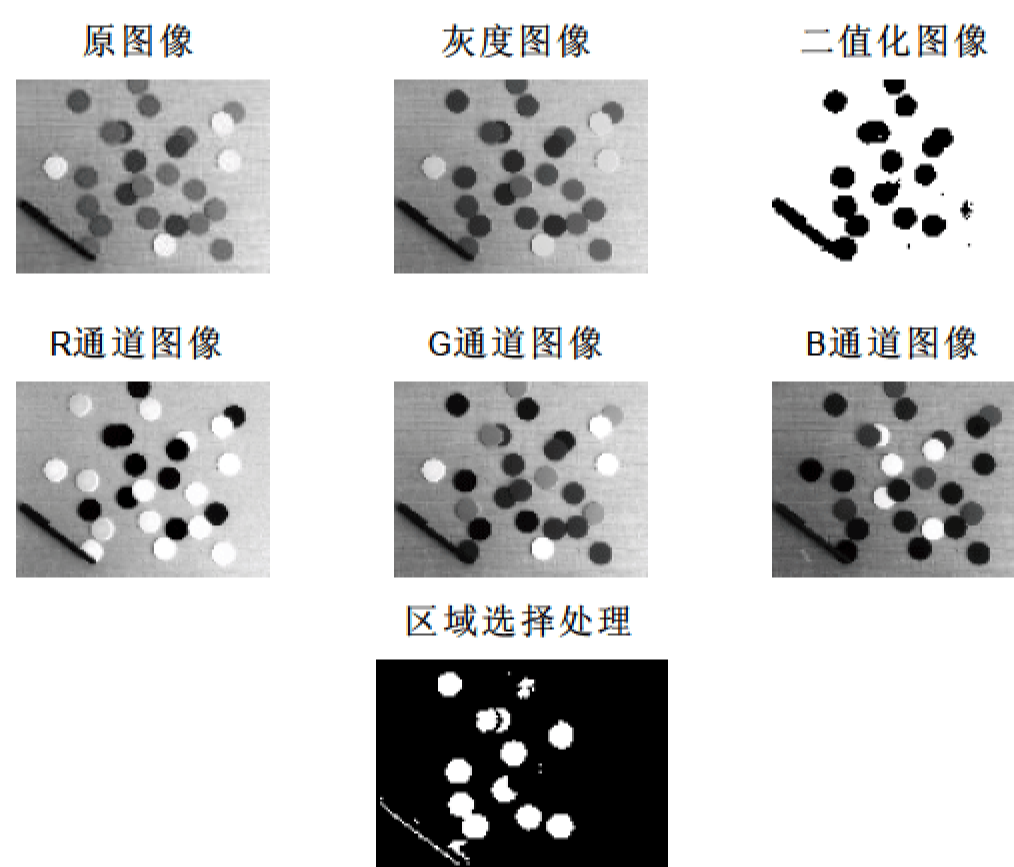


图 1-14　图像处理

1.8　建立函数文件/.M 文件

函数文件可以为 MATLAB 工具箱中的函数直接被用户调用，也可以为用户自己抒写的函数文件，用户可以间接地调用，也可以添加到 MATLAB 工作路径下，供用户调用。函数文件可以反复调用，且节约代码空间，能够使得结构清晰化，因此，函数文件的建立很重要。

常用的函数文件为 function y = abc(x); abc 为用户定义的函数，x 为输入的变量，y 为反馈的函数值。

函数句柄可以通过命令 fhandle=@function name 来创建，例如 trig_f=@sin 或 sqr=@(x)x.^2。

【例 1.12】函数句柄的创建和调用。

在 MATLAB 命令窗口输入命令如下：

```
clc                   %清屏
clear all;            %删除 workplace 变量
close all;            %关掉显示图形窗口
clc,clear,close all
fun1=@sin;
y1 = fun1(pi)
fun2 = @(x,y) (x+y)^2;  %函数句柄
y2 = fun2(1,2)
```

运行程序输出结果如下：

```
y1 =
   1.2246e-16
y2 =
     9
```

【例 1.13】函数文件的创建和调用。

MATLAB 函数文件定义如下：

```
function y = ysw_sum(a,b)
y = a+b;
end
```

相应的主函数为：

```
clc,clear,close all
x1 =1;
x2 = 3;
y1 = ysw_sum(x1,x2)
y2 = ysw_sum(x1,x2) * ysw_sum(x1,x2)
```

运行程序输出结果如下：

```
y1 =
     4
y2 =
    16
```

1.9　常用数值拟合

对给定的试验数据点 $(x_i, y_i)(i = 1,2,\cdots,N)$，可构造 m 次多项式：

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \qquad (m < N)$$

由曲线拟合的定义，应该使得下式取极小值：

$$\sum_{i=1}^{N}[\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - y_i]^2$$

通过简单的运算可得出系数是下面线性方程组的解：

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

其中，

$$\begin{cases} c_k = \sum_{i=1}^{N} x_i^k, (k = 0,1,\cdots,2m) \\ b_k = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i^k, (k = 0,1,\cdots,m) \end{cases}$$

对于最简单的线性最小二乘法拟合。它的具体操作过程是从一组实验数据 (x_i, y_i) 中拟合出函数关系 $y = f(x)$，拟合的标准是使（$f(x_i) - y_i$）的平方取极小值。

数学描述如下所示。

用线性函数：　　　　　　　　$y = f(x) = ax + b$

拟合离散数据：　　　　　　　(x_i, y_i) $i = 0,1,2,\cdots,n$

在最小二乘意义上有：

$$F(a,b) = \sum_{i=0}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial b} = 0$$

解出 a 与 b 的值，则得到线性最小二乘函数。

在 MATLAB 中可以使用 polyfit 函数对数据进行最小二乘拟合，它的基本调用格式为：

$$P = \text{polyfit}(X, Y, N)$$

表示用 N 次多项式拟合数据点 $[x_i, y_i]$。

【例 1.14】以一次、二次和三次多项式拟合如表 1-2 所示的数据。

表 1-2　数据

x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y	1.75	2.45	3.81	4.80	7.00	8.60

MATLAB 编程如下：

```
clc,clear,close all
x=[0.5,1.0,1.5,2.0,2.5,3.0];
y=[1.75,2.45,3.81,4.80,7.00,8.60];
a1=polyfit(x,y,1);    %一次拟合
```

```
a2=polyfit(x,y,2);      %二次拟合
a3=polyfit(x,y,3);      %三次拟合
x1=[0.5:0.05:3.0];
y1=a1(2)+a1(1)*x1;    %一次多项式
y2=a2(3)+a2(2)*x1+a2(1).*x1.*x1;                           %二次多项式
y3=a3(1).*x1.*x1.*x1+a3(2).*x1.*x1+a3(3)*x1+a3(4);    %三次多项式
plot(x,y,'*');
hold on
plot(x1,y1,'b--',x1,y2,'k',x1,y3,'ro-');
legend('原始数据','一次拟合','二次拟合','三次拟合')
p1=polyval(a1,x)   %多项式
p2=polyval(a2,x)   %多项式
p3=polyval(a3,x)   %多项式
v1=y-p1;     %误差
v2=y-p2;     %误差
v3=y-p3;     %误差
s1=norm(v1,'fro')          %计算 F-范数
s2=norm(v2,'fro')          %计算 F-范数
s3=norm(v3,'fro')          %计算 F-范数
```

运行程序输出结果如下：

```
p1 =
   1.2429    2.6397    4.0366    5.4334    6.8303    8.2271
p2 =
   1.7107    2.5461    3.6623    5.0591    6.7367    8.6950
p3 =
   1.7540    2.4855    3.6276    5.0938    6.7974    8.6517
s1 =
   0.9558
s2 =
   0.4220
s3 =
   0.4057
```

输出拟合图形如图 1-15 所示。

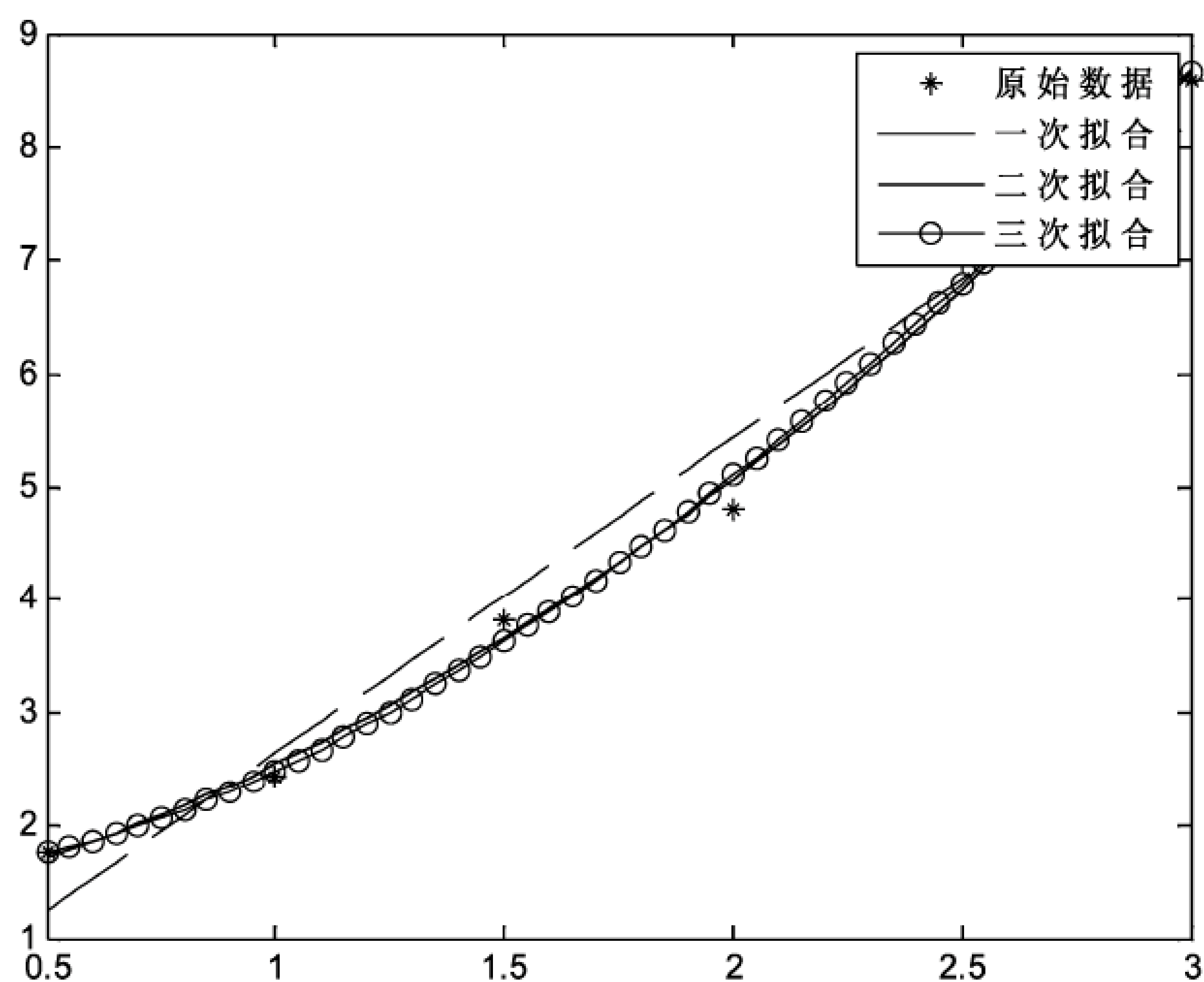


图 1-15　拟合曲线比较

1.10　常用数据插值

插值是函数逼近的一种重要方法，是数值计算的基本课题。插值是一种求函数近似值的方法，针对某个插值点 x，用插值节点 x_i 上的已知值 $f(x_i)$ 组合生成 $f(x)$ 的近似值。最简单的插值法是多项式插值法，采用 MATLAB 既可以利用其提供的插值函数，又可以利用编程来实现数据的插值。

一元插值函数 interp1()的几种调用格式如表 1-3 所示。

表 1-3　一元插值函数interp1 的语法格式

语法形式	说　　明
y = interp1(x, Y, xi)	由已知点集（x,Y）插值计算 xi 上的函数值 y
y = interp1(Y, xi)	相当于 x=1:length(Y)的 interp1(x,Y, xi)
y = interp1(x,Y, xi,method)	用指定插值方法计算插值点 xi 上的函数值 y
y = interp1(x,Y, xi,method,'extrap')	对 xi 中超出已知点集的插值点用指定方法计算函数值 y
y = interp1(x,Y, xi,method,extrapval)	用指定方法插值 xi 上的函数值 y，xi 中超出已知点集处函数值取 extrapval
pp = interp1(x,Y,method,'pp')	用指定方法进行插值，但返回结果为分段多项式

【例 1.15】已知 x,y 的初始矩阵值，利用 interp1 的不同插值算法求 xi[1:0.3:17]时各点的函数近似值。编程如下：

```
clc,clear,close all
format short
hold off
xx=1:1:17;
yx=[3.5,4,4.3,4.6,5,5.3,5.3,5,4.6,4,3.9,3.3,2.8,2.5,2.2,2.0,1.8];
xxi=1:0.3:17;   %插值 xxi
f0=interp1(xx,yx,xxi)   %插值
f1=interp1(xx,yx,xxi,'linear') %线性插值
f2=interp1(xx,yx,xxi,'cubic') %立方插值
f3=interp1(xx,yx,xxi,'spline') %样条插值
f4=interp1(xx,yx,xxi,'nearest') %最近邻插值
plot(xx,yx,'r--','linewidth',2)
hold on
%plot(xxi,f0,'r.-','linewidth',2)
plot(xxi,f1,'b--','linewidth',2)
plot(xxi,f2,'ro-','linewidth',2)
plot(xxi,f3,'k--','linewidth',2)
plot(xxi,f4,'b','linewidth',2)
legend('原始数据','线性插值','三次插值','样条插值','最近区域插值')  %标记
grid on   %栅格
```

运行程序输出图形如图 1-16 所示。

MATLAB 中也提供了 interp2 函数进行二维插值，其用法类似于一维插值函数 interp1。不过它可选的插值方法只有三种：'nearest'、'linear'和'cubic'。其中第二种是默认的插值方法。

在使用 interp2 的过程中要注意以下几点：

（1）在二维插值中已知数据点集（X, Y）必须是栅格格式，一般用 meshgrid 函数产生。

（2）interp2 函数要求（X, Y）必须是严格单调的，即单调递增或者单调递减。

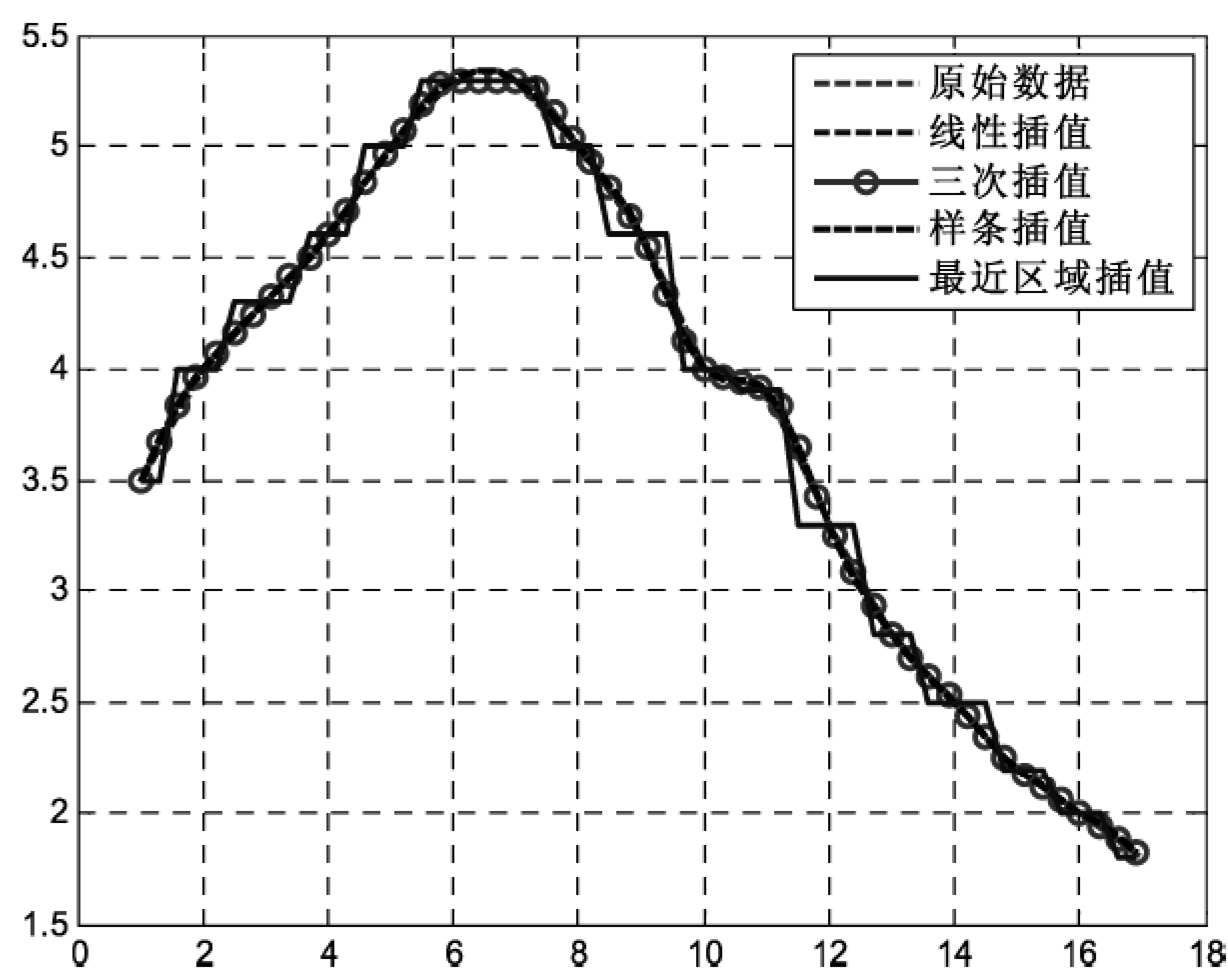


图 1-16　不同插值方法得到的图形

（3）interp2 函数输入中，若已知点集（*X, Y*）在平面上分布不是等间距时，interp2 函数首先通过一定的变换将其转换为等间距的。

（4）当输入点集（*X, Y*）已经是等间距分布的话，可以在 method 参数前面加星号（*），即如'*cubic'这样输入参数，这样可以提高插值速度。

【例 1.16】二元插值函数应用实例。采用 nearest、linear 和 cubic 二维插值，绘制三维表面图。

MATLAB 编程如下：

```
clc,clear,close all
[x,y] = meshgrid(-4:4);                    %产生已知数据栅格点
z = peaks(x,y);                            %计算已知点上的函数值
[x1,y1] = meshgrid(-4:0.25:4);             %产生更精细的插值栅格点
z1 = interp2(x,y,z,x1,y1,'nearest');
subplot(131),surf(x1,y1,z1)                %画基于最邻近法插值的三维表面图
z2 = interp2(x,y,z,x1,y1,'linear');
subplot(132),surf(x1,y1,z2)                %画基于二维分段线性插值的三维表面图
z3 = interp2(x,y,z,x1,y1,'cubic');
subplot(133),surf(x1,y1,z3)                %画基于二维三次多项式插值的三维表面图
```

程序运行，输出结果如图 1-17 所示。

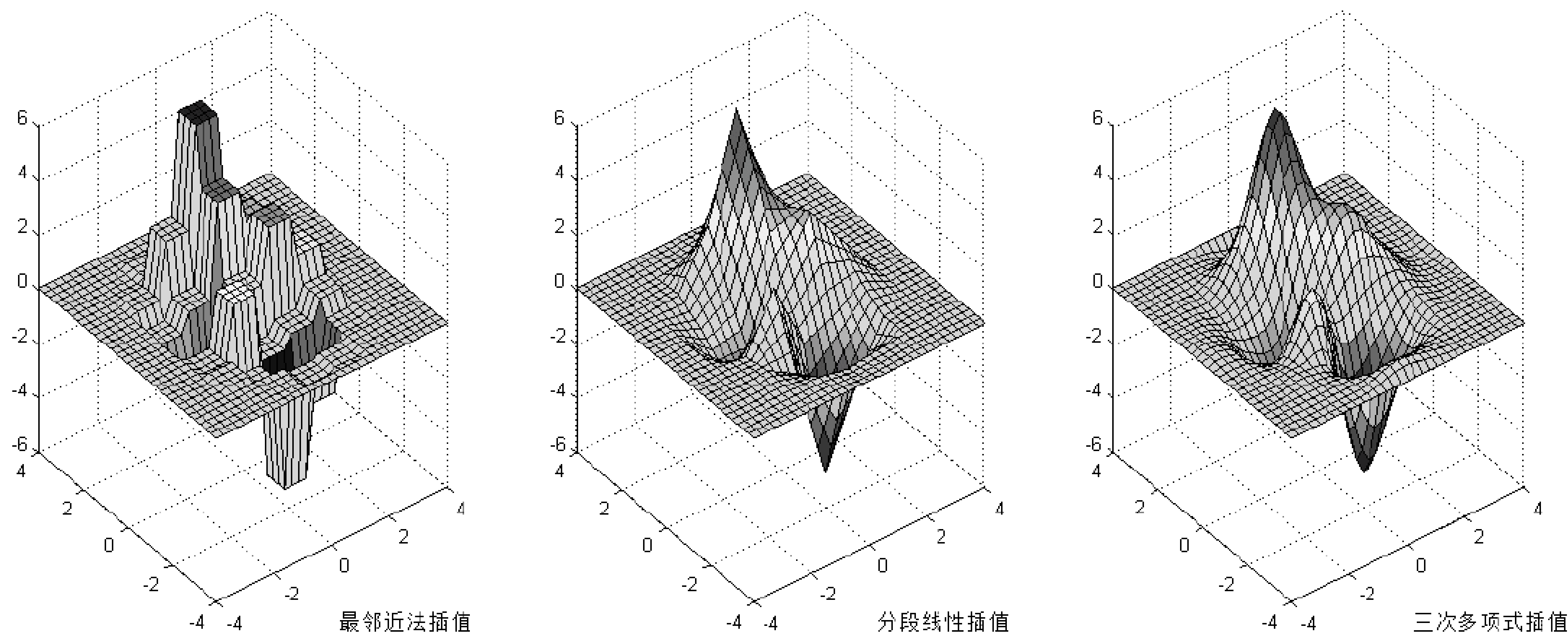


图 1-17　3D 图形插值结果图

1.11　MATLAB 工具箱函数查询

MATLAB 提供了曲线拟合工具箱、偏微分方程工具箱、统计工具箱和最优化工具箱等，用户可根据 Help 功能自行查询使用，在此列出一些常用的 MATLAB 函数供用户掌握。

1.11.1　特征值和奇异值函数表

特征值和奇异值函数表的功能，如表 1-4 所示。

表 1-4　特征值和奇异值函数表

函　数	功　能	函　数	功　能
balance	改善特征值精度的对角变换	poly	特征多项式
cdf2rdf	复对角块变为实对角块	polyeig	多项式特征值问题
condeig	已知特征值求条件数	qz	广义特征值的 QZ 分解
eig	特征值和特征向量	rsf2csf	实对角块变为复对角块
eigs	特征值	schur	Schur 分解
gsvd	广义奇异值分解	svd	奇异值分解
hess	Hessenberg 型	svds	稀疏矩阵的奇异值和向量

1.11.2　数据拟合函数表

数据拟合函数表的功能，如表 1-5 所示。

表 1-5　数据拟合函数表

函　数	功　能	函　数	功　能
cfit	创建一个曲线拟合对象	fitoptions	创建或修改一个拟合属性对象
fit	用库中已有的模型（光滑样条模型或内插模型）或自定义模型来拟合数据点	fittype	创建一个曲线拟合类型（或函数）对象

1.11.3　数据预处理函数表

数据预处理函数表的功能，如表 1-6 所示。

表 1-6　数据预处理函数表

函　数	功　能
excludedata	指定拟合数据中要剔除的数据
smooth	对原始数据进行平滑处理

1.11.4　偏微分方程求解算法函数表

偏微分方程求解算法函数表的功能，如表 1-7 所示。

表 1-7　偏微分方程求解算法函数表

函　　数	功　　能	函　　数	功　　能
adaptmesh	生成自适应网格并求解 PDE 问题	parabolic	求解抛物线型 PDE 问题
assema	组合面积的整体贡献	pdeeig	求解特征值 PDE 问题

1.11.5　绘图函数表

绘图函数表的功能，如表 1-8 所示。

表 1-8　绘图函数表

函　　数	功　　能	函　　数	功　　能
pdecont	绘等值线图	pdeplot	一般 PDE 工具箱绘图函数
pdegplot	绘制 PDE 几何图	pdesurf	绘三维表面图
pdemesh	绘 PDE 三角形网格		

1.11.6　参数估计函数表

参数估计函数表的功能，如表 1-9 所示。

表 1-9　参数估计函数表

函 数 名	功　　能	函 数 名	功　　能
betafit	β分布的参数估计	normlike	正态对数似然函数的参数估计
betalike	β对数似然函数的参数估计	normfit	正态分布的参数估计
binofit	二项分布的参数估计	poissfit	泊松分布的参数估计
expfit	指数分布的参数估计	unifit	均匀分布的参数估计
gamfit	伽玛分布的参数估计	weibfit	威布尔分布的参数估计
gamlike	伽玛似然函数的参数估计	weiblike	威布尔对数似然函数的参数估计
mle	极大似然估计的参数估计		

1.11.7　概率密度函数表

概率密度函数表的功能，如表 1-10 所示。

表 1-10　概率密度函数表

函 数 名	功　　能	函 数 名	功　　能
betapdf	β分布的概率密度函数	nbinpdf	负二项分布的概率密度函数
binopdf	二项分布的概率密度函数	ncfpdf	非中心 *f* 分布的概率密度函数
chi2pdf	χ2 分布的概率密度函数	nctpdf	非中心 *t* 分布的概率密度函数
exppdf	指数分布的概率密度函数	ncx2pdf	非中心χ2 分布的概率密度函数
fpdf	*f* 分布的概率密度函数	poisspdf	泊松分布的概率密度函数
gampdf	伽玛分布的概率密度函数	raylpdf	瑞利分布的概率密度函数
geopdf	几何分布的概率密度函数	tpdf	学生氏 *t* 分布的概率密度函数
hygepdf	超几何分布的概率密度函数	unidpdf	离散均匀分布的概率密度函数

续表

函数名	功　　能	函数名	功　　能
normpdf	正态（高斯）分布的概率密度函数	unifpdf	连续均匀分布的概率密度函数
lognpdf	对数正态分布的概率密度函数	weibpdf	威布尔分布的概率密度函数

1.11.8　随机数生成器函数表

随机数生成器函数表的功能，如表 1-11 所示。

表 1-11　随机数生成器函数表

函　　数	功　　能	函　　数	功　　能
betarnd	β分布的随机数生成器	ncfrnd	非中心 *f* 分布的随机数生成器
binornd	二项分布的随机数生成器	nctrnd	非中心 *t* 分布的随机数生成器
chi2rnd	χ2 分布的随机数生成器	ncx2rnd	非中心χ2 分布的随机数生成器
exprnd	指数分布的随机数生成器	normrnd	正态（高斯）分布的随机数生成器
frnd	*f* 分布的随机数生成器	poissrnd	泊松分布的随机数生成器
gamrnd	伽玛分布的随机数生成器	raylrnd	瑞利分布的随机数生成器
geornd	几何分布的随机数生成器	trnd	学生氏 *t* 分布的随机数生成器
hygernd	超几何分布的随机数生成器	unidrnd	离散均匀分布的随机数生成器
lognrnd	对数正态分布的随机数生成器	unifrnd	连续均匀分布的随机数生成器
nbinrnd	负二项分布的随机数生成器	weibrnd	威布尔分布的随机数生成器

1.11.9　统计图形函数表

统计图形函数表的功能，如表 1-12 所示。

表 1-12　统计图形函数表

函　　数	功　　能	函　　数	功　　能
boxplot	箱形图	normplot	正态概率图
cdfplot	指数累加分布函数图	pareto	帕累托图
errorbar	误差条图	qqplot	Q-Q 图
fsurfht	函数的交互等值线图	rcoplot	残差个案次序图
gline	画线	refcurve	参考多项式曲线
gname	交互标注图中的点	refline	参考线
gplotmatrix	散点图矩阵	surfht	数据网格的交互等值线图
gscatter	由第三个变量分组的两个变量的散点图	weibplot	威布尔图
lsline	在散点图中添加最小二乘拟合线		

1.11.10　非线性回归函数表

非线性回归函数表的功能，如表 1-13 所示。

表 1-13　非线性回归函数表

函　　数	功　　能	函　　数	功　　能
nlinfit	非线性最小二乘数据拟合（牛顿法）	treefit	拟合一个分类或回归的树状模型
nlintool	非线性模型拟合的交互式图形工具	treeprune	通过处理树状模型产生子树
nlparci	参数的置信区间	treedisp	用图形显示分类或回归的树状模型
nlpredci	预测值的置信区间	treetest	计算树的误差率
lsqnonneg	非负最小方差 (in MATLAB)	treeval	计算适用于数据的决策树的拟合值

1.11.11　聚类分析函数表

聚类分析函数表的功能，如表 1-14 所示。

表 1-14　聚类分析函数表

函　　数	功　　能	函　　数	功　　能
cluster	根据 linkage 函数的输出创建聚类	kmeans	K-均值 聚类
clusterdata	根据给定数据创建聚类	linkage	系统聚类信息
cophenet	Cophenet 相关系数	pdist	观测量之间的配对距离
dendrogram	创建冰柱图	silhouette	聚类数据的轮廓图
inconsistent	聚类树的不连续值	squareform	距离平方矩阵

1.11.12　降维方法函数表

降维方法函数表的功能，如表 1-15 所示。

表 1-15　降维方法函数表

函　　数	功　　能	函　　数	功　　能
factoran	最大似然一般因子分析	pcares	源于主成分的方差
pcacov	源于协方差矩阵的主成分	princomp	根据原始数据进行主成分分析

1.11.13　假设检验函数表

假设检验函数表的功能，如表 1-16 所示。

表 1-16　假设检验函数表

函　　数	功　　能	函　　数	功　　能
ranksum	秩和检验	ttest	单样本 t 检验
signrank	符号秩检验	ttest2	双样本 t 检验
signtest	符号检验	ztest	z 检验

1.11.14　分布检验函数表

分布检验函数表的功能，如表 1-17 所示。

表 1-17　分布检验函数表

函　　数	功　　能	函　　数	功　　能
jbtest	正态性的 Jarque-Bera 检验	kstest2	双样本 Kolmogorov-Smirnov 检验
kstest	单样本 Kolmogorov-Smirnov 检验	lillietest	正态性的 Lilliefors 检验

1.11.15　隐马尔可夫模型函数表

隐马尔可夫模型函数表的功能，如表 1-18 所示。

表 1-18　隐马尔可夫模型函数表

函　　数	功　　能	函　　数	功　　能
hmmdecode	计算序列状态的后验概率	hmmtrain	计算隐马尔可夫模型的最大似然估计
hmmestimate	估计隐马尔可夫模型的参数	hmmviterbi	计算马尔可夫模型序列到达最可能状态的路径
hmmgenerate	为隐马尔可夫模型产生一个序列		

1.11.16　最小化函数表

最小化函数表的功能，如表 1-19 所示。

表 1-19　最小化函数表

函　　数	功　　能	函　　数	功　　能
fgoalattain	求解多目标达到问题	fminunc	无约束非线性最小化
fminbnd	有边界的标量非线性最小化	fseminf	半无限约束多变量非线性问题最小化
fmincon	有约束的非线性最小化	linprog	线性规划
fminimax	求解最大最小约束问题	quadprog	二次规划
ktrlink	使用第三方库 KNITRO®求解多变量非线性问题最小化	fminsearch	使用无导数方法求解无约束多变量问题最小化
bintprog	求解 0-1 整数规划问题		

1.11.17　方程求解函数表

方程求解函数表的功能，如表 1-20 所示。

表 1-20　方程求解函数表

函　　数	功　　能
\	线性方程求解
fsolve	非线性方程求解
fzero	标量非线性方程求解

1.11.18　最小二乘函数表

最小二乘函数表的功能，如表 1-21 所示。

表 1-21　最小二乘函数表

函　　数	功　　能	函　　数	功　　能
\	线性最小二乘	lsqnonlin	非线性最小二乘
lsqlin	有约束线性最小二乘	lsqnonneg	非负线性最小二乘
lsqcurvefit	非线性曲线拟合		

第 2 章　LINGO 基础知识

LINGO（Linear Interactive and General Optimizer）是一款交互式的线性和通用优化求解器。它是一套设计用来帮助用户快速、方便、有效地构建和求解线性、非线性及整数最优化模型的功能全面的工具。包括功能强大的建模语言，建立和编辑问题的全功能环境，读取、写入 Excel 和数据库的功能，以及一系列完全内置的求解程序。LINGO 特色在于内置建模语言，提供十几个内部函数，可以允许决策变量是整数（即整数规划，包括 0～1 整数规划），方便灵活，而且执行速度非常快，能方便地与 Excel 等其他软件交换数据。

学习目标：

（1）零起步学习 LINGO 基础知识，学习和掌握 LINGO 基本功能；

（2）学习 LINGO 软件的使用技巧；

（3）学习 LINGO 简单编程；

（4）学习和掌握 LINGO 软件求解实际问题的注意事项。

2.1　LINGO 窗口介绍

在 Windows 操作系统下，开始运行 LINGO 软件时，弹出如图 2-1 所示的窗口。

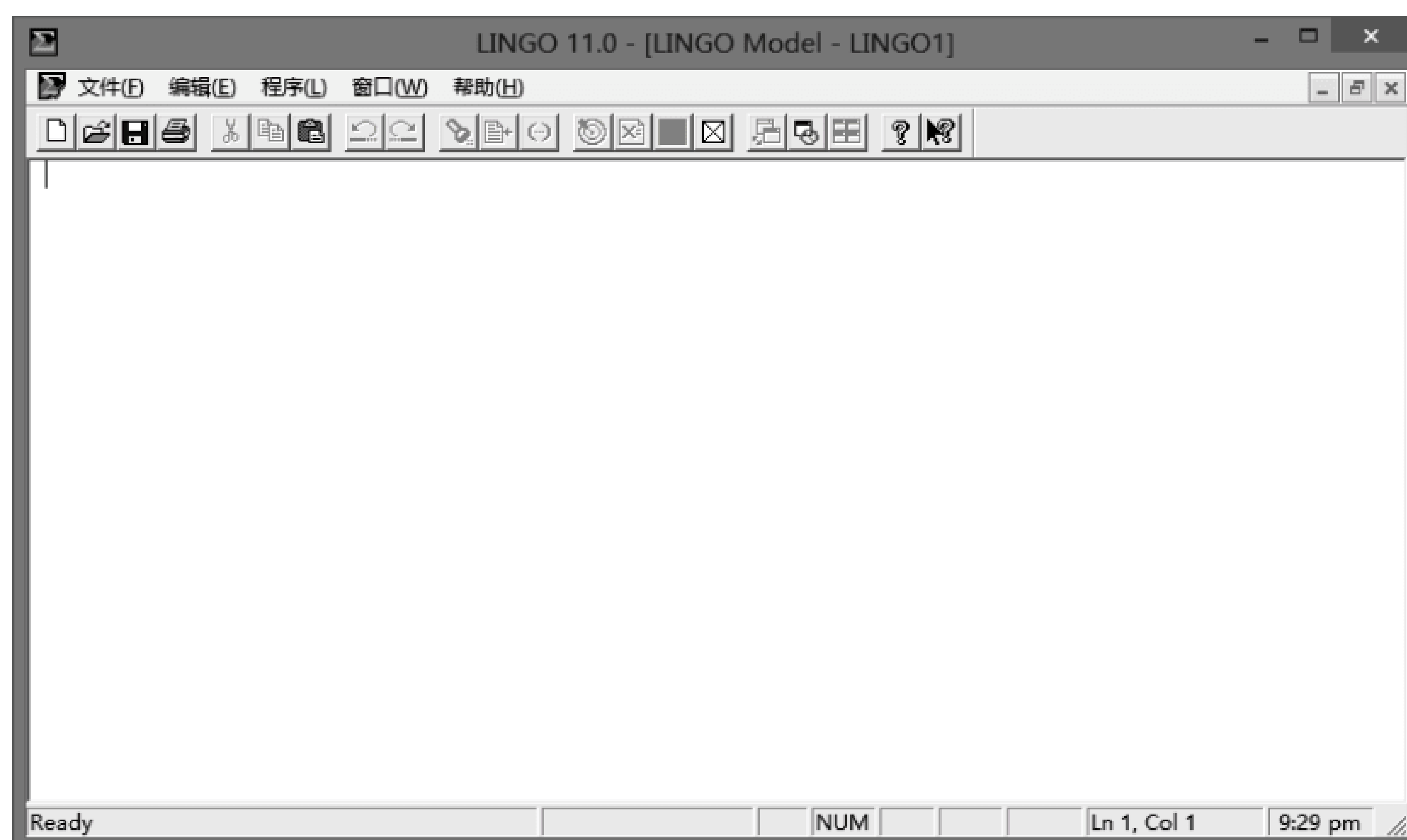


图 2-1　LINGO 11.0 窗口

LINGO 界面外层是主框架窗口，包含了所有菜单命令和工具条，其他所有的窗口将被包含在主窗口之下。在主窗口内的标题为 LINGO 11.0 – [LINGO Model – LINGO1]，该文件默认标题为 LINGO1，在该窗口下，建立的模型代码都要在该窗口内编码实现。

2.1.1　LINGO 文件菜单（File Menu）

LINGO 文件菜单（File Menu）如图 2-2 所示。

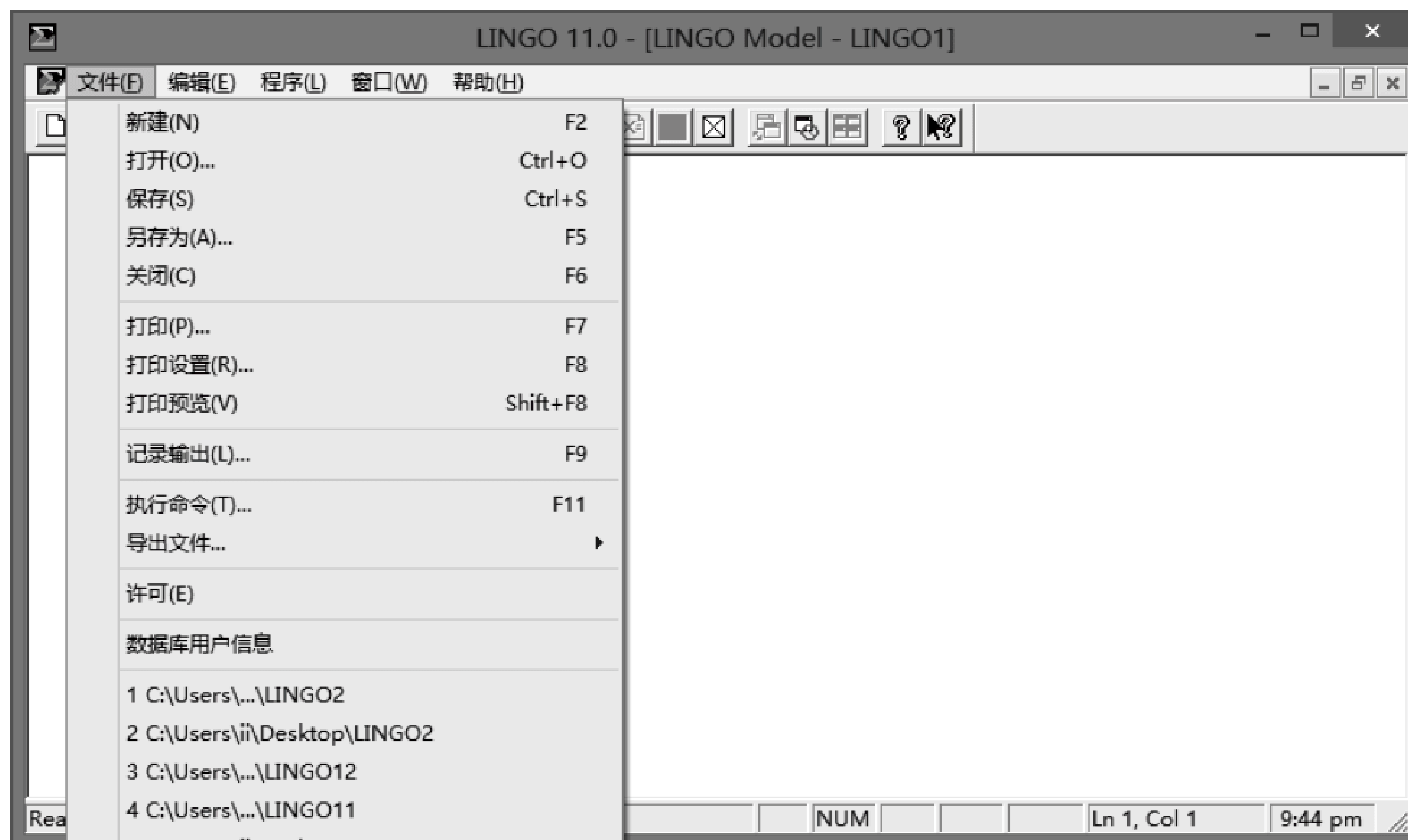


图 2-2　文件菜单

（1）新建（New）

从文件菜单中选择“新建”命令：单击“新建”按钮或直接按 F2 键可以创建一个新的“Model”窗口。在这个新的“Model”窗口中能输入所要求解的模型。

（2）打开（Open）

从文件菜单中选择“打开”命令：单击“打开”按钮或直接按 F3 键可以打开一个已经存在的文本文件。这个文件可能是一个 Model 文件。

（3）保存（Save）

从文件菜单中选择“保存”命令：单击“保存”按钮或直接按 F4 键用来保存当前活动窗口（最前台的窗口）中的模型结果、命令序列等，其保存类型为文件。

（4）另存为（Save As）

从文件菜单中选择“另存为”命令或按 F5 键可以将当前活动窗口中的内容保存为文本文件，其文件名为你在“另存为”对话框中输入的文件名。利用这种方法你可以将任何窗口的内容如模型、求解结果或命令保存为文本文件。

（5）关闭（Close）

在文件菜单中选择“关闭”（Close）命令或按 F6 键将关闭当前活动窗口。如果这个窗口是新建窗口或已经改变了当前文件的内容，LINGO 系统将会提示是否想要保存改变后的内容。

（6）打印（Print）

在文件菜单中选择“打印”（Print）命令：单击“打印”按钮或直接按 F7 键可以将当前活动窗口中的内容发送到打印机。

（7）打印设置（Print Setup）

在文件菜单中选择“打印设置”命令或直接按 F8 键可以将文件输出到指定的打印机。

（8）打印预览（Print Preview）

在文件菜单中选择“打印预览”命令或直接按 Shift+F8 键可以进行打印预览。

（9）输出到日志文件（Log Output）

从文件菜单中选择“Log Output”命令或按 F9 键打开一个对话框，用于生成一个日志文件，它存储接下来在“命令窗口”中输入的所有命令。

（10）提交 LINGO 命令脚本文件（Take Commands）

从文件菜单中选择“Take Commands”命令或直接按 F11 键就可以将 LINGO 命令脚本（command script）文件提交给系统进程来运行。

（11）引入 LINGO 文件（Import Lingo File）

从文件菜单中选择“Import Lingo File”命令或直接按 F12 键可以打开一个 LINGO 格式模型的文件，然后 LINGO 系统会尽可能把模型转化为 LINGO 语法允许的程序。

（12）退出（Exit）

从文件菜单中选用“Exit”命令或直接按 F10 键可以退出 LINGO 系统。

2.1.2　LINGO 编辑菜单（Edit Menu）

LINGO 编辑菜单（Edit Menu）如图 2-3 所示。



图 2-3　编辑菜单

（1）撤销（Undo）

从编辑菜单中选择“撤销”（Undo）命令或按 Ctrl + Z 组合键，将撤销上次操作、恢复至其前的状态。

（2）剪切（Cut）

从编辑菜单中选择“剪切”（Cut）命令或按 Ctrl + X 组合键，可以将当前选中的内容

剪切至剪贴板中。

（3）复制（Copy）

从编辑菜单中选择“复制”（Copy）命令：单击“复制”按钮或按 Ctrl + C 组合键可以将当前选中的内容复制到剪贴板中。

（4）粘贴（Paste）

从编辑菜单中选择“粘贴”（Paste）命令：单击“粘贴”按钮或按 Ctrl + V 组合键可以将粘贴板中的当前内容复制到当前插入点的位置。

（5）粘贴特定（Paste Special）

与上面的命令不同，它可以用于剪贴板中的内容不是文本的情形。

（6）全选（Select All）

从编辑菜单中选择“Select All”命令或按 Ctrl + A 组合键，可选定当前窗口中的所有内容。

（7）匹配小括号（Match Parenthesis）

从编辑菜单中选择“Match Parenthesis”命令：单击“Match Parenthesis”按钮或按 Ctrl + P 组合键，可以为当前选中的开括号查找匹配的闭括号。

（8）粘贴函数（Paste Function）

从编辑菜单中选择“Paste Function”命令，可以将 LINGO 的内部函数粘贴到当前插入点。

2.1.3　LINGO 模型求解菜单

LINGO 模型求解菜单如图 2-4 所示。

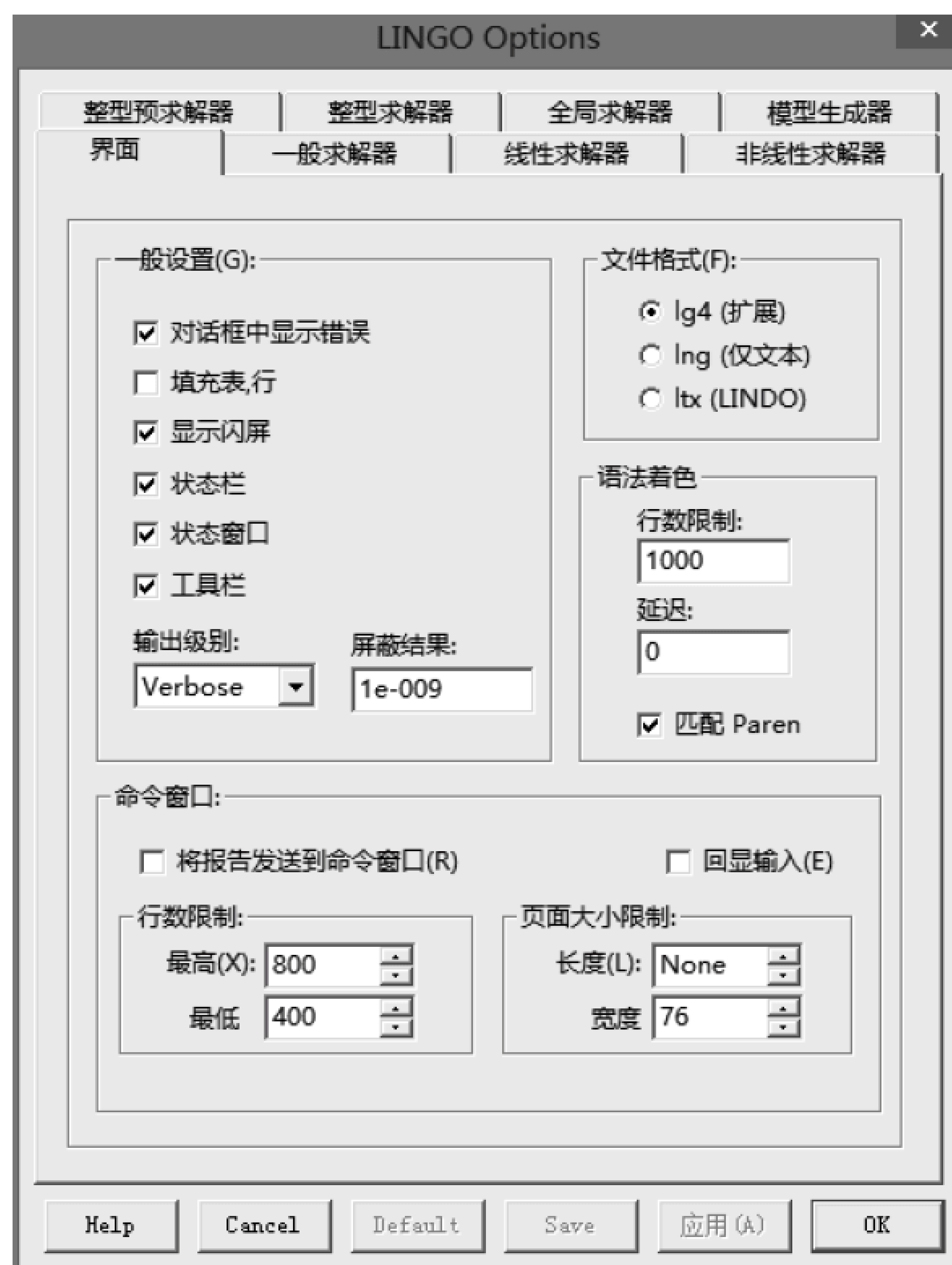


图 2-4　LINGO 模型求解菜单

（1）求解模型（Solve）

从 LINGO 菜单中选择“求解”命令：单击“Solve”按钮或按 Ctrl+S 组合键可以将当前模型送入内存求解。

（2）求解结果（Solution）

从 LINGO 菜单中选择“Solution. . . ”命令：单击“Solution. . . ”按钮或直接按 Ctrl+O 组合键可以打开求解结果的对话框。这里可以指定查看当前内存中求解结果的那些内容。

（3）查看（Look）

从 LINGO 菜单中选择“Look”命令或直接按 Ctrl + L 组合键，可以查看全部的或选中的模型文本内容。

（4）灵敏性分析（Range）

用该命令产生当前模型的灵敏性分析报告：研究当目标函数的费用系数和约束右端项在什么范围（此时假定其他系数不变）时，最优基保持不变。灵敏性分析是在求解模型时作出的，因此在求解模型时灵敏性分析是激活状态，但是默认是不激活的。为了激活灵敏性分析，单击 LINGO |Options 选项，选择 General Solver Tab 命令，在 Dual Computations 列表框中，单击 Prices and Ranges 选项。灵敏性分析耗费相当多的求解时间，因此当速度很关键时，就没有必要激活它。

2.1.4　窗口菜单（Windows Menu）

（1）命令行窗口（Open Command Window）

从窗口菜单中选择“Open Command Window”命令或直接按 Ctrl+1 可以打开 LINGO 的命令行窗口。在命令行窗口中可以获得命令行界面，在“:”提示符后可以输入 LINGO 的命令行命令。

（2）状态窗口（Status Window）

从窗口菜单中选择“Status Window”命令或直接按 Ctrl+2 可以打开 LINGO 的求解状态窗口。

如果在编译期间没有表达错误，那么 LINGO 将调用适当的求解器来求解模型。当求解器开始运行时，它就会显示如下的求解器状态窗口（LINGO Solver Status），如图 2-5 所示。

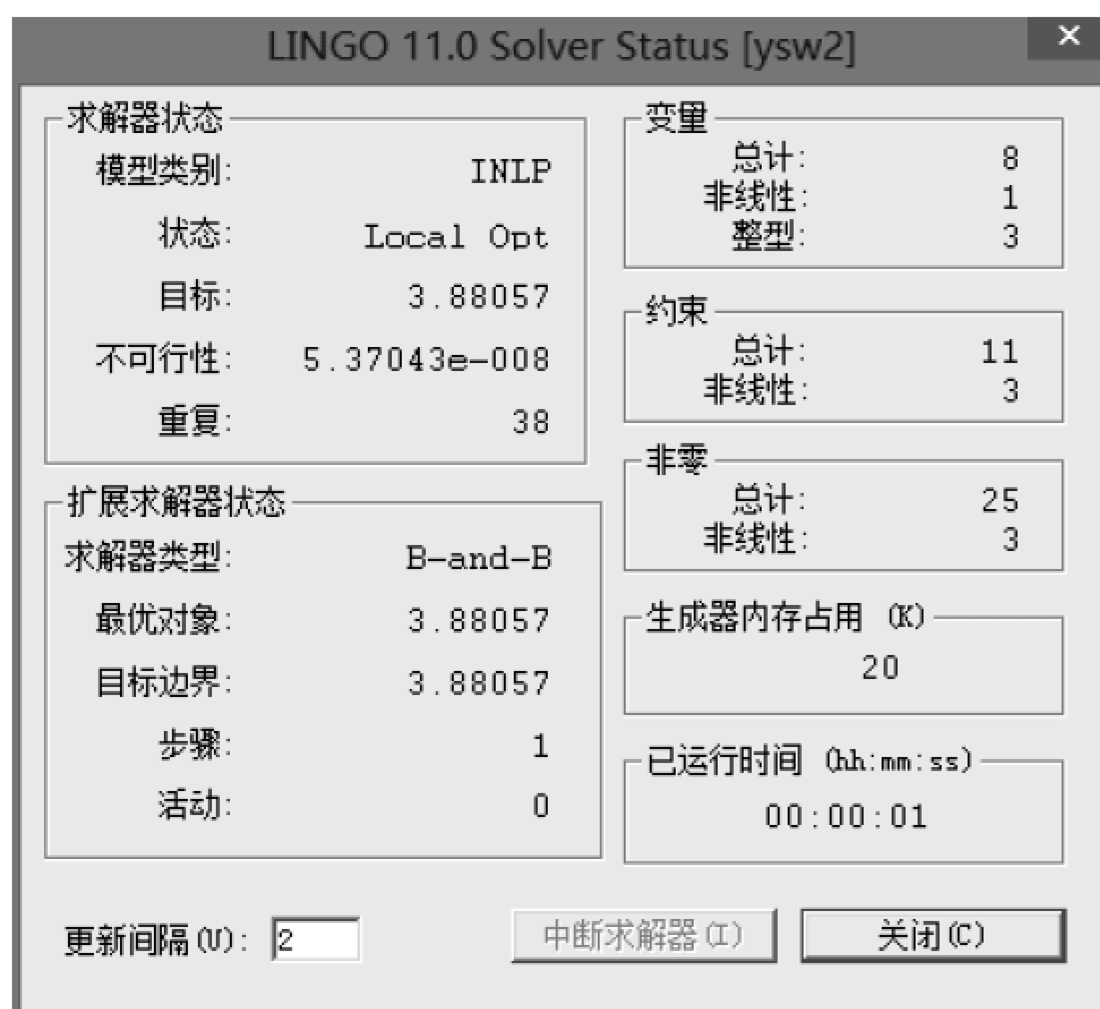


图 2-5　LINGO 求解器状态

求解器状态窗口对于监视求解器的进展和模型大小是有用的。求解器状态窗口提供了一个中断求解器按钮（Interrupt Solver），单击它会导致 LINGO 在下一次迭代时停止求解。在绝大多数情况下，LINGO 是能够交还和报告到目前为止的最好解。一个例外是线性规划模型，返回的解是无意义的，应该被忽略。但这并不是一个问题，因为线性规划通常求解速度很快，很少需要中断。

注意：在中断求解器后，必须小心解释当前解，因为这些解不是最优解、可能也不是可行解或者对线性规划模型来说就是无价值的。

在中断求解器按钮的右边是关闭按钮（Close）。单击它可以关闭求解器状态窗口，不过可在任何时间通过选择 Windows|Status Window 命令再重新打开。

在中断求解器按钮的右边是标记为更新时间间隔（Update Interval）的域。LINGO 将根据该域指示的时间（以秒为单位）为周期更新求解器状态窗口。可以随意设置该域，不过若设置为 0 将导致更长的求解时间——LINGO 花费在更新的时间会超过求解模型的时间。

（3）变量框（Variables）

Total 显示当前模型的全部变量数，Nonlinear 显示其中的非线性变量数，Integers 显示其中的整数变量数。非线性变量是指它至少处于某一个约束中的非线性关系中。

（4）约束（Constraints）框

Total 显示当前模型扩展后的全部约束数，Nonlinear 显示其中的非线性约束数。非线性约束是该约束中至少有一个非线性变量。如果一个约束中的所有变量都是定值，那么该约束就被剔除出模型（该约束为真），不计入约束总数中。

（5）非零（Nonzeroes）框

Total 显示当前模型中全部非零系数的数目，Nonlinear 显示其中的非线性变量系数的数目。

（6）已运行时间（Elapsed Runtime）框

显示求解模型到目前所用的时间，它可能受到系统中其他应用程序的影响。

（7）求解器状态（Solver Status）框

显示当前模型求解器的运行状态。域的含义如表 2-1 所示。

表 2-1　当前模型求解器的运行状态

域　　名	含　　义	可能的显示
Model Class	当前模型的类型	LP、QP、ILP、IQP、PILP、PIQP、NLP、INLP、PINLP（以 I 开头表示 IP，以 PI 开头表示 PIP）
State	当前解的状态	“Global Optimum”、“Local Optimum”、“Feasible”、“Infeasible”（不可行）、“Unbounded”（无界）、“Interrupted”（中断）、“Undetermined”（未确定）
Objective	当前解的目标函数值	实数
Infeasibility	当前约束不满足的总量（不是不满足的约束的个数）	实数（即使该值=0，当前解也可能不可行，因为这个量中没有考虑用上下界形式给出的约束）
Iterations	目前为止的迭代次数	非负整数

（8）扩展求解器状态（Extended Solver Status）框

显示 LINGO 中几个特殊求解器的运行状态。包括分支定界求解器（Branch-and-Bound Solver）、全局求解器（Global Solver）和多初始点求解器（Multistart Solver）。该框中的域仅当这些求解器运行时才会更新。

2.1.5　LINGO 的命令行命令

LINGO 输入与 C、Fortran 语言相似，按照表达式具体形式进行编程，每一个等于一条代码。当用于需要了解和查询具体的 LINGO 代码信息时，可通过命令窗口进行查询，具体的命令行信息如下。

（1）LINGO 信息

- ❑ Cat：显示所有命令类型；
- ❑ Com：按类型显示所用 LINGO 命令；
- ❑ Help：显示所需命令的简要帮助信息；
- ❑ Mem：显示内存变量的信息。

（2）输入（Input）

- ❑ Model：以命令行方式输入一个模型；
- ❑ Take：执行一个文件的命令正本或从磁盘中读取某个模型文件。

（3）显示（Display）

- ❑ Look：显示当前模型的内容；
- ❑ Genl：产生 LINGO 兼容的模型；
- ❑ Gen：生成并显示整个模型；
- ❑ Hide：为模型设置密码保护；
- ❑ Pause：暂停屏幕输出直至再次使用此命令。

（4）文件输出（File Ouput）

- ❑ Div：将模型结果输出到文件；
- ❑ Svrt：将模型结果输出到屏幕；
- ❑ Save：将当前模型保存到文件；
- ❑ Smps：将当前模型保存为 MPS 文件。

（5）求解模型（Solution）

- ❑ Go：求解当前模型；
- ❑ Solu：显示当前模型的求解结果。

（6）编辑模型（Problem Editing）

- ❑ Del：从当前模型中删除指定的某一行或某两行之间（包括这两行）的所有行；
- ❑ ext：在当前模型中添加几行；
- ❑ alt：用新字符串替换掉某一行中、或某两行之间的所有行中的旧字符串。

（7）退出系统（Quit）

Quit：退出 LINGO 系统。

（8）系统参数（System Parameters）

- ❑ Page：以“行”为单位设置每页长度；

- Ter：以简略方式输出结果；
- Ver：以详细方式输出结果；
- Wid：以“字符”为单位设置显示和输出宽度；
- Set：重新设置默认参数；
- Freeze：保存当前参数设置，以备下一次重新启动 LINGO 系统时还是这样的设置；
- Time：显示本次系统的运行时间。

其中，对于 SET 指令，凡是用户能够控制的 LINGO 系统参数，SET 命令都能够对它进行设置。SET 命令的使用格式为：

```
SET parameter_name | parameter_index [ parameter_value ]
```

其中，parameter_name 是参数名，parameter_index 是参数索引（编号），parameter _value 是参数值。当不写出参数值时，则 SET 命令的功能是显示该参数当前的值。LINGO 具体的参数设置如表 2-2 所示。

表 2-2　LINGO求解模型的参数设置

索引	参数名	缺省值	简 要 说 明
1	ILFTOL	0.3e-5	初始线性可行误差限
2	FLFTOL	0.1e-6	最终线性可行误差限
3	INFTOL	0.1e-2	初始非线性可行误差限
4	FNFTOL	0.1e-5	最终非线性可行误差限
5	RELINT	0.8e-5	相对整型误差限
6	NOPTOL	0.2e-6	非线性规划（NLP）的最优性误差限
7	ITRSLW	5	缓慢改进的迭代次数的上限
8	DERCMP	0	导数（0：数值导数，1：解析导数）
9	ITRLTM	0	迭代次数上限（0：无限制）
10	TIMLIM	0	求解时间的上限（秒）（0：无限制）
11	OBJCTS	1	是否采用目标割平面法（1：是，0：否）
12	MXMEMB	32	模型生成器的内存上限（兆字节）（对某些机器，可能无意义）
13	CUTAPP	2	割平面法的应用范围（0：根节点，1：所有节点，2：LINGO 自动决定）
14	ABSINT	0.1e-6	整型绝对误差限
15	HEURIS	3	整数规划（IP）启发式求解次数（0：无，可设定为 0～100）
16	HURDLE	none	整数规划（IP）的“篱笆”值（none：无，可设定为任意实数值）
17	IPTOLA	0.8e-7	整数规划（IP）的绝对最优性误差限
18	IPTOLR	0.5e-7	整数规划（IP）的相对最优性误差限
19	TIM2RL	100	采用 IPTOLR 作为判断标准之前，程序必须求解的时间（秒）
20	NODESL	0	分支节点的选择策略（0：LINGO 自动选择；1：深度优先；2：最坏界的节点优先；3：最好界的节点优先）
21	LENPAG	0	终端的页长限制（0：没有限制；可设定任意非负整数）
22	LINLEN	76	终端的行宽限制（0：没有限制；可设定为 64-200）
23	TERSEO	0	输出级别（0：详细型，1：简洁型）
24	STAWIN	1	是否显示状态窗口（1：是；0：否，Windows 系统才能使用）
25	SPLASH	1	弹出版本和版权信息（1：是，0：否，Windows 系统才能使用）
26	OROUTE	0	将输出定向到命令窗口（1：是，0：否，Windows 系统才能使用）
27	WNLINE	800	命令窗口的最大显示行数（Windows 系统才能使用）
28	WNTRIM	400	每次从命令窗口滚动删除的最小行数（Windows 系统才能使用）

续表

索引	参数名	缺省值	简 要 说 明
29	STABAR	1	显示状态栏（1：是，0：否，Windows 系统才能使用）
30	FILFMT	1	文件格式（0：lng 格式，1：lg4 格式，Windows 系统才能使用）
31	TOOLBR	1	显示工具栏（1：是，0：否，Windows 系统才能使用）
32	CHKDUP	0	检查数据与模型中变量是否重名（1：是，0：否）
33	ECHOIN	0	脚本命令反馈到命令窗口（1：是，0：否）
34	ERRDLG	1	错误信息以对话框显示（1：是，0：否，Windows 系统才能使用）
35	USEPNM	0	允许无限制地使用基本集合的成员名（1：是，0：否）
36	NSTEEP	0	在非线性求解程序中使用最陡边策略选择变量（1：是，0：否）
37	NCRASH	0	在非线性求解程序中使用启发式方法生成初始解（1：是，0：否）
38	NSLPDR	1	在非线性求解程序中用 SLP 法寻找搜索方向（1：是，0：否）
39	SELCON	0	在非线性求解程序中有选择地检查约束（1：是，0：否）
40	PRBLVL	0	对混合整数线性规划（MILP）模型，采用探测（Probing）技术的级别（0：LINGO 自动决定；1：无；2-7：探测级别逐步升高）
41	SOLVEL	0	线性求解程序（0：LINGO 自动选择，1：原始单纯形法，2：对偶单纯形法，3：障碍法（即内点法））
42	REDUCE	2	模型降维（2：LINGO 决定，1：是，0：否）
43	SCALEM	1	变换模型中的数据的尺度（1：是，0：否）
44	PRIMPR	0	原始单纯形法决定出基变量的策略（0：LINGO 自动决定，1：对部分出基变量尝试，2：用最陡边法对所有变量进行尝试）
45	DUALPR	0	对偶单纯形法决定出基变量的策略（0：LINGO 自动决定，1：按最大下降比例法确定，2：用最陡边法对所有变量进行尝试）
46	DUALCO	1	指定对偶计算的级别（0：不计算任何对偶信息；1：计算对偶价格；2：计算对偶价格并分析敏感性）
47	RCMPSN	0	Use RC format names for MPS I/O（1：是，0：否）
48	MREGEN	1	重新生成模型的频率（0：当模型的文本修改后；1：当模型的文本修改或模型含有外部引用时；2：每当有需要时）
49	BRANDR	0	分支时对变量取整的优先方向（0：LINGO 自动决定；1：向上取整优先；2：向下取整优先）
50	BRANPR	0	分支时变量的优先级（0：LINGO 自动决定；1：二进制（0-1）变量）
51	CUTOFF	0.1e-8	解的截断误差限
52	STRONG	10	指定强分支的层次级别
53	REOPTB	0	IP 热启动时的 LP 算法（0：LINGO 自动选择；1：障碍法（即内点法）；2：原始单纯形法；3：对偶单纯形法）
54	REOPTX	0	IP 冷启动时的 LP 算法（选项同上）
55	MAXCTP	200	分支中根节点增加割平面时，最大迭代检查的次数
56	RCTLIM	0.75	割（平面）的个数相对于原问题的约束个数的上限（比值）
57	GUBCTS	1	是否使用广义上界（GUB）割（1：是，0：否）
58	FLWCTS	1	是否使用流（Flow）割（1：是，0：否）
59	LFTCTS	1	是否使用 Lift 割（1：是，0：否）
60	PLOCTS	1	是否使用选址问题的割（1：是，0：否）
61	DISCTS	1	是否使用分解割（1：是，0：否）
62	KNPCTS	1	是否使用背包覆盖割（1：是，0：否）
63	LATCTS	1	是否使用格（Lattice）割（1：是，0：否）
64	GOMCTS	1	是否使用 Gomory 割（1：是，0：否）
65	COFCTS	1	是否使用系数归约割 （1：是，0：否）

续表

索引	参数名	缺省值	简 要 说 明
66	GCDCTS	1	是否使用最大公因子割（1：是，0：否）
67	SCLRLM	1000	语法配色的最大行数（仅 Windows 系统使用）
68	SCLRDL	0	语法配色的延时（秒）（仅 Windows 系统使用）
69	PRNCLR	1	括号匹配配色（1：是，0：否，仅 Windows 系统使用）
70	MULTIS	0	NLP 多点求解的次数（0：无，可设为任意非负整数）
71	USEQPR	0	是否识别二次规划（1：是，0：否）
72	GLOBAL	0	是否对 NLP 采用全局最优求解程序（1：是，0：否）
73	LNRISE	0	线性化级别（0：LINGO 自动决定，1：无，2：低，3：高）
74	LNBIGM	100,000	线性化的大 M 系数
75	LNDLTA	0.1e-5	线性化的 Delta 误差系数
76	BASCTS	0	是否使用基本（Basis）割（1：是，0：否）
77	MAXCTR	2	分支中非根节点增加割平面时，最大迭代检查的次数
78	HUMNTM	0	分支中每个节点使用启发式搜索的最小时间（秒）
79	DECOMP	0	是否使用矩阵分解技术（1：是，0：否）
80	GLBOPT	0.1e-5	全局最优求解程序的最优性误差限
81	GLBDLT	0.1e-6	全局最优求解程序在凸化过程中增加的约束的误差限
82	GLBVBD	0.1e+11	全局最优求解程序中变量的上界
83	GLBUBD	2	全局最优求解程序中变量的上界的应用范围（0：所有变量都不使用上界；1：所有变量都使用上界；2：部分使用）
84	GLBBRN	5	全局最优求解程序中第 1 次对变量分支时使用的分支策略（0：绝对宽度；1：局部宽度；2：全局宽度；3：全局距离；4：绝对冲突；5：相对冲突）
85	GLBBXS	1	全局最优求解程序选择活跃分支节点的方法（0：深度优先；1：具有最坏界的分支优先）
86	GLBREF	3	全局最优求解程序中模型重整的级别：（0：不进行重整；1：低；2：中；3：高）

2.2　LINGO 中的集

对实际问题建模的时候，总会遇到一群或多群相联系的对象，比如工厂、消费者群体、交通工具和雇工等。LINGO 允许把这些相联系的对象聚合成集（sets）。一旦把对象聚合成集，就可以利用集来最大限度地发挥 LINGO 建模语言的优势。

2.2.1　模型的集部分

集部分是 LINGO 模型的一个可选部分。在 LINGO 模型中使用集之前，必须在集部分事先定义。集部分如下：

```
sets:
……
endsets
```

一个模型可以没有集部分，或有一个简单的集部分，或有多个集部分。一个集部分可

以放置于模型的任何地方，但是一个集及其属性在模型约束中被引用之前必须定义了它们。

2.2.2　定义原始集

为了定义一个原始集，必须详细声明：

- ❑ 集的名字；
- ❑ 可选，集的成员；
- ❑ 可选，集成员的属性；

定义一个原始集，LINGO 语法如下：

```
setname[/member_list/][:attribute_list ];
```

🔔注意：用“[]”表示该部分内容可选。

setname 是用户选择来标记集的名字，最好具有较强的可读性，一般用物体英文名称。

集名字必须严格符合标准命名规则：以拉丁字母或下划线（_）为首字符，其后由拉丁字母（A～Z）、下划线、阿拉伯数字（0，1，…，9）组成的总长度不超过 32 个字符的字符串，且不区分大小写。

🔔注意：该命名规则同样适用于集成员名和属性名等的命名。

member_list 是集成员列表，最好具有较强的可读性，一般用物体英文名称。

如果集成员放在集定义中，那么对它们可采取显式罗列和隐式罗列两种方式。如果集成员不放在集定义中，那么可以在随后的数据部分定义它们。

1）当显式罗列成员时，必须为每个成员输入一个不同的名字，中间用空格或逗号隔开，允许混合使用。

【例 2.1】定义一个名为 students 的原始集，它具有成员 John、Jill、Rose 和 Mike，属性有 sex 和 age。具体的 LINGO 定义如下：

```
sets:
  students/John Jill Rose Mike/: sex, age;  !成员;
endsets
```

LINGO 代码如下：

```
SETS:
  S1: X;
  S2( S1, S1): Y;
ENDSETS
DATA:
  S1,X = M1,1  M2,2  M3,3;
  S2,Y = M1,M2,4  M3,M1,5;
ENDDATA
```

运行程序输出结果如下：

```
Feasible solution found.
Total solver iterations:                    0

                              Variable           Value
                                X( M1)        1.000000
```

```
                    X( M2)       2.000000
                    X( M3)       3.000000
                Y( M1, M2)        4.000000
                Y( M3, M1)        5.000000
```

2）当隐式罗列成员时，不必罗列出每个集成员。

LINGO 语法如下：

```
setname/member1..memberN/[: attribute_list];
```

其中，member1 是集的第一个成员名，memberN 是集的最末一个成员名。LINGO 将自动产生中间的所有成员名。LINGO 也接受一些特定的首成员名和末成员名，用于创建一些特殊的集。具体的隐式成员列表格式如表 2-3 所示。

表 2-3　一些特殊的集

隐式成员列表格式	示　例	所产生集成员
1..n	1..5	1,2,3,4,5
StringM..StringN	Car2..car14	Car2,Car3,Car4,…,Car14
DayM..DayN	Mon..Fri	Mon, Tue, Wed, Thu, Fri
MonthM..MonthN	Oct..Jan	Oct, Nov, Dec, Jan
MonthYearM..MonthYearN	Oct2001..Jan2002	Oct2001,Nov2001,Dec2001,Jan2002

LINGO 代码如下：

```
MODEL:
SETS:
  NUMBERS /1..5/: VALUE, RECIPROCAL;   !变量的维数
ENDSETS
DATA:
  VALUE = 3 4 2 7 10; !变量赋值
ENDDATA
  @FOR( NUMBERS( I):RECIPROCAL( I) = 1 / VALUE( I));
END
```

运行程序输出结果如下：

```
Feasible solution found.
Total solver iterations:                 0

                          Variable           Value
                         VALUE( 1)        3.000000
                         VALUE( 2)        4.000000
                         VALUE( 3)        2.000000
                         VALUE( 4)        7.000000
                         VALUE( 5)        10.00000
                    RECIPROCAL( 1)        0.3333333
                    RECIPROCAL( 2)        0.2500000
                    RECIPROCAL( 3)        0.5000000
                    RECIPROCAL( 4)        0.1428571
                    RECIPROCAL( 5)        0.1000000

                               Row    Slack or Surplus
                                1        0.000000
                                2        0.000000
                                3        0.000000
                                4        0.000000
                                5        0.000000
```

2.3　LINGO 基本运算符

基本运算符包括算术运算符、逻辑运算符和关系运算符。

2.3.1　算术运算符

算术运算符是针对数值进行操作的。LINGO 提供了 5 种二元运算符：

- ❑ “ ^ ”：乘方；
- ❑ “ * ”：乘；
- ❑ “ / ”：除；
- ❑ “ + ”：加；
- ❑ “ - ”：减。

LINGO 唯一的一元算术运算符是取反函数“ - ”。

运算符的运算次序基本符合基本数学计算顺序。

【例 2.2】 算术运算符示例。

```
2 - 5 / 3
(2 + 4) / 5
```

2.3.2　逻辑运算符

在 LINGO 11.0 中，逻辑运算符主要用于集循环函数的条件表达式中，来控制在函数中哪些集成员被包含，哪些被排斥。在创建稀疏集时用在成员资格过滤器中。

LINGO 具有 9 种逻辑运算符，如下所示。

1）#not#：否定该操作数的逻辑值，＃not＃是一个一元运算符；

2）#eq#：若两个运算数相等，则为 true；否则为 false；

3）#ne#：若两个运算符不相等，则为 true；否则为 false；

4）#gt#：若左边的运算符严格大于右边的运算符，则为 true；否则为 false；

5）#ge#：若左边的运算符大于或等于右边的运算符，则为 true；否则为 false；

6）#lt#：若左边的运算符严格小于右边的运算符，则为 true；否则为 false；

7）#le#：若左边的运算符小于或等于右边的运算符，则为 true；否则为 false；

8）#and#：仅当两个参数都为 true 时，结果为 true；否则为 false；

9）#or#：仅当两个参数都为 false 时，结果为 false；否则为 true。

【例 2.3】 逻辑运算符示例。

```
2 #gt# 3 #and# 4 #gt# 2
```

其结果为假（0）。

2.3.3　关系运算符

在 LINGO 中，关系运算符主要是被用在模型中，来指定一个表达式的左边是否等于、小于等于或者大于等于右边，形成模型的一个约束条件。关系运算符与逻辑运算符#eq#、#le#和#ge#截然不同，前者是模型中该关系运算符所指定关系的为真描述；而后者仅仅判断一个该关系是否被满足：满足为真，不满足为假。

LINGO 有三种关系运算符：“=”、“<=”和“>=”。

LINGO 中还能用“<”表示小于等于关系，“>”表示大于等于关系。

LINGO 并不支持严格小于和严格大于关系运算符。然而，如果需要严格小于和严格大于关系，比如让 A 严格小于 B，那么可以把它变成如下的小于等于表达式：

$$A+\varepsilon<=B$$

这里 ε 是一个小的正数，它的值依赖于具体工程问题背景。

2.4　数 学 函 数

LINGO 提供了大量的标准数学函数，如下所示。

（1）@abs(x)：返回 x 的绝对值；

（2）@sin(x)：返回 x 的正弦值，x 采用弧度制；

（3）@cos(x)：返回 x 的余弦值；

（4）@tan(x)：返回 x 的正切值；

（5）@exp(x)：返回常数 e 的 x 次方；

（6）@log(x)：返回 x 的自然对数；

（7）@lgm(x)：返回 x 的 gamma 函数的自然对数；

（8）@sign(x)：如果 $x<0$ 返回-1，否则返回 1；

（9）@floor(x)：返回 x 的整数部分。当 $x>=0$ 时，返回不超过 x 的最大整数；当 $x<0$ 时，返回不低于 x 的最大整数；

（10）@smax（x1，x2,…，xn)：返回 x1，x2，…，xn 中的最大值；

（11）@smin(x1，x2,…，xn)：返回 x1，x2，…，xn 中的最小值。

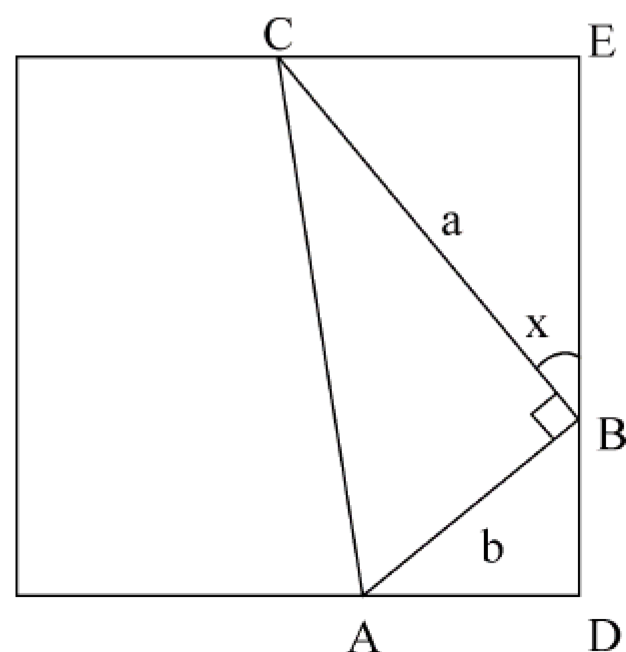


图 2-6　直角三角形

【例 2.4】给定一个直角三角形，如图 2-6 所示，求包含该三角形的最小正方形。

如图 2-6 所示，该图形满足以下条件：

$$\begin{cases} CE = a\sin x \\ AD = b\cos x \\ DE = a\cos x + b\sin x \end{cases}$$

求最小的正方形就相当于求如下的最优化问题：

$$\min_{0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}} \max\{CE, AD, DE\}$$

设定 $a=3,b=4$，LINGO 代码如下：

```
model:
sets:
  object/1..3/: f;
endsets
data:
  a, b = 3, 4; !两个直角边长，修改很方便
enddata
  f(1) = a * @sin(x);   !CE
  f(2) = b * @cos(x);  !AD
  f(3) = a * @cos(x) + b * @sin(x);  !DE
  min = @smax(f(1),f(2),f(3));  !目标函数
  @bnd(0,x,1.57);    !x 取值范围
end
```

运行程序输出结果如下：

```
Linearization components added:
     Constraints:          7
     Variables:            4
     Integers:             3

  Local optimal solution found.
  Objective value:                          3.880570
  Objective bound:                          3.880570
  Infeasibilities:                          0.5370432E-07
  Extended solver steps:                           1
  Total solver iterations:                        38

                  Variable           Value        Reduced Cost
                         A        3.000000            0.000000
                         B        4.000000            0.000000
                         X       0.2449787            0.000000
                     F( 1)       0.7276069            0.000000
                     F( 2)        3.880570            0.000000
                     F( 3)        3.880570            0.000000

                       Row    Slack or Surplus      Dual Price
                         1      -0.9764816E-08        0.000000
                         2      -0.5370432E-07      -0.7647059
                         3      -0.5329799E-07      -0.2352941
                         4        3.880570           -1.000000
```

由结果可知，目标值等于 3.88057，$x=0.2449787$，$CE=f_1=0.7276069$，$AD=f_2=3.88057$，$DE=f_3=3.88057$。

2.5 金融函数

LINGO 里面主要提供了如下两个金融函数。

（1）@fpa(I,n)

返回如下情形的净现值：单位时段利率为 I，连续 n 个时段支付，每个时段支付单位

费用。若每个时段支付 x 单位的费用，则净现值可用 x 乘以@fpa(I,n)算得。

@fpa 的计算公式为：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+I)^{k}}=\frac{1-(1+I)^{-n}}{I}$$

净现值就是在一定时期内为了获得一定收益在该时期初所支付的实际费用。

【例 2.5】贷款金额 50000 元，贷款年利率 5.31%，采取分期付款方式（每年年末还固定金额，直至还清）。问拟贷款 10 年，每年需偿还多少元？

LINGO 代码如下：

```
model:
50000 = x * @fpa(.0531,10);
End
```

运行程序输出结果如下：

```
Feasible solution found.
Total solver iterations:                              0

                                   Variable           Value
                                          X        6573.069

                                        Row    Slack or Surplus
                                          1        0.000000
```

（2）@fpl(I,n)

返回如下情形的净现值：单位时段利率为 I，第 n 个时段支付单位费用。

@fpl(I,n)的计算公式如下：

$$(1+I)^{-n}$$

@fpa(I,n)与@fpl(I,n)的关系如下：

$$@\text{fpa}(I,n)=\sum_{k=1}^{n}@\text{fpl}(I,k)$$

LINGO 代码如下：

```
model:
50000 = x * @fpl(.0531,10);
End
```

运行程序输出结果如下：

```
Feasible solution found.
Total solver iterations:                                     0

                                   Variable           Value
                                          X        83881.49

                                        Row    Slack or Surplus
                                          1        0.000000
```

2.6　概 率 函 数

（1）@pbn(p, n, x)

二项分布的累积分布函数。当 n 和（或）x 不是整数时，用线性插值法进行计算。

（2）@pcx(n, x)

自由度为 n 的 x^2 分布的累积分布函数。

（3）@peb(a, x)

当到达负荷为 a，服务系统有 x 个服务器且允许无穷排队时的 Erlang 繁忙概率。

（4）@pel(a, x)

当到达负荷为 a，服务系统有 x 个服务器且不允许排队时的 Erlang 繁忙概率。

（5）@pfd(n, d, x)

自由度为 n 和 d 的 F 分布的累积分布函数。

（6）@pfs(a, x, c)

当负荷上限为 a，顾客数为 c，平行服务器数量为 x 时，有限源的 Poisson 服务系统的等待或返修顾客数的期望值。a 是顾客数乘以平均服务时间，再除以平均返修时间。当 c 和（或）x 不是整数时，采用线性插值进行计算。

（7）@phg(pop, g, n, x)

超几何（Hypergeometric）分布的累积分布函数。pop 表示产品总数，g 是正品数。从所有产品中任意取出 n（$n \leqslant pop$）件。Pop、g、n 和 x 都可以是非整数，这时采用线性插值进行计算。

（8）@ppl(a, x)

Poisson 分布的线性损失函数，即返回 max(0,z-x)的期望值，其中随机变量 z 服从均值为 a 的 Poisson 分布。

（9）@pps(a, x)

均值为 a 的 Poisson 分布的累积分布函数。当 x 不是整数时，采用线性插值进行计算。

（10）@psl(x)

单位正态线性损失函数，即返回 max(0,z-x)的期望值，其中随机变量 z 服从标准正态分布。

（11）@psn(x)

标准正态分布的累积分布函数。

（12）@ptd(n, x)

自由度为 n 的 t 分布的累积分布函数。

（13）@qrand($seed$)

产生服从(0,1)区间的拟随机数。@qrand 只允许在模型的数据部分使用，它将用拟随机数填满集属性。通常，声明一个 $m \times n$ 的二维表，m 表示运行实验的次数，n 表示每次实验所需的随机数个数。在行内，随机数是独立分布的；在行间，随机数是非常均匀的。这些随机数是用“分层取样”的方法产生的。

概率函数使用格式如下面的 LINGO 代码：

```
model:
sets:
  object/1..5/: x,y;  !x,y 变量维数指定
endsets

min = @sum(object:y);   !目标
@for(object(i):@bnd(0,x(i),100));  !目标约束
@for(object(i):y=@psn(x(i)));
End
```

运行程序输出结果如下：

```
Local optimal solution found.
  Objective value:                              4.500000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             9

                       Variable           Value        Reduced Cost
                          X( 1)        0.000000           0.3989423
                          X( 2)        12.37137            0.000000
                          X( 3)        13.30009            0.000000
                          X( 4)        13.32478            0.000000
                          X( 5)        17.86556            0.000000
                          Y( 1)       0.5000000            0.000000
                          Y( 2)        1.000000            0.000000
                          Y( 3)        1.000000            0.000000
                          Y( 4)        1.000000            0.000000
                          Y( 5)        1.000000            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        4.500000           -1.000000
                              2        0.000000           -1.000000
                              3        0.000000           -1.000000
                              4        0.000000           -1.000000
                              5        0.000000           -1.000000
                              6        0.000000           -1.000000
```

2.7　变量界定函数

变量界定函数实现对变量取值范围的附加限制，共 4 种。

- @bin(x)：限制 x 为 0 或 1；
- @bnd(L,x,U)：限制 $L \leqslant x \leqslant U$；
- @free(x)：取消对变量 x 的默认下界为 0 的限制，即 x 可以取任意实数；
- @gin(x)：限制 x 为整数。

在默认情况下，LINGO 规定变量是非负的，也就是说下界为 0，上界为+∞。@free 取消了默认下界为 0 的限制，使变量也可以取负值。@bnd 用于设定一个变量的上下界,它也可以取消默认下界为 0 的约束。

LINGO 代码如下：

```
model:
min = x+2;
```

```
y = x;
@bin(x);   !x 为 0-1 变量
End
```

运行程序输出结果如下：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          2.000000
Objective bound:                          2.000000
Infeasibilities:                          0.000000
Extended solver steps:                           0
Total solver iterations:                         0

                  Variable           Value        Reduced Cost
                        X         0.000000          1.000000
                        Y         0.000000          0.000000

                      Row    Slack or Surplus      Dual Price
                        1         2.000000         -1.000000
                        2         0.000000          0.000000
```

由于@bin(x)：限制 x 为 0 或 1；因此 $x=0$，具有最小值，此时 $y=x=0$ 。

2.8　集操作函数

LINGO 提供了几个函数帮助处理集。

（1）@in(set_name,primitive_index_1 [,primitive_index_2,…])

如果元素在指定集中，返回 1；否则返回 0。

【例 2.6】 全集为 I，B 是 I 的一个子集，C 是 B 的补集。

```
sets:
  I/x1..x4/;
  B(I)/x2/;
  C(I)|#not#@in(B,&1):;    ! @in 函数使用
endsets
```

（2）@index([set_name,] primitive_set_element)

该函数返回在集 set_name 中原始集成员 primitive_set_element 的索引。如果 set_name 被忽略，那么 LINGO 将返回与 primitive_set_element 匹配的第一个原始集成员的索引。如果找不到，则产生一个错误。

【例 2.7】 @index 索引的使用，LINGO 代码如下：

```
SETS:
  S1 / A B C/:;  ! 变量角标设置
  S2 / X Y Z/:;  ! 变量角标设置
  S3( S1, S2) / A,X A,Z B,Y C,X/:;
ENDSETS
  y = @INDEX( S1, B);
  z = @INDEX( S2, Y);
  X = @IN( S3, @INDEX( S1, B), @INDEX( S2, Y));
```

运行程序输出结果如下：

```
Feasible solution found.
Total solver iterations:                    0

                             Variable           Value
                                    Y        2.000000
                                    Z        2.000000
                                    X        1.000000

                                  Row    Slack or Surplus
                                    1        0.000000
                                    2        0.000000
                                    3        0.000000
```

由结果可看出，对于@INDEX，*y* 和 *z* 索引相应字母所在的位置；对于@IN，如果元素在指定集中，返回 1；否则返回 0。

2.9　集循环函数

集循环函数遍历整个集进行操作。其 LINGO 语法为：

```
@function(setname[(set index list)[|conditional qualifier]]:expression
list);
```

@function 为函数；setname 是要遍历的集；set_index_list 是集索引列表。

conditional_qualifier 是用来限制集循环函数的范围，当集循环函数遍历集的每个成员时，LINGO 都要对 conditional_qualifier 进行评价，若结果为真，则对该成员执行@function 操作，否则跳过，继续执行下一次循环。

expression_list 是被应用到每个集成员的表达式列表，当用的是@for 函数时，expression_list 可以包含多个表达式，其间用逗号隔开。这些表达式将被作为约束加到模型中。当使用其余的三个集循环函数时，expression_list 只能有一个表达式。如果省略 set_index_list，那么在 expression_list 中引用的所有属性的类型都是 setname 集。

（1）@for

该函数用来产生对集成员的约束。基于建模语言的标量需要显式输入每个约束，不过@for 函数允许只输入一个约束，然后 LINGO 自动产生每个集成员的约束。

（2）@text 函数

该函数被用在数据部分，用来把解输出至文本文件中。它可以输出集成员和集属性值。其语法为：

```
@text(['filename'])
```

这里 filename 是文件名，可以采用相对路径和绝对路径两种表示方式。如果忽略 filename，那么数据就被输出到标准输出设备（大多数情形都是屏幕）。@text 函数仅能出现在模型数据部分的一条语句的左边，右边是集名（用来输出该集的所有成员名）或集属性名（用来输出该集属性的值）。

（3）@ole 函数

@ole 是从 EXCEL 中引入或输出数据的接口函数，它是基于传输的 OLE 技术。OLE 传输直接在内存中传输数据，并不借助于中间文件。当使用@ole 时，LINGO 先装载 EXCEL，

再通知 EXCEL 装载指定的电子数据表，最后从电子数据表中获得 Ranges。为了使用 OLE 函数，必须有 EXCEL 5 及其以上版本。OLE 函数可在数据部分和初始部分引入数据。

LINGO 语法如下：

```
@OLE( '\XLS\DEVELOP.XLS') = BUILD, SQ_FEET;
```

将 BUILD、SQ_FEET 输出到相应的\XLS\DEVELOP.XLS 中。

@ole 只能读一维或二维的 Ranges（在单个的 EXCEL 工作表(sheet)中），但不能读间断的或三维的 Ranges。Ranges 是自左而右、自上而下来读的。

（4）@dual

@dual(variable_or_row_name)返回变量的判别数（检验数）或约束行的对偶（影子）价格（dual prices）。

影子价格（dual prices）在程序中以结果影子价格出现，LINGO 程序如下：

```
MODEL:
MAX = 15 * DEM_C1 + 17 * DEM_C2 + 22 * DEM_C3 + 12 * DEM_C4+ 30 * SUP_WH1
+ 25 * SUP_WH2 + 21 * SUP_WH3;

[ VOLUME_WH1_C1]  DEM_C1 +  SUP_WH1  <= 6;  !约束条件
[ VOLUME_WH1_C2]  DEM_C2 +  SUP_WH1  <= 2;
[ VOLUME_WH1_C3]  DEM_C3 +  SUP_WH1  <= 6;
[ VOLUME_WH1_C4]  DEM_C4 +  SUP_WH1  <= 7;
[ VOLUME_WH2_C1]  DEM_C1 +  SUP_WH2  <= 4;
[ VOLUME_WH2_C2]  DEM_C2 +  SUP_WH2  <= 9;
[ VOLUME_WH2_C3]  DEM_C3 +  SUP_WH2  <= 5;
[ VOLUME_WH2_C4]  DEM_C4 +  SUP_WH2  <= 3;
[ VOLUME_WH3_C1]  DEM_C1 +  SUP_WH3  <= 8;
[ VOLUME_WH3_C2]  DEM_C2 +  SUP_WH3  <= 8;
[ VOLUME_WH3_C3]  DEM_C3 +  SUP_WH3  <= 1;
[ VOLUME_WH3_C4]  DEM_C4 +  SUP_WH3  <= 5;
@BND( -0.1E+31, SUP_WH1, 0);  !取值范围
@BND( -0.1E+31, SUP_WH2, 0);  !取值范围
@BND( -0.1E+31, SUP_WH3, 0);  !取值范围
END
```

运行程序输出结果如下：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          161.0000
Infeasibilities:                          0.000000
Total solver iterations:                         9

                  Variable           Value        Reduced Cost
                    DEM_C1        6.000000            0.000000
                    DEM_C2        2.000000            0.000000
                    DEM_C3        6.000000            0.000000
                    DEM_C4        5.000000            0.000000
                   SUP_WH1        0.000000           -10.00000
                   SUP_WH2       -2.000000            0.000000
                   SUP_WH3       -5.000000            0.000000

                       Row    Slack or Surplus      Dual Price
                         1        161.0000          1.000000
             VOLUME_WH1_C1        0.000000            2.000000
```

```
                VOLUME_WH1_C2        0.000000         17.00000
                VOLUME_WH1_C3        0.000000         1.000000
                VOLUME_WH1_C4        2.000000         0.000000
                VOLUME_WH2_C1        0.000000         13.00000
                VOLUME_WH2_C2        9.000000         0.000000
                VOLUME_WH2_C3        1.000000         0.000000
                VOLUME_WH2_C4        0.000000         12.00000
                VOLUME_WH3_C1        7.000000         0.000000
                VOLUME_WH3_C2        11.00000         0.000000
                VOLUME_WH3_C3        0.000000         21.00000
                VOLUME_WH3_C4        5.000000         0.000000
```

从结果中可知 Dual Price 值的大小，每一个影响值表示该变量增大可能出现的结果变得更优的情况。Dual Price 为正，表示增大的趋势，为负，表示减小的趋势。

2.10　辅 助 函 数

（1）@if(logical_condition,true_result,false_result)

@if 函数将评价一个逻辑表达式 logical_condition，如果为真，返回 true_ result，否则返回 false_result。

【例 2.8】求解最优化问题：

$$
\begin{aligned}
&\min \quad f(x)+g(y)\\
&s.t.\\
&\quad f(x)=\begin{cases}100+2x, & x>0\\ 2x, & x\leqslant 0\end{cases}\\
&\quad g(y)=\begin{cases}60+3y, & y>0\\ 2y, & y\leqslant 0\end{cases}\\
&\quad x+y\geqslant 30\\
&\quad x,y\geqslant 0
\end{aligned}
$$

其 LINGO 代码如下：

```
model:
  min=fx+fy;                          !目标设置
  fx=@if(x #gt# 0, 100,0)+2*x;        !判断变量
  fy=@if(y #gt# 0,60,0)+3*y;          !判断变量
  x+y>=30;
end
```

运行程序输出结果如下：

```
Linearization components added:
   Constraints:          30
   Variables:            16
   Integers:             12

Global optimal solution found.
Objective value:                              150.0000
```

```
Objective bound:                            150.0000
Infeasibilities:                            0.000000
Extended solver steps:                             0
Total solver iterations:                           4


                   Variable           Value        Reduced Cost
                         FX        0.000000            0.000000
                         FY        150.0000            0.000000
                          X        0.000000            0.000000
                          Y        30.00000            0.000000

                        Row    Slack or Surplus      Dual Price
                          1        150.0000           -1.000000
                          2        0.000000           -1.000000
                          3        0.000000           -1.000000
                          4        0.000000           -3.000000
```

（2）@warn('text',logical_condition)

如果逻辑条件 logical_condition 为真，则产生一个内容为'text'的信息框。

其 LINGO 代码如下：

```
model:
  x=1;
  @warn('x 是正数',x #gt# 0);
end
```

运行程序输出结果如图 2-7 所示。



图 2-7　LINGO 警告窗口

2.11　LINGO 求解器设置

LINGO 求解器是解决一切问题的关键，有时候 LINGO 求解问题耗时很长，通过设置 LINGO 参数即可解决，因此 LINGO 在实际问题中起着举足轻重的作用。求解器参数的设置，关乎求解精度及求解的结果正确与否。LINGO 求解器主要包括整型预求解器、整型求解器、全局求解器、模型生成器、一般求解器、线性求解器、非线性求解器及界面参数设置，通常使用较多的是系统默认参数设置，然而实际问题中常常对解的精度和解的速度有一定的要求，则需要对 LINGO 求解器设置。具体的 LINGO 求解器如图 2-8 所示。

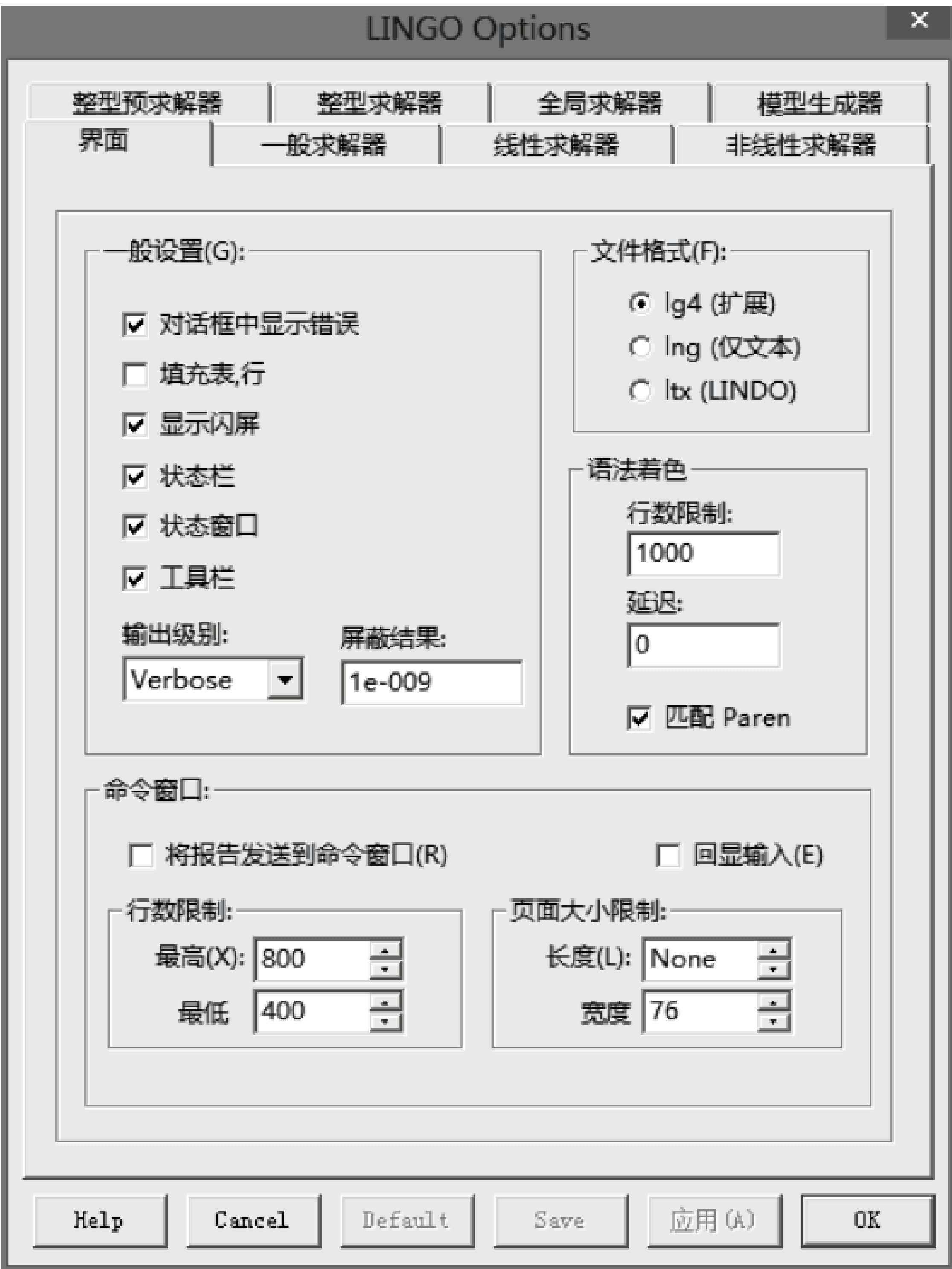


图 2-8　LINGO 求解器

用户修改完参数以后，如果单击 Apply（应用）按钮，则新的设置马上生效；如果单击 OK（确定）按钮，则新的设置马上生效，并且同时关闭该窗口。如果单击 Save（保存）按钮，则将当前设置变为默认设置，下次启动 LINGO 时这些设置仍然有效。单击 Default（缺省值）按钮，则恢复 LINGO 系统定义的原始默认设置（缺省设置）。

下面对 LINGO 求解器下的整型预求解器、整型求解器、全局求解器、模型生成器、一般求解器、线性求解器、非线性求解器及界面参数设置进行参数信息的说明。

2.11.1　Interface（界面）选项卡

表 2-4　Interface（界面）选项

选 项 组	选　　项	含　　义
General（一般选项）	Errors In Dialogs（错误对话框）	如果选择该选项，求解程序遇到错误时将打开一个对话框显示错误，你关闭该对话框后程序才会继续执行；否则，错误信息将在报告窗口显示，程序仍会继续执行
	Splash Screen（弹出屏幕）	如果选择该选项，则 LINGO 每次启动时会在屏幕上弹出一个对话框，显示 LINGO 的版本和版权信息；否则不弹出
	Status Bar（状态栏）	如果选择该选项，则 LINGO 系统在主窗口最下面一行显示状态栏；否则不显示
	Status Window（状态窗口）	如果选择该选项，则 LINGO 系统每次运行 LINGO|Solve 命令时会在屏幕上弹出状态窗口；否则不弹出
	Terse Output（简洁输出）	如果选择该选项，则 LINGO 系统对求解结果报告等将以简洁形式输出；否则以详细形式输出

续表

选 项 组	选　　项	含　　义
General （一般选项）	Toolbar （工具栏）	如果选择该选项，则显示工具栏；否则不显示
	Solution Cutoff （解的截断）	小于等于这个值的解将报告为“0”（缺省值是 10-9）
File Format （文件格式）	lg4（extended） （lg4，扩展格式）	模型文件的缺省保存格式是 lg4 格式（这是一种二进制文件，只有 LINGO 能读出）
	lng（text only） （lng，纯文本格式）	模型文件的缺省保存格式是 lng 格式（纯文本）
Syntax Coloring （语法配色）	Line limit （行数限制）	语法配色的行数限制（缺省为 1000）。LINGO 模型窗口中将 LINGO 关键词显示为蓝色，注释为绿色，其他为黑色，超过该行数限制后则不再区分颜色。特别地设置行数限制为 0 时，整个文件不再区分颜色
	Delay（延迟）	设置语法配色的延迟时间（秒，缺省为 0，从最后一次击键算起）
	Paren Match （括号匹配）	如果选择该选项，则模型中当前光标所在处的括号及其相匹配的括号将以红色显示；否则不使用该功能
Command Window （命令窗口）	Send Reports to Command Window （报告发送到命令窗口）	如果选择该选项，则输出信息会发送到命令窗口；否则不使用该功能
	Echo Input （输入信息反馈）	如果选择该选项，则用 File|Take Command 命令执行命令脚本文件时，处理信息会发送到命令窗口；否则不使用该功能
	Line Count Limits （行数限制）	命令窗口能显示的行数的最大值为 Maximum（缺省为 800）；如果要显示的内容超过这个值，每次从命令窗口滚动删除的最小行数为 Minimum（缺省为 400）
	Page Size Limit（页面大小限制）	命令窗口每次显示的行数的最大值为 Length（缺省为没有限制），显示这么多行后会暂停，等待用户响应；每行最大字符数为 Width（缺省为 74，可以设定为 64～200 之间），多余的字符将被截断

2.11.2　General Solver（通用求解器）选项卡

表 2-5　General Solver（通用求解器）选项

选　项　组	选　　项	含　　义
Generator Memory Limit （MB）矩阵生成器的内存限制（兆）		缺省值为 32M，矩阵生成器使用的内存超过该限制，LINGO 将报告"The model generator ran out of memory"
Runtime Limits 运行限制	Iterations 迭代次数	求解一个模型时，允许的最大迭代次数（缺省值为无限）
	Time (sec) 运行时间（秒）	求解一个模型时，允许的最大运行时间（缺省值为无限）
Dual Computations （对偶计算）		求解时控制对偶计算的级别，有三种可能的设置： • None：不计算任何对偶信息； • Prices：计算对偶价格（缺省设置）； • Prices and Ranges：计算对偶价格并分析敏感性

续表

选 项 组	选 项	含 义
Model Regeneration （模型的重新生成）		控制重新生成模型的频率，有三种可能的设置： • Only when text changes：只有当模型的文本修改后才再生成模型； • When text changes or with external references：当模型的文本修改或模型含有外部引用时（缺省设置）； • Always：每当有需要时
Linearization （线性化）	Degree （线性化程度）	决定求解模型时线性化的程度，有四种可能的设置： Solver Decides：若变量数小于等于 12 个，则尽可能全部线性化；否则不做任何线性化（缺省设置） • None：不做任何线性化 • Low：对函数@ABS()，@MAX()，@MIN()，@SMAX()，@SMIN()及二进制变量与连续变量的乘积项做线性化 •High：同上，此外对逻辑运算符#LE#, #EQ#, #GE#, #NE#做线性化
	Big M（线性化的大 M 系数）	设置线性化的大 M 系数（缺省值为 106）
	Delta（线性化的误差限）	设置线性化的误差限（缺省值为 10-6）
Allow Unrestricted Use of Primitive Set Member Names （允许无限制地使用基本集合的成员名）		选择该选项可以保持与 LINGO4.0 以前的版本兼容：即允许使用基本集合的成员名称直接作为该成员在该集合的索引值（LINGO 4.0 以后的版本要求使用@INDEX 函数）
Check for Duplicate Names in Data and Model（检查数据和模型中的名称是否重复使用）		选择该选项，LINGO 将检查数据和模型中的名称是否重复使用，如基本集合的成员名是否与决策变量名重复
Use R/C format names for MPS I/O （在 MPS 文件格式的输入输出中使用 R/C 格式的名称）		在 MPS 文件格式的输入输出中，将变量和行名转换为 R/C 格式

2.11.3　Linear Solver（线性求解器）选项卡

表 2-6　Linear Solver（线性求解器）选项

选 项 组	选 项	含 义
Method 求解方法		求解时的算法，有四种可能的设置： • Solver Decides：LINGO 自动选择算法（缺省设置） • Primal Simplex：原始单纯形法 • Dual Simplex：对偶单纯形法 • Barrier：障碍法（即内点法）
Initial Linear Feasibility Tol 初始线性可行性误差限		控制线性模型中约束满足的初始误差限（缺省值为 3*10-6）
Final Linear Feasibility Tol. 最后线性可行性误差限		控制线性模型中约束满足的最后误差限（缺省值为 10-7）
Model Reduction 模型降维		控制是否检查模型中的无关变量，从而降低模型的规模： • Off：不检查 • On：检查 • Solver Decides：LINGO 自动决定（缺省设置）

续表

选　项　组	选　　项	含　　义
Pricing Strategies 价格策略（决定出基变量的策略）	Primal Solver 原始单纯形法	有三种可能的设置： • Solver Decides：LINGO 自动决定（缺省设置） • Partial：LINGO 对一部分可能的出基变量进行尝试 • Devex：用 Steepest-Edge（最陡边）近似算法对所有可能的变量进行尝试，找到使目标值下降最多的出基变量
	Dual Solver 对偶单纯形法	有三种可能的设置： • Solver Decides：LINGO 自动决定（缺省设置） • Dantzig：按最大下降比例法确定出基变量 • Steepest-Edge：最陡边策略，对所有可能的变量进行尝试，找到使目标值下降最多的出基变量
Matrix Decomposition 矩阵分解		选择该选项，LINGO 将尝试将一个大模型分解为几个小模型求解；否则不尝试
Scale Model 模型尺度的改变		选择该选项，LINGO 检查模型中的数据是否平衡（数量级是否相差太大）并尝试改变尺度使模型平衡；否则不尝试

2.11.4　Nonlinear Solver（非线性求解器）选项卡

表 2-7　Nonlinear Solver（非线性求解器）选项

选　项　组	选　　项	含　　义
Initial Nonlinear Feasibility Tol.初始非线性可行性误差限		控制模型中约束满足的初始误差限（缺省值为 10-3）
Final Nonlinear Feasibility Tol.最后非线性可行性误差限		控制模型中约束满足的最后误差限（缺省值为 10-6）
Nonlinear Optimality Tol. 非线性规划的最优性误差限		当目标函数在当前解的梯度小于等于这个值以后，停止迭代（缺省值为 2*10-7）
Slow Progress Iteration Limit 缓慢改进的迭代次数的上限		当目标函数在连续这么多次迭代没有显著改进以后，停止迭代（缺省值为 5）
Derivatives 导数	Numerical 数值法	用有限差分法计算数值导数（缺省值）
	Analytical 解析法	用解析法计算导数（仅对只含有算术运算符的函数使用）
Strategies 策略	Crash Initial Solution 生成初始解	选择该选项，LINGO 将用启发式方法生成初始解；否则不生成（缺省值）
	Quadratic Recognition 识别二次规划	选择该选项，LINGO 将判别模型是否为二次规划，若是则采用二次规划算法（包含在线性规划的内点法中）；否则不判别（缺省值）
	Selective Constraint Eval 有选择地检查约束	选择该选项，LINGO 在每次迭代时只检查必须检查的约束（如果有些约束函数在某些区域没有定义，这样做会出现错误）；否则，检查所有约束（缺省值）
	SLP Directions SLP 方向	选择该选项，LINGO 在每次迭代时用 SLP（Successive LP，逐次线性规划）方法寻找搜索方向（缺省值）
	Steepest Edge 最陡边策略	选择该选项，LINGO 在每次迭代时将对所有可能的变量进行尝试，找到使目标值下降最多的变量进行迭代；缺省值为不使用最陡边策略

2.11.5　Integer Pre-Solver（整数预处理求解器）选项卡

表 2-8　Integer Pre-Solver（整数预处理求解器）选项

选　项　组	选　　项	含　　义
Heuristics 启发式方法	Level	控制采用启发式搜索的次数（缺省值为 3，可能的值为 0-100），启发式方法的目的是从分支节点的连续解出发，搜索一个好的整数解
	Min Seconds	每个分支节点使用启发式搜索的最小时间（秒）
Probing Level 探测水平（级别）		控制采用探测（Probing）技术的级别（探测能够用于混合整数线性规划模型，收紧变量的上下界和约束的右端项的值）。可能的取值为： • Solver Decides：LINGO 自动决定（缺省设置） • 1-7：探测级别逐步升高
Constraint Cuts 约束的割（平面）	Application 应用节点	控制在分支定界树中，哪些节点需要增加割（平面），可能的取值为： • Root Only：仅根节点增加割（平面） • All Nodes：所有节点均增加割（平面） • Solver Decides：LINGO 自动决定（缺省设置）
	Relative Limit 相对上限	控制生成的割（平面）的个数相对于原问题的约束个数的上限（比值），缺省值为 0.75
	Max Passes 最大迭代检查的次数	为了寻找合适的割，最大迭代检查的次数。有两个参数： • Root：对根节点的次数（缺省值为 200） • Tree：对其他节点的次数（缺省值为 2）
	Types 类型	控制生成的割（平面）的策略，共有 12 种策略可供选择。（如想了解细节，请参阅整数规划方面的专著）

2.11.6　Integer Solver（整数求解器）选项卡

整数预处理程序只用于整数线性规划模型（ILP 模型），对连续规划和非线性模型无效。

表 2-9　Integer Solver（整数求解器）选项

选　项　组	选　　项	含　　义
Branching 分支	Direction	控制分支策略中优先对变量取整的方向，有三种选择： • Both：LINGO 自动决定（缺省设置） • Up：向上取整优先 • Down：向下取整优先
	Priority	控制分支策略中优先对哪些变量进行分支，有两种选择： • LINGO Decides：LINGO 自动决定（缺省设置） • Binary：二进制（0-1）变量优先
Integrality 整性	Absolute 绝对误差限	当变量与整数的绝对误差小于这个值时，该变量被认为是整数。缺省值为 10-6
	Relative 相对误差限	当变量与整数的相对误差小于这个值时，该变量被认为是整数。缺省值为 8*10-6

续表

选　项　组	选　　项	含　　义
LP Solver LP 求解程序	Warm Start 热启动	当以前面的求解结果为基础，热启动求解程序时采用的算法，有四种可能的设置： • LINGO Decides：LINGO 自动选择算法（缺省设置） • Primal Simplex：原始单纯形法 • Dual Simplex：对偶单纯形法 • Barrier：障碍法（即内点法）
	Cold Start 冷启动	当不以前面的求解结果为基础，冷启动求解程序时采用的算法，有四种可能的设置：（同上，略）
Optimality 最优性	Absolute 目标函数的绝对误差限	当当前目标函数值与最优值的绝对误差小于这个值时，当前解被认为是最优解（也就是说：只需要搜索比当前解至少改进这么多个单位的解）。缺省值为 8*10-8
	Relative 目标函数的相对误差限	当当前目标函数值与最优值的相对误差小于这个值时，当前解被认为是最优解（也就是说：只需要搜索比当前解至少改进这么多百分比的解）。缺省值为 5*10-8
	Time To Relative 开始采用相对误差限的时间（秒）	在程序开始运行后这么多秒内，不采用相对误差限策略；此后才使用相对误差限策略。缺省值为 100 秒
	Node Selection 节点选择	控制如何选择节点的分支求解，有以下选项： • LINGO Decides：　LINGO 自动选择（缺省设置） • Depth First：按深度优先 • Worst Bound：选择具有最坏界的节点 • Best Bound：选择具有最好的界的节点
	Strong Branch 强分支的层数	控制采用强分支的层数。也就是说，对前面这么多层的分支，采用强分支策略。所谓强分支，就是在一个节点对多个变量分别尝试进行预分支，找出其中最好的解（变量）进行实际分支

2.11.7　Global Solver（全局最优求解器）选项卡

表 2-10　Global Solver（全局最优求解器）选项

选　项　组	选　　项	含　　义
Global Solver 全局最优求解程序	Use Global Solver 使用全局最优求解程序	选择该选项，LINGO 将用全局最优求解程序求解模型，尽可能得到全局最优解（求解花费的时间可能很长）；否则不使用全局最优求解程序，通常只得到局部最优解
	Variable Upper Bound 变量上界	有两个域可以控制变量上界（按绝对值）： （1）Value：设定变量的上界，缺省值为 1010； （2）Application 列表框设置这个界的三种应用范围： • None：所有变量都不使用这个上界； • All：所有变量都使用这个上界； •Selected：先找到第 1 个局部最优解，然后对满足这个上界的变量使用这个上界（缺省设置）
	Tolerances 误差限	有两个域可以控制变量上界（按绝对值）： （1）Optimality：只搜索比当前解至少改进这么多个单位的解（缺省值为 10-6）； （2）Delta：全局最优求解程序在凸化过程中增加的约束的误差限（缺省值为 10-7）

续表

选　项　组	选　　项	含　　义
Global Solver 全局最优求解程序	Strategies 策略	可以控制全局最优求解程序的三类策略： （1）Branching：第 1 次对变量分支时使用的分支策略： • Absolute Width（绝对宽度） • Local Width（局部宽度） • Global Width（全局宽度） • Global Distance（全局距离） • Abs (Absolute) Violation（绝对冲突） • Rel (Relative) Violation（相对冲突，缺省设置） （2）Box Selection：选择活跃分支节点的方法： • Depth First（深度优先） • Worst Bound（具有最坏界的分支优先，缺省设置） （3）Reformulation：模型重整的级别： • None（不进行重整） • Low（低） • Medium（中） • High（高，缺省设置）
Multistart Solver 多初始点求解程序	Attempts 尝试次数	尝试多少个初始点求解，有以下几种可能的设置： • Solver Decides：由 LINGO 决定（缺省设置，对小规模 NLP 问题为 5 次，对大规模问题不使用多点求解） • Off：不使用多点求解 • N（>1 的正整数）：N 点求解 • Barrier：障碍法（即内点法）

第 3 章　SPSS 基础知识

SPSS 是世界上最早的统计分析软件，由美国斯坦福大学的三位研究生 Norman H. Nie、C. Hadlai Hull 和 Dale H. Bent 于 1968 年研究开发成功，同时成立了 SPSS 公司，并于 1975 年成立法人组织，在芝加哥组建了 SPSS 总部。1984 年 SPSS 总部推出了世界上第一个统计分析软件微机版本 SPSS/PC+，开创了 SPSS 微机系列产品的开发方向，极大地扩充了它的应用范围，并使其能很快地应用于自然科学、技术科学和社会科学的各个领域。世界上许多有影响的报刊杂志纷纷就 SPSS 的自动统计绘图、数据的深入分析、使用方便和功能齐全等方面给予了高度的评价。

学习目标：

（1）零起步学习 SPSS 19.0 软件，了解和掌握 SPSS 基本功能；

（2）学习 SPSS 图形绘制，并能结合实例进行应用求解；

（3）学习 SPSS 进行回归分析，并能结合实例进行应用求解；

（4）学习 SPSS 进行因子分析，并能结合实例进行应用求解；

（5）学习 SPSS 进行系统聚类分析，并能结合实例进行应用求解。

3.1　数据的输入和保存

当打开 SPSS 19.0 后，界面如图 3-1 所示。

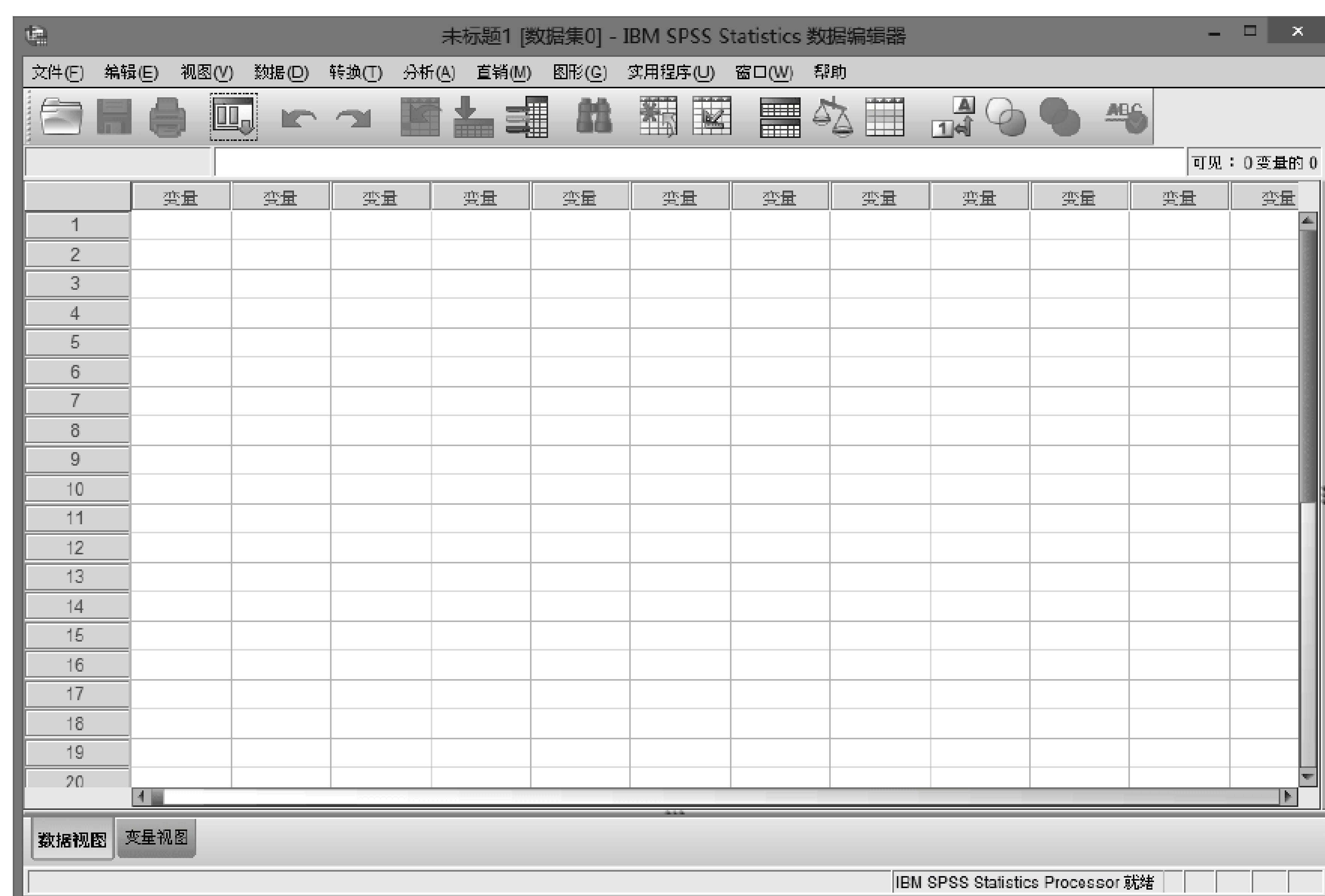


图 3-1　SPSS 19.0 界面

界面包括变量视图和数据视图。变量视图，常用语对变量进行设置，可以写名称、设置数据类型和数据精度等，数据视图则为用户输入的数据。

单击“变量视图”按钮，进行变量的命名、数据精度设置和数据类型设置等等，具体如图 3-2 所示。

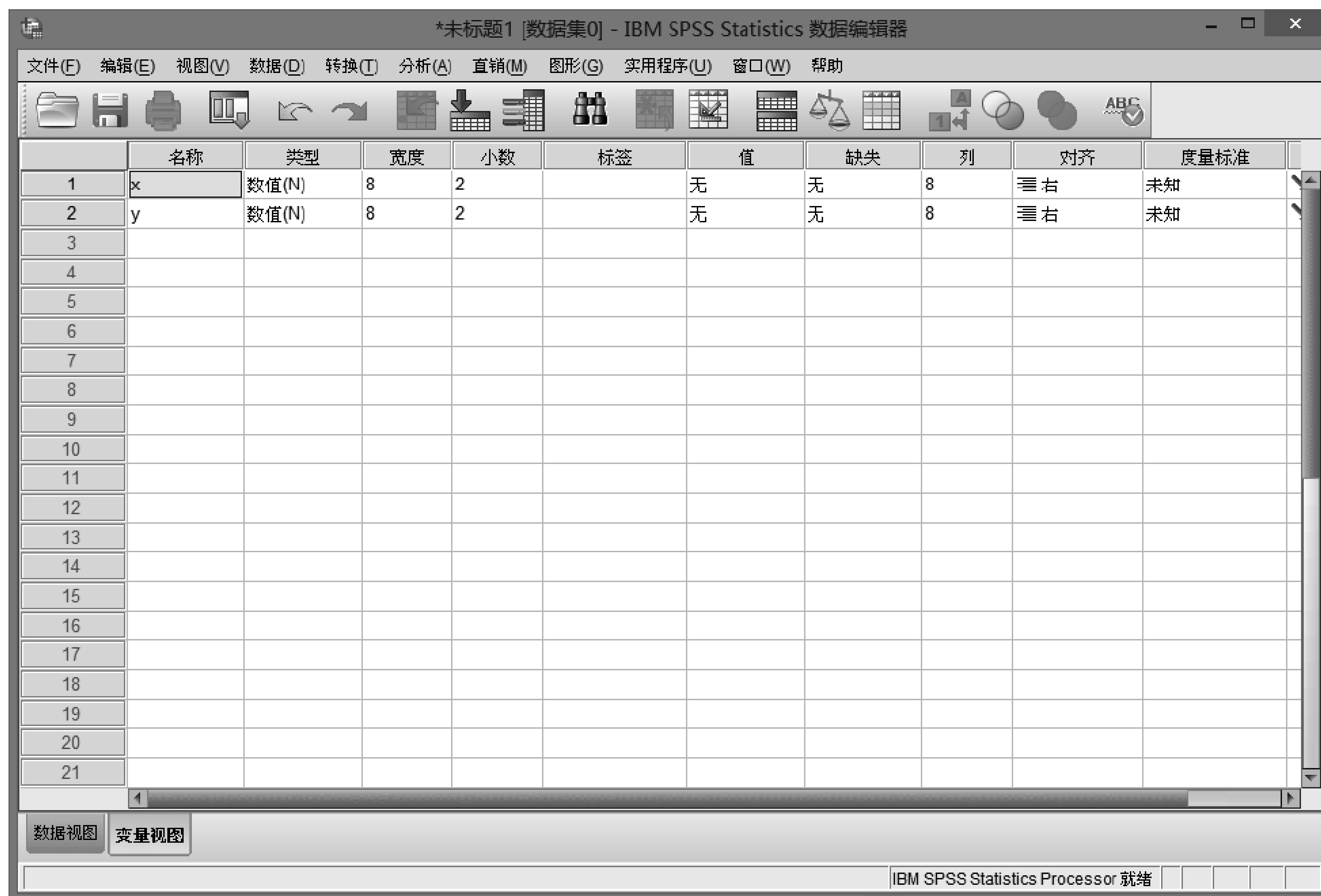


图 3-2　变量命名

单击“保存”按钮，实现该数据分析文件的保存，弹出相应的数据输出窗口，如图 3-3 所示。

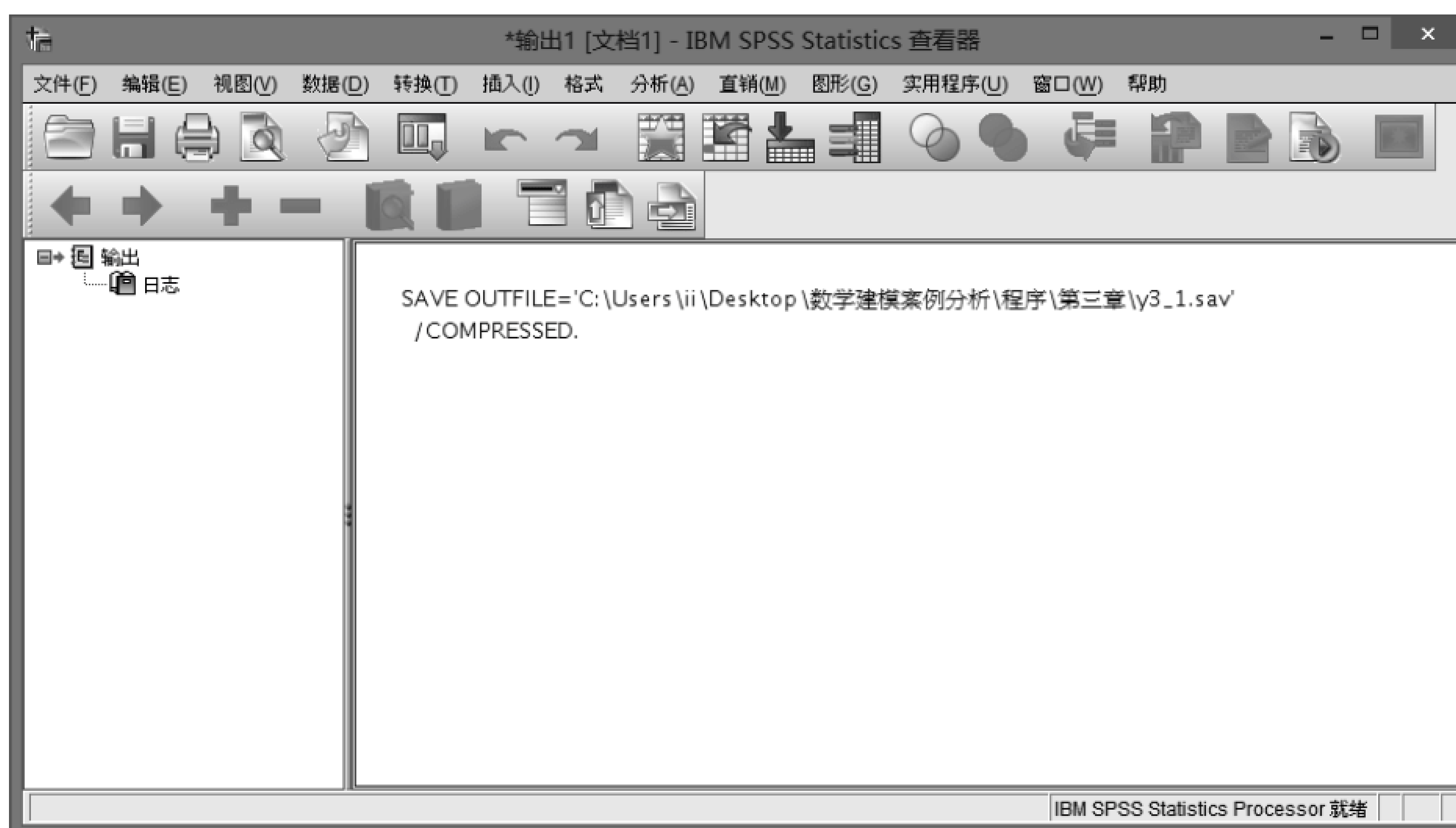


图 3-3　数据输出窗口

在数据视图中，输入相应的 x 和 y 对应的数值，如图 3-4 所示。



图 3-4　数据输入

SPSS 软件集成了大量的函数调用功能，用户只需要进行简单的单击加载，即可完成数据的分析。SPSS 数据分析下拉菜单如图 3-5 所示。



图 3-5　SPSS 数据分析下拉菜单

常用数据分析包括比较均值、一般线性模型、广义线性模型、回归分析、相关分析、神经网络、分类和降维等等。对于常见的数据分析问题，该菜单功能基本能够进行一定的初步分析，具体的回归分析包括自动线性模型、线性、曲线估计、部分最小平方和权重估计等，具体如图 3-6 所示。



图 3-6　回归分析

同样的对于相关分析，主要包括双变量、偏相关和距离相关等，如图 3-7 所示。



图 3-7　相关分析

对于常见的预测分析，SPSS 同样给出序列图、季节性分解和自相关等分析方法，具体如图 3-8 所示。



图 3-8　预测分析

对于经济学、评价因子值和得分计算等问题，常涉及到相应的降维算法，即因子分析、对应分析和最优尺度等计算，SPSS 在降维菜单下同样给出了对应的分析方法，如图 3-9 所示。



图 3-9　降维分析

SPSS 应用分析方法很多，软件集成功能相当强大，用户可根据自己的需求，进行相应的设置，进行分析求解。

3.2　SPSS 图形绘制

3.2.1　散点图绘制

实际问题常常伴有大量的数据产生，数据本身使得问题变得更加明确和清晰，然而数据的不规则性导致实际分析数据常常遇到一些困难。从表象去分析数据内在的固有属性显得很重要，一方面用户可以根据自身经验知识，从散点图判断数据的属性，另一方面散点图也能提供给用户方法的选择，一次回归、二次曲线或者是指数回归等等，因此散点图绘制尤为重要。SPSS 自带强大的绘图工具箱，用户能够很简便地操作工具箱查看数据属性。

分析数据如表 3-1 所示。

表 3-1　数据表

阅读能力	2480	2810	2910	2750	2530
识字量	71	87	89	86	75
阅读能力	3140	2830	2890	2820	3230
识字量	98	83	90	93	95
阅读能力	2330	2920	2970	2800	2770
识字量	73	99	86	96	80
阅读能力	2870	2540	2930	2080	2990
识字量	82	80	97	71	90
阅读能力	2550	2470	2690	2420	2550
识字量	87	69	82	73	75
阅读能力	2650	2790	2450	2950	2400
识字量	75	82	83	98	64

单击“分析”下拉菜单下的回归选项，选择回归下的曲线估计，即可选择数据散点图选项，具体如图 3-10 所示。



图 3-10　曲线估计选项

单击曲线估计选项，弹出“曲线估计”对话框，如图 3-11 所示。



图 3-11　曲线估计

如图 3-11 所示，系统默认为线性估计，直接单击确定按钮即可生成线性拟合图，如图 3-12 所示。

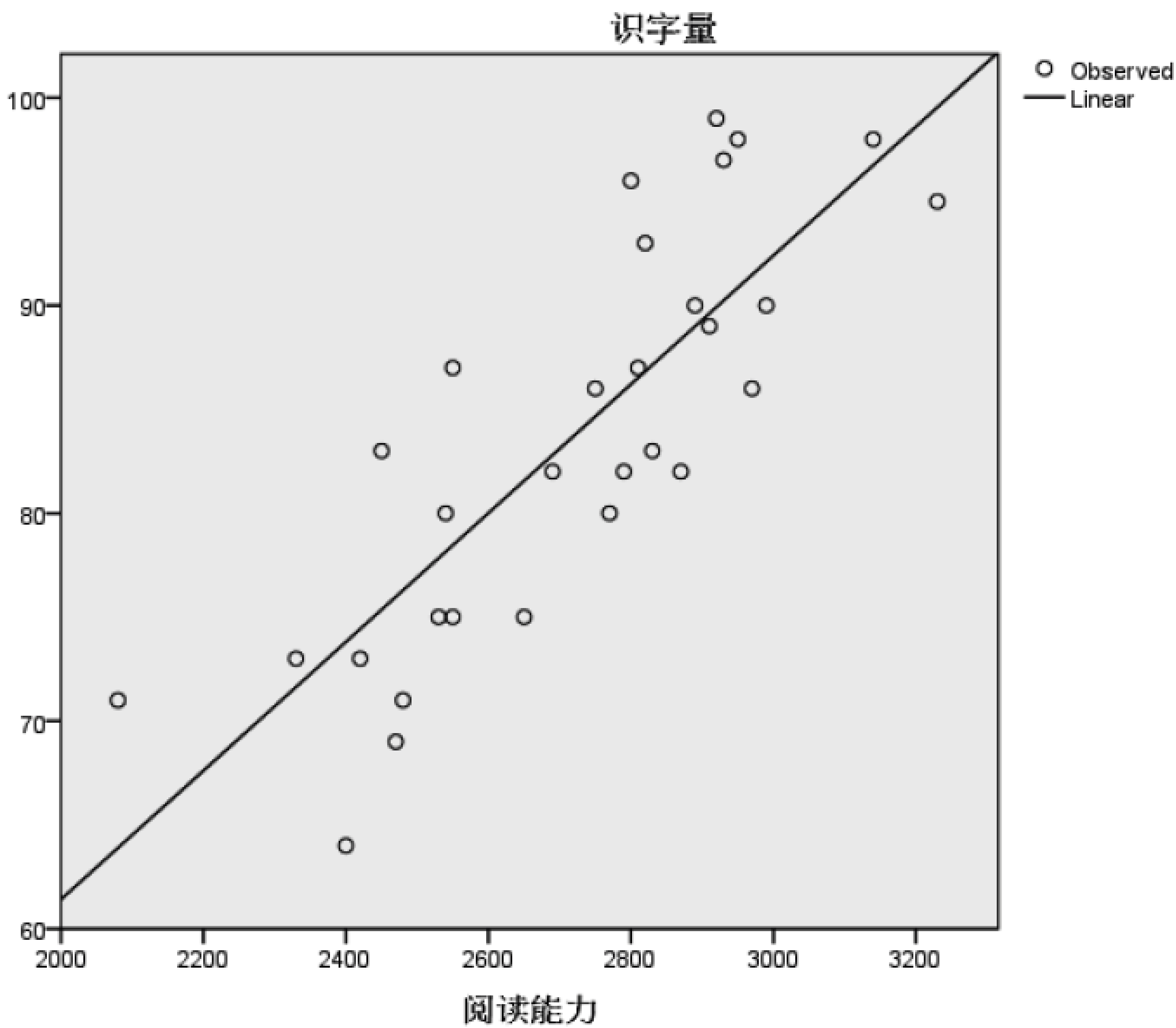


图 3-12　线性拟合图

勾选二次项，单击“确定”按钮，即可生成线性和二次项拟合图，如图 3-13 所示。

图 3-13 中虚线为二次项输出拟合图，实线为直线拟合图。用户可以勾选多个拟合图方法框，如图 3-14 所示的拟合方法选择。则相应的输出结果如图 3-15 所示。

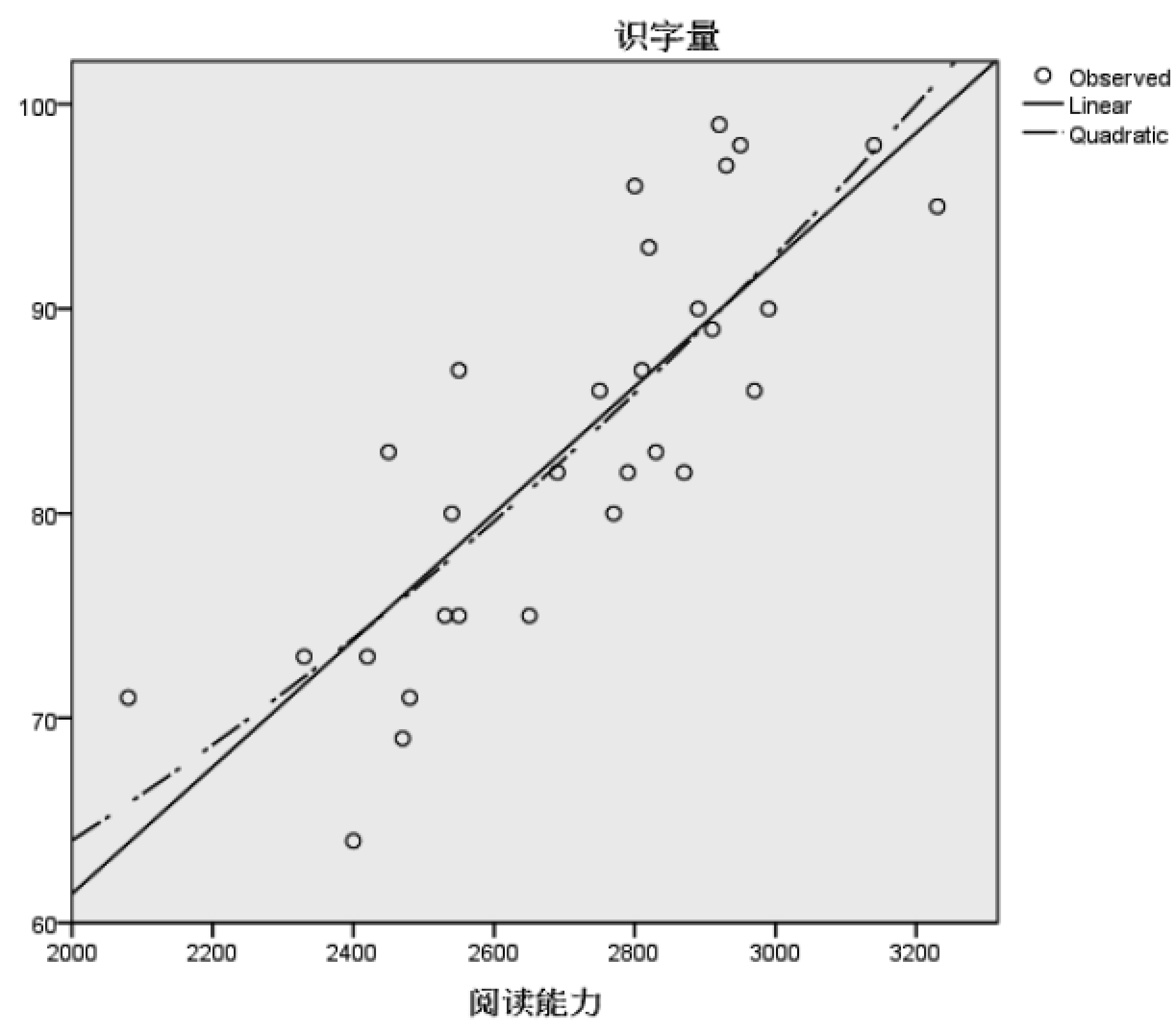


图 3-13　二次拟合图

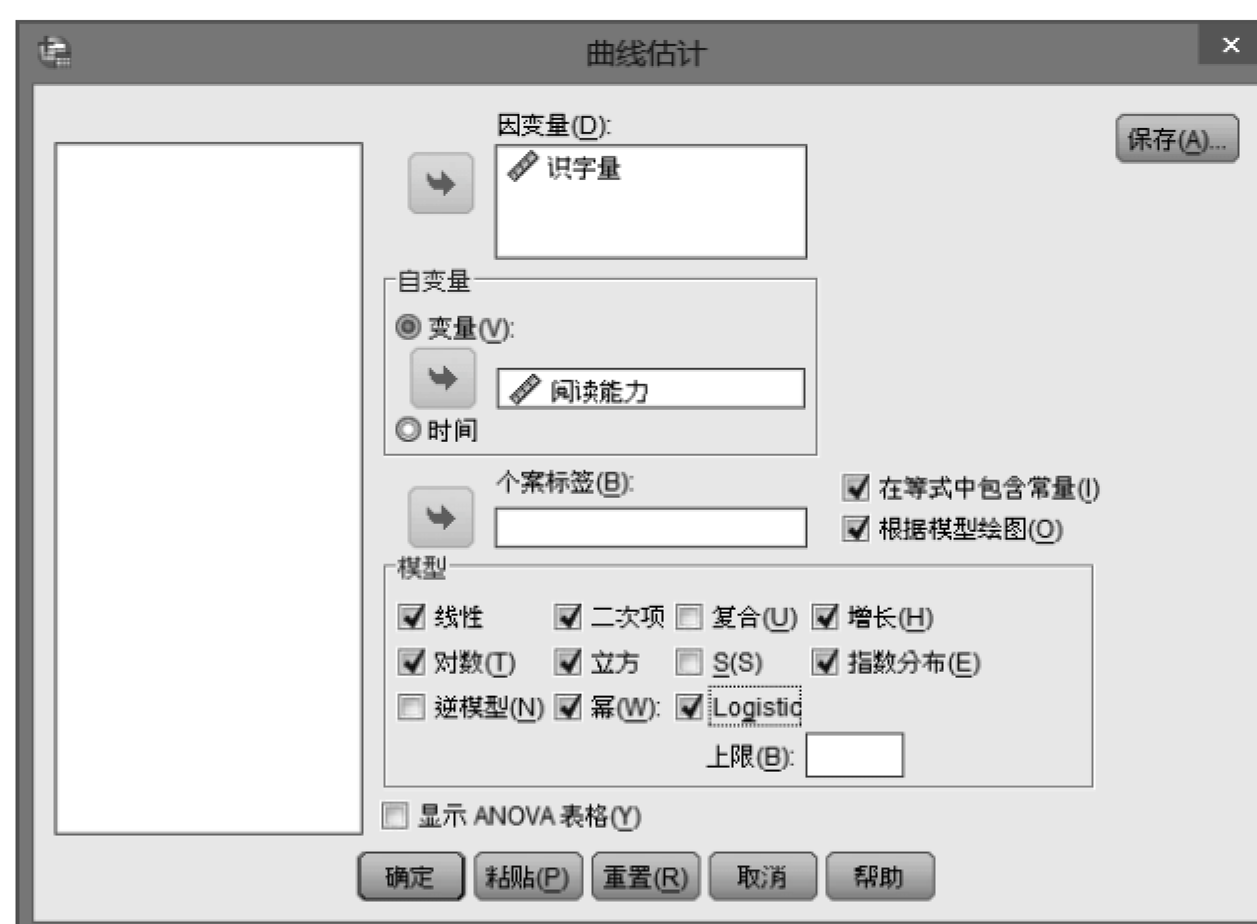


图 3-14　拟合方法选择

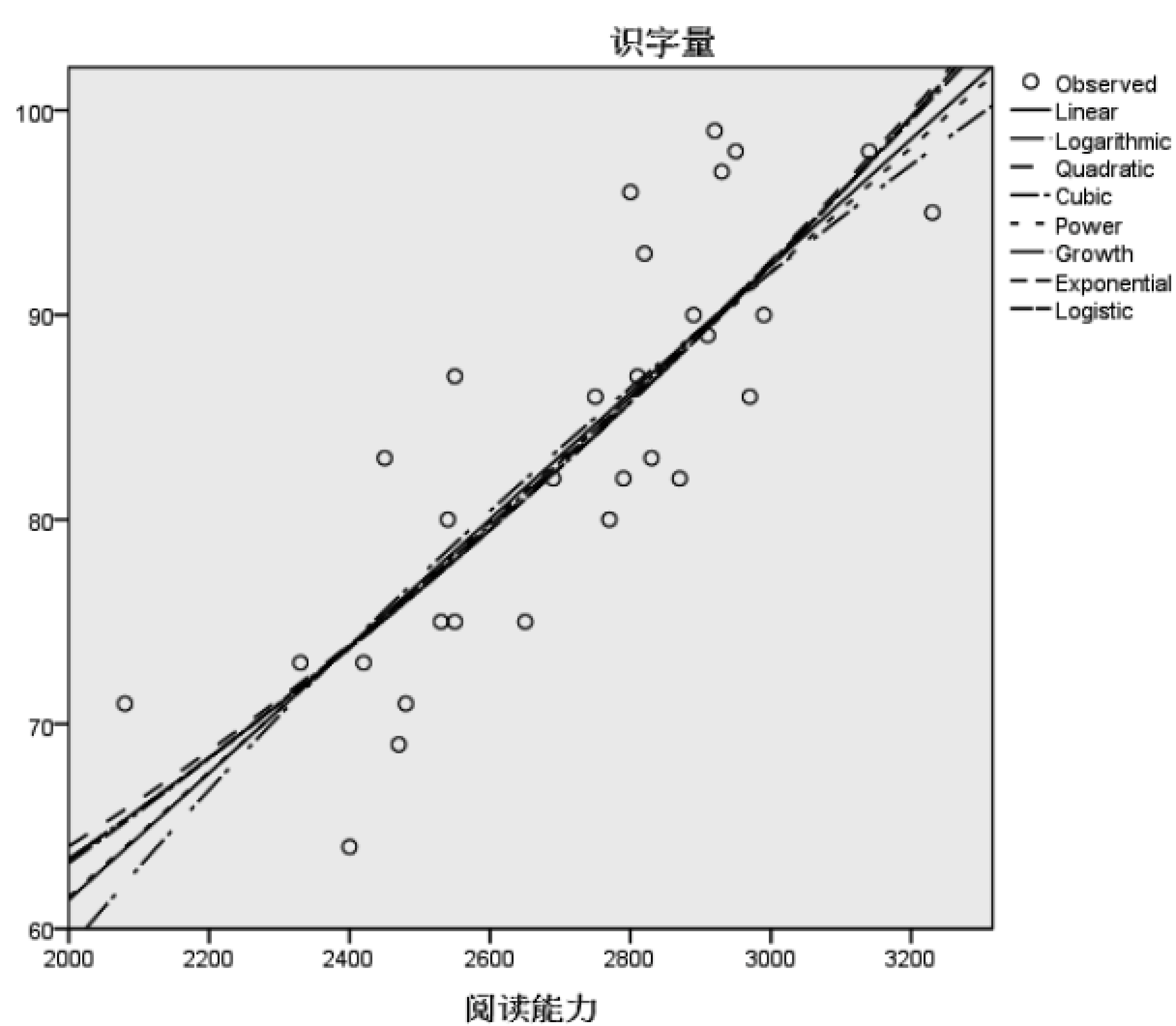


图 3-15　拟合图

由图 3-15 可知，可得到各种方法下的相应的拟合图。用户可以根据相应的拟合好坏程度进行方法的选择，大大地减少了用户的工作量，因此散点图绘制显得尤为重要，SPSS 也相应地为用户提供了更便捷的方法。

3.2.2　直方图绘制

直方图又称质量分布图、柱状图，它是表示资料变化情况的一种主要工具。用直方图可以解析出资料的规则性，比较直观地看出产品质量特性的分布状态，对于资料分布的状况一目了然，便于判断其总体质量分布情况。在制作直方图时，牵涉统计学的概念，首先要对资料进行分组，因此如何合理分组是其中的关键问题。按组距相等的原则进行的两个关键数位是分组数和组距，是一种几何形图表。它是根据从生产过程中收集来的质量数据分布情况，画成以组距为底边、以频数为高度的一系列连接起来的直方型矩形图。

采用如表 3-1 中的数据，进行直方图绘制。

单击“图形”按钮，在该下拉菜单中选择旧对话框|直方图命令，如图 3-16 所示。

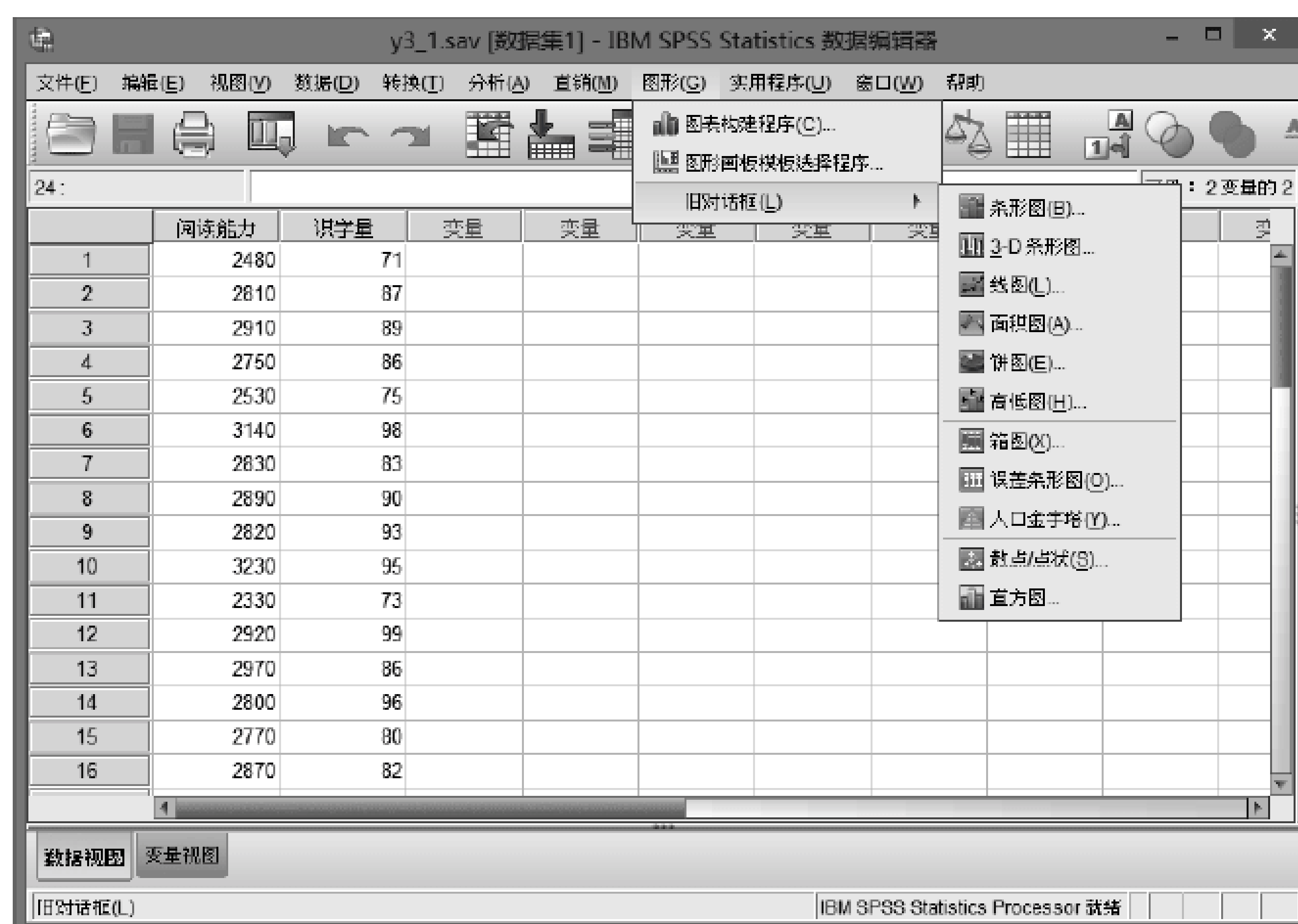


图 3-16　直方图绘制

单击“直方图”按钮后，进行直方图绘制，弹出直方图对话框，如图 3-17 所示。



图 3-17　直方图对话框

勾选“显示正太曲线”选项，单击“确定”按钮，即可得到相应的直方图，如图 3-18 所示。

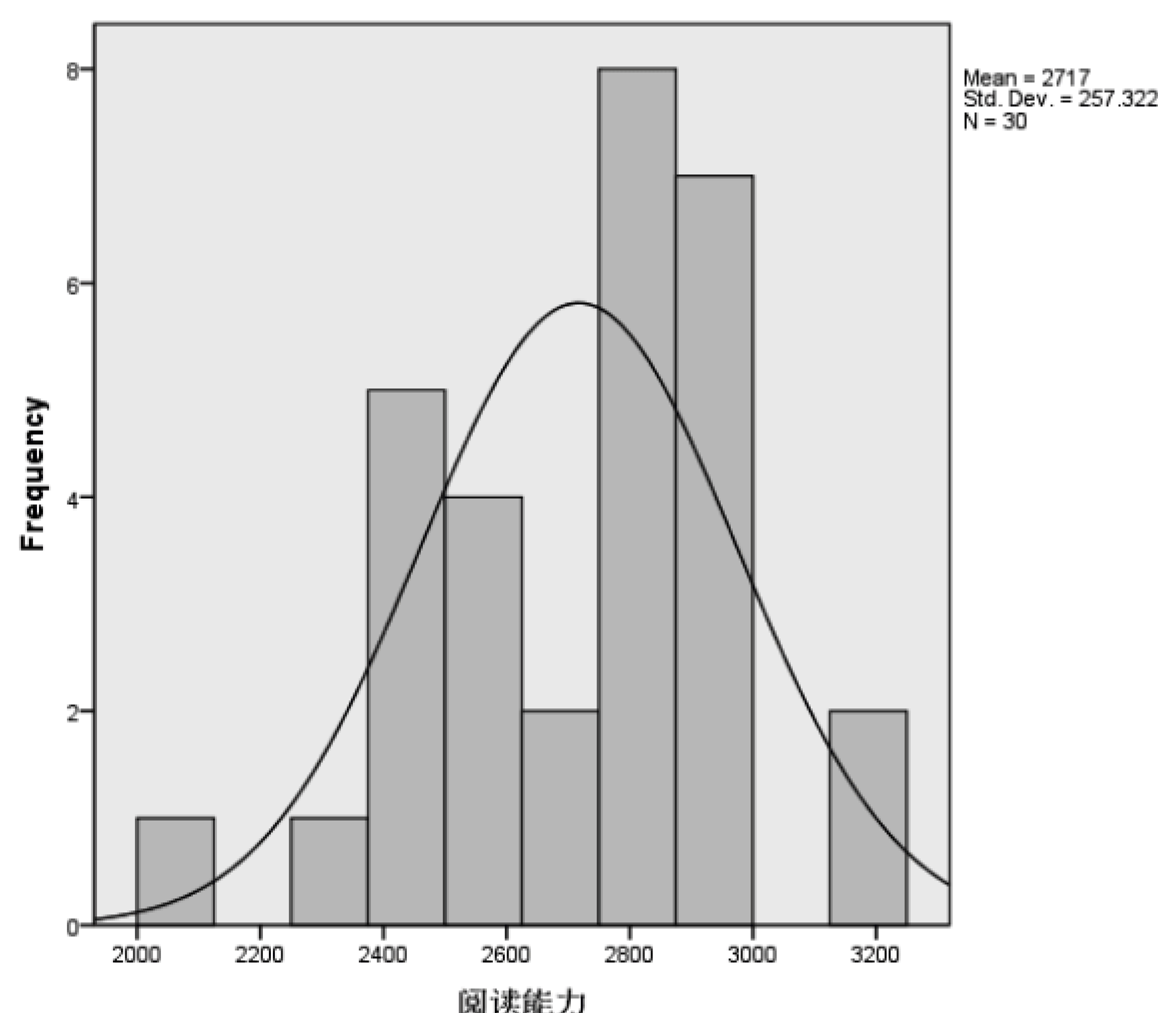


图 3-18　直方图

从图 3-18 中可看出，属于 2400～2600 之间的大约有 9 个数，属于 2000～2200 之间的数有 1 个。因此直方图较为清晰可见。

3.2.3　箱图

一批数据中的异常值值得关注，忽视异常值的存在是十分危险的，不剔除异常值的数据计算分析过程会对结果会带来不良影响。重视异常值的出现，分析其产生的原因，常常成为发现问题进而改进决策的契机。箱形图为用户提供了识别异常值的一个标准。

箱形图（Box-plot）又称为盒须图、盒式图或箱线图，是一种用作显示一组数据分散情况资料的统计图。其绘制须使用常用的统计量，最适宜提供有关数据的位置和分散的参考，尤其在不同的母体数据时其表现更加不同。

具体的箱图选项如图 3-19 所示。

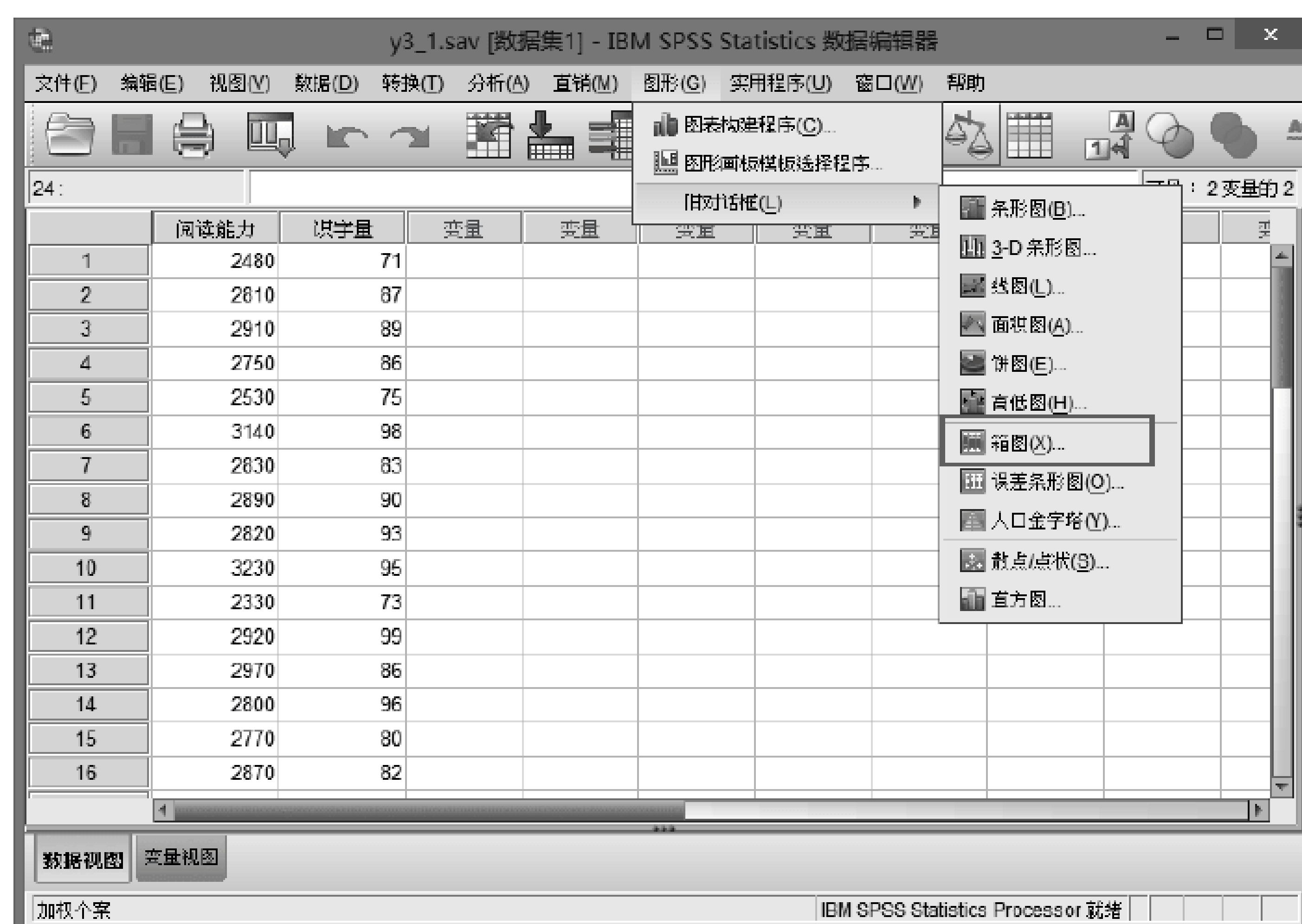


图 3-19　箱图

弹出如图 3-20 所示的对话框，选择简单箱图选项。

在“变量”下的输入框中输入“阅读能力”，在“类别轴”下的输入框中输入“识字量”，具体如图 3-21 所示。



图 3-20　选择简单箱图



图 3-21　定义简单箱图

回到箱图界面，单击“确定”按钮，得到图 3-22。

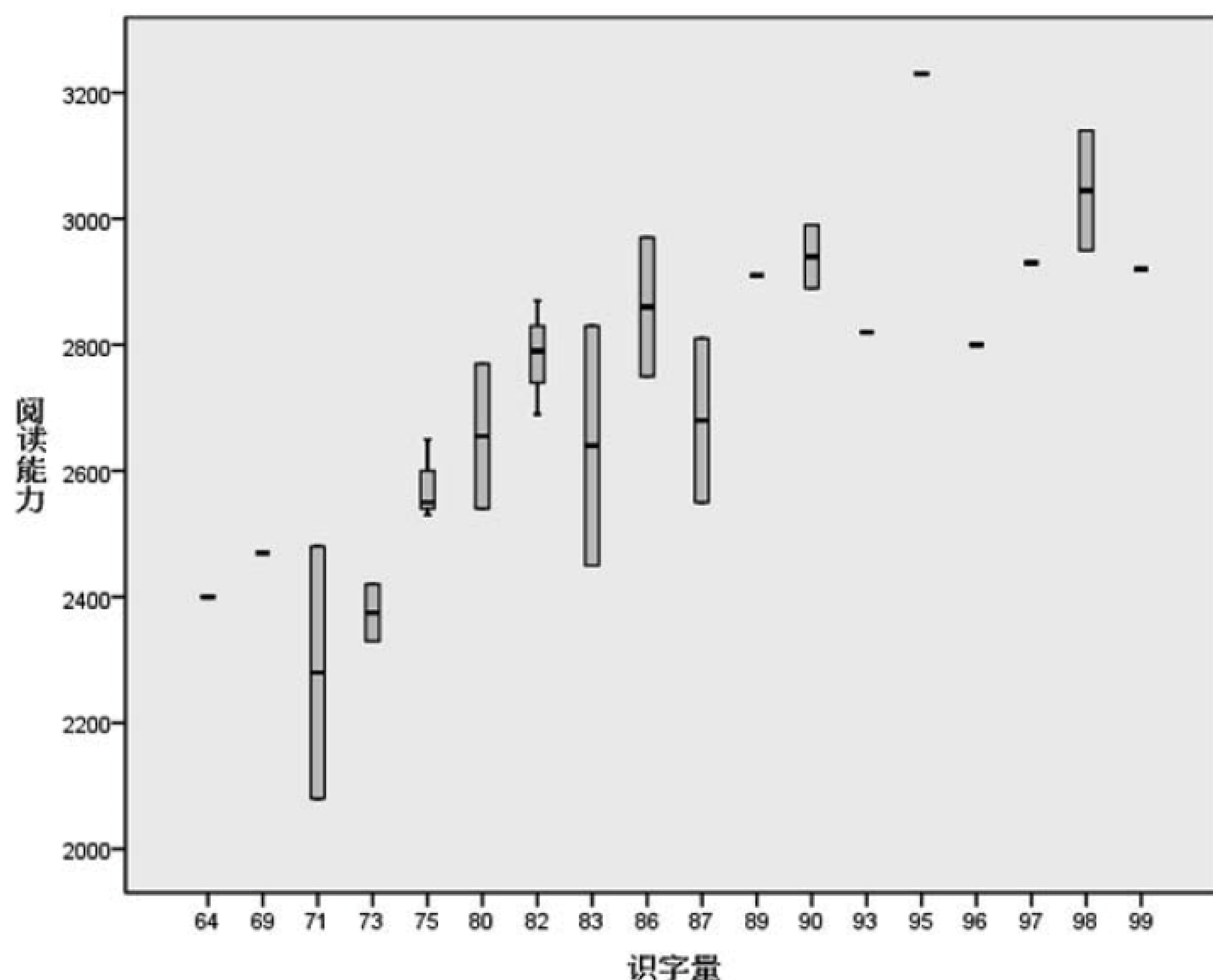


图 3-22　箱图

由图 3-22 可知，属于每一个 case 个案的阅读能力值的区间可以较清晰地看见，用户可以根据这个箱图进行分析阅读能力与识字量之间的说明，较清晰的被用户所接受。

3.3　SPSS 线性回归

回归分析（Regression Analysis）是研究一个变量 Y 与其他若干变量 X 之间相关关系的一种数学工具。它是在一组试验或观测数据的基础上，寻找被随机性掩盖了的变量之间的依存关系。粗略地讲，可以理解为用一种确定的函数关系去近似代替比较复杂的相关关系。这个函数称为回归函数，在实际问题中称为经验公式。

回归分析所研究的主要问题就是如何利用变量 X、Y 的观察值（样本），对回归函数进行统计推断，包括对它进行估计及检验与它有关的假设等。

在回归按钮下，有相应的线性回归分析按钮，如图 3-23 所示。



图 3-23　回归分析

对 x,y 数据进行线性回归分析，因变量填入 x，自变量填入 y，如图 3-24 所示。



图 3-24　回归设置

进行统计量的设置：回归系数置信区间勾选，一般默认为 95%的置信区间，*R* 方变化求解回归拟合最小误差平方值的变化情况，描述性表明拟合 *xy* 之间的描述的变量相关性信息值，偏相关性用于检测变量之间的影响因子，共线性诊断用于诊断变量之间的线性关系，如图 3-25 所示。



图 3-25　统计量

单击“继续”按钮后，再单击“确认”按钮，即可得到相应的输出，如均方值、方差和变量个数等信息，如表 3-2 所示。

表 3-2　统计特征描述

	Mean	Std. Deviation	N
阅读能力	2717.00	257.322	30
识字量	83.63	9.729	30

从表 3-2 可知，阅读能力总共有 30 个数据，均值为 2717.00，标准差为 257.322，同样识字量均值为 83.63，标准差为 9.729。

相应的相关性系数矩阵如表 3-3 所示。

表 3-3　相关系数

		阅 读 能 力	识　字　量
Pearson Correlation	阅读能力	1.000	.820
	识字量	.820	1.000
Sig. (1-tailed)	阅读能力	.	.000
	识字量	.000	.
N	阅读能力	30	30
	识字量	30	30

在表 3-3 中，由皮尔逊相关系数，可知：

$$\begin{bmatrix} & \text{阅读能力} & \text{识字量} \\ \text{阅读能力} & [1.000 & 0.820] \\ \text{识字量} & [0.820 & 1.000] \end{bmatrix}$$

数据与数据本身相关性为 1，阅读能力与识字量相关系数为 0.820，存在线性相关性。

相应的回归模型参数表如表 3-4 所示。

表 3-4　回归模型参数表

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	.820a	.672	.661	149.921	.672	57.434	1	28	.000

a. Predictors: (Constant), 识字量

b. Dependent Variable: 阅读能力

表 3-4 中，$R = 0.820$，$R^2 = 0.672$，自适应 $R^2 = 0.661$，累计误差 $e = 149.921$，统计量 $F = 57.434$，统计量 F 显著性水平 $p = 0.000$。因此该自变量和因变量之间存在线性相关。

分析得到的均方表如表 3-5 所示。

表 3-5　均方表

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	1290894.994	1	1290894.994	57.434	.000a
	Residual	629335.006	28	22476.250		
	Total	1920230.000	29			

a. Predictors: (Constant), 识字量

b. Dependent Variable: 阅读能力

如表 3-5 所示，回归量平方和为 1290894.994，分解后留数平方和为 629335.006，回归后的模型的自由度为 1，残留样本值的自由度为 28，累计样本自由度为 29，统计量 $F = 57.434$，统计量 F 显著性水平 $p = 0.000$。

相应回归系数如表 3-6 所示。

表 3-6　回归模型系数表

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95.0%Confidence Interval for B		Correlations		
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound	Zero-order	Partial	Part
1	(Constant)	903.338	240.877		3.750	.001	409.924	1396.752			
	识字量	21.686	2.861	.820	7.579	.000	15.824	27.547	.820	.820	.820

由表 3-6 可知，阅读能力与识字量的关系为：

$$y=ax+b=21.686x+903.338$$

系数 a 的计算标准差为 2.861，常数 b 的计算标准差为 240.877，系数 a 的置信区间为 $a \in [15.824, 27.547]$，常数 b 的置信区间为 $b \in [409.924, 903.338]$，该模型参数合理。

为了得到自变量与其他自变量之间是否存在共线问题，则需要进行共线性诊断。相应的得到共线性诊断如表 3-7 所示。

表 3-7　共线性诊断

Model	Dimension	Eigenvalue	Condition Index	Variance Proportions	
				(Constant)	识字量
1	1	1.994	1.000	.00	.00
	2	.006	17.543	1.00	1.00

a. Dependent Variable: 阅读能力

从表 3-7 中可知，识别量自变量与因变量阅读能力之间存在共线性，特征值为 1.994，大于 1，因此特征较明显。对于二次方关系，特征矢量为 0.006，远远小于 1，因此，不存在高次幂相关。

为了得到系统拟合图曲线模型与实际数值之间的关系，用留数统计表衡量，如表 3-8 所示。

表 3-8　留数统计量

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	N
Predicted Value	2291.23	3050.24	2717.00	210.983	30
Residual	-363.035	266.504	.000	147.313	30
Std. Predicted Value	-2.018	1.579	.000	1.000	30
Std. Residual	-2.422	1.778	.000	.983	30

a. Dependent Variable: 阅读能力

模型预测值最大 3050.24，最小值为 2291.23，留数残差最小值为-363.035，最大值为 266.504。

回归模型残差值直方图如图 3-26 所示。

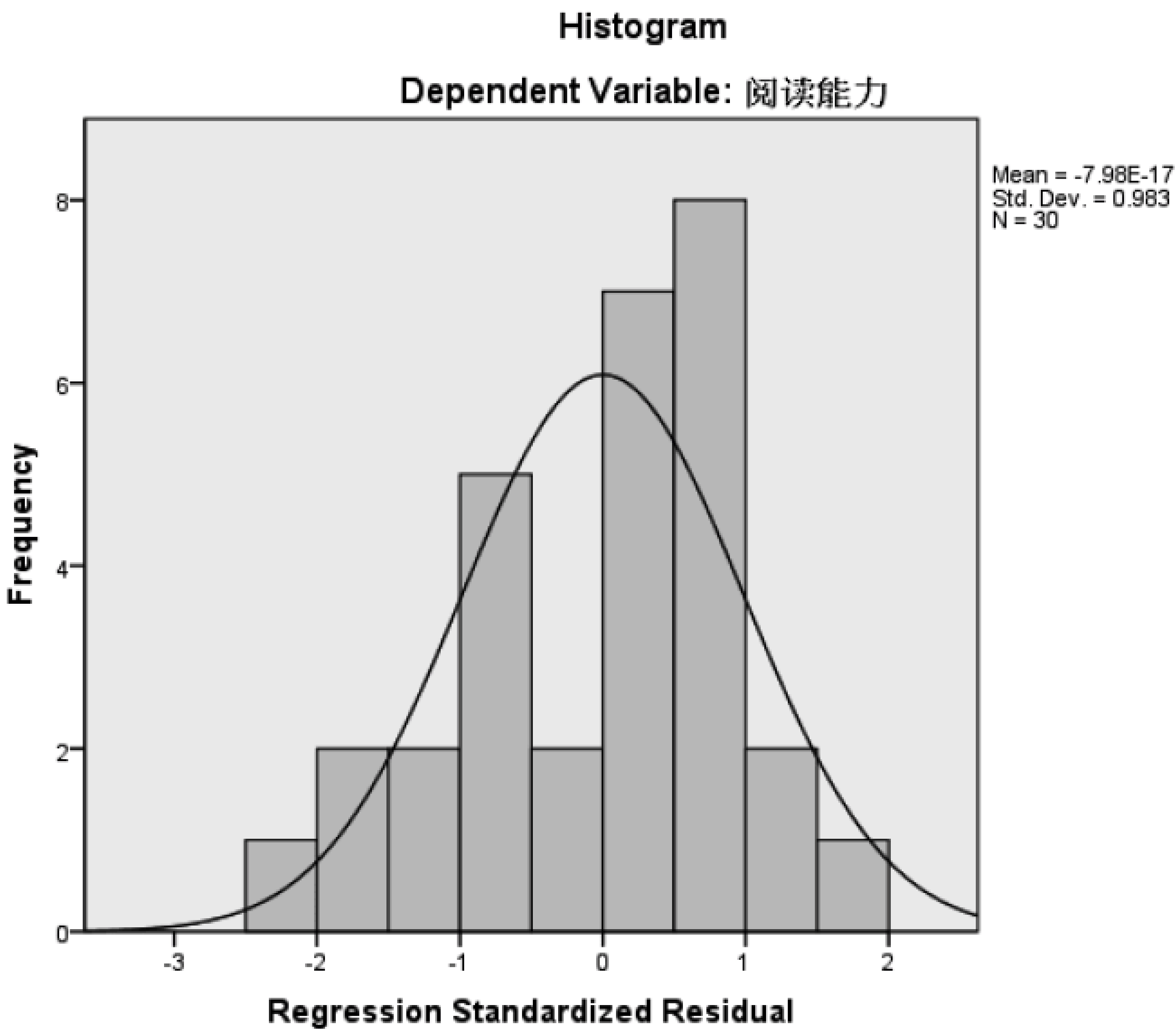


图 3-26　直方图

从图 3-26 中可知，拟合直方图服从正态分布，相应的测量值和实际值位于置信区间内，因此模型较合理。

相应的直线拟合图如图 3-27 所示。

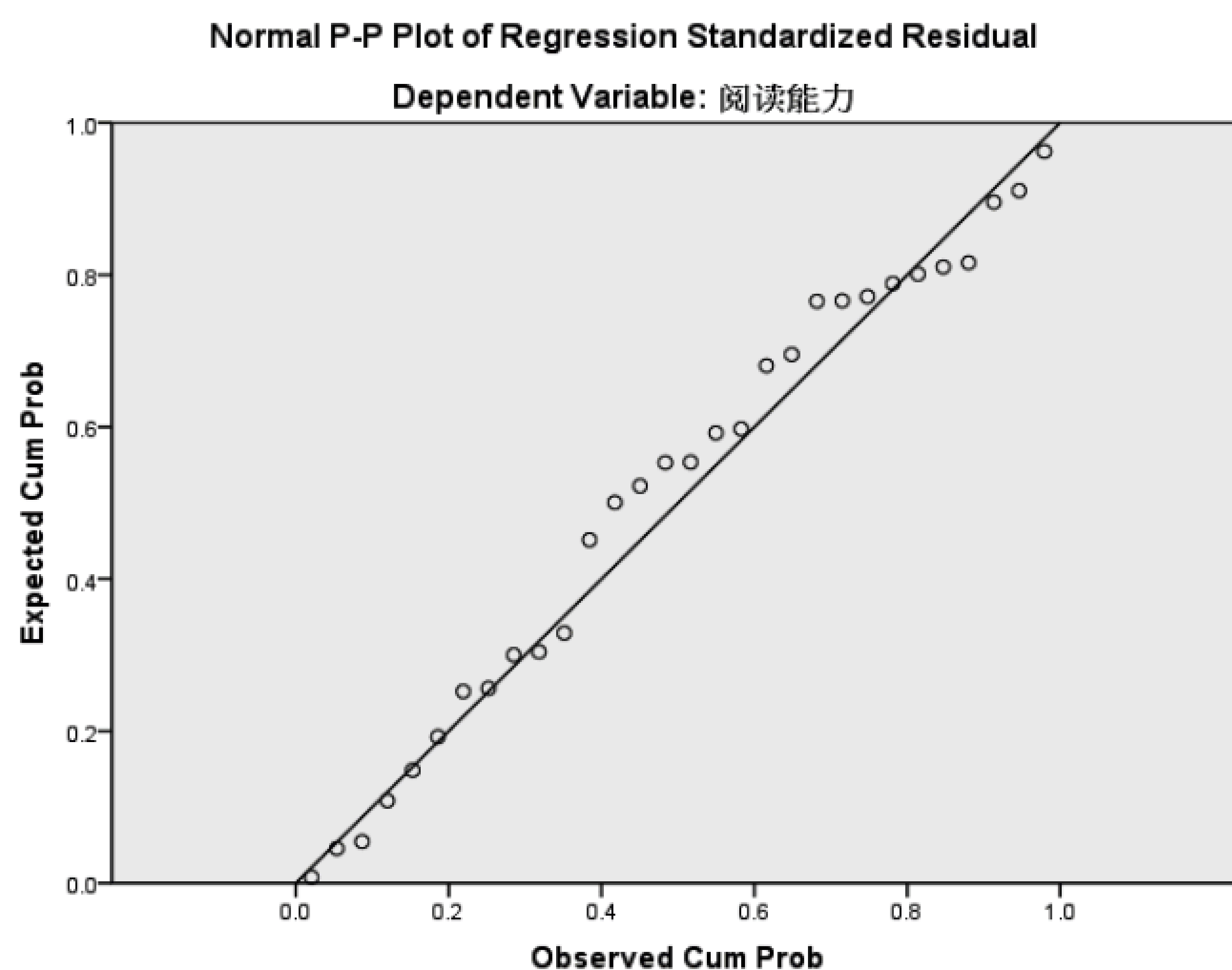


图 3-27　拟合曲线图

从图 3-27 中可看出，该数据分布在直线两侧，走势严格服从直线走势，因此模型分析较合理。

3.4　SPSS 因子分析

因子分析（Factor Analysis）是通过分析多个观测变量之间的相关关系，探求数据内部的基本结构，并用少数几个假想变量来表示基本的数据结构，最终达到化简原始数据的目的。

设原始变量：x_1，x_2，x_3，……，x_k。它们与潜在因子 f_j 之间的关系可以表示为：

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \cdots\cdots + a_{1m}f_m + u_1 \\ x_2 = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots\cdots + a_{2m}f_m + u_2 \\ x_3 = a_{31}f_1 + a_{32}f_2 + \cdots\cdots + a_{3m}f_m + u_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k = a_{k1}f_1 + a_{k2}f_2 + \cdots\cdots + a_{km}f_m + u_k \end{cases}$$

在该模型中：首先，f_1、f_2、f_3、……、f_m 为 m 个公因子（Common Factors），他们是观测变量所共有的因子，解释了变量之间的相关。其次：u_i 是特殊因子（Unique Factors），它是每个观测变量所特有的因子，表示该变量不能被公因子所解释的部分。最后：a_{ij} 称为因子载荷（Factor Loadings），它是第 i 个变量在第 j 个公因子上的负载，也就是二者的相关系数{$i=1,2,3,\cdots,k$；　$j=1,2,3,\cdots,m$}。

以某企业绩效管理评价指标体系作为分析体系，进行因子分析。具体调查问卷数据如表 3-9 所示。

表 3-9　某企业绩效管理评价指标体系的设计

序　　号	指 标 名 称	序　　号	指 标 名 称
1	工作层级	2	绩效了解程度
3	绩效合理性	4	考核增加合作
5	考核可行性	6	考核目的发放奖金
7	考核目的确定目标	8	考核目的检查完成情况
9	考核目的职务晋升	10	考核目的培训需求
11	考核目的提高绩效	12	考核目的职业生涯规划
13	考核目的实现战略目标	14	考核目的改编组织文化
15	考核反馈看法	16	考核员工本人
17	考核直接领导	18	考核部门所有员工
19	考核合作员工	20	考核全体员工
21	领导考核成绩	22	绩管制度加强体系培训
23	绩管制度加强评分公式	24	绩管制度加强绩效面谈
25	绩管制度加强申诉渠道	26	绩管制度加强表彰奖励
27	绩效评价业绩程度	28	考核衡量绩效
29	清楚考核要求	30	考核透明度
31	相关部门内考核公平性	32	相对其他部门考核公平性
33	考核促进工作数	34	考核执行情况
35	管理者绩效评价	36	管理者和自己考核结果吻合度
37	对自己考核结果	38	领导和员工对考核结果的沟通
39	领导对员工建议的态度	40	考核结果的应用
41	绩效表述的观点	42	考核内容形成过程
43	哪种考核适合企业总厂	44	适合企业考核方法

输入数据到 SPSS 中，如图 3-28 所示。



	序号	性别	年龄	学历	工作部门	工作层级	绩效了解程度
1	1	1	2	2	2	3	3
2	2	0	1	2	2	3	2
3	3	0	4	2	2	2	2
4	4	1	1	2	2	3	2
5	5	0	1	2	2	3	2
6	6	0	4	2	2	1	2
7	7	1	2	2	2	2	2
8	8	1	2	2	2	3	2
9	9	0	2	1	2	3	2
10	10	0	2	2	2	1	2
11	11	0	2	2	2	3	2
12	12	0	3	2	2	1	2
13	13	1	2	2	2	3	2
14	14	1	1	2	2	3	2
15	15	0	2	2	3	2	2
16	16	0	2	2	2	2	2

图 3-28　数据输入

单击分析下拉菜单下的降维操作，即可选中因子分析进行因子分析，如图 3-29 所示。



图 3-29　因子分析选项

选择“因子分析”选项，弹出因子分析对话框，如图 3-30 所示。

选择所有的数据项输入到变量框中，单击描述按钮，弹出“描述统计”对话框，勾选“KMO 和 Bartlett 的球形度检验”选框，如图 3-31 所示。



图 3-30　因子分析



图 3-31　KMO 和 Bartlett 的球形度检验

单击图 3-31 中的“继续”按钮，弹出图 3-30 所示的对话框，单击“抽取”按钮，弹出“抽取”对话框，勾选“碎石图”选框，选择主成分分析方法，如图 3-32 所示。

单击图 3-32 中的“继续”按钮，弹出图 3-30 所示的对话框，单击“得分”按钮，弹出“因子得分”对话框，勾选“显示因子得分系数矩阵”选框，如图 3-33 所示。

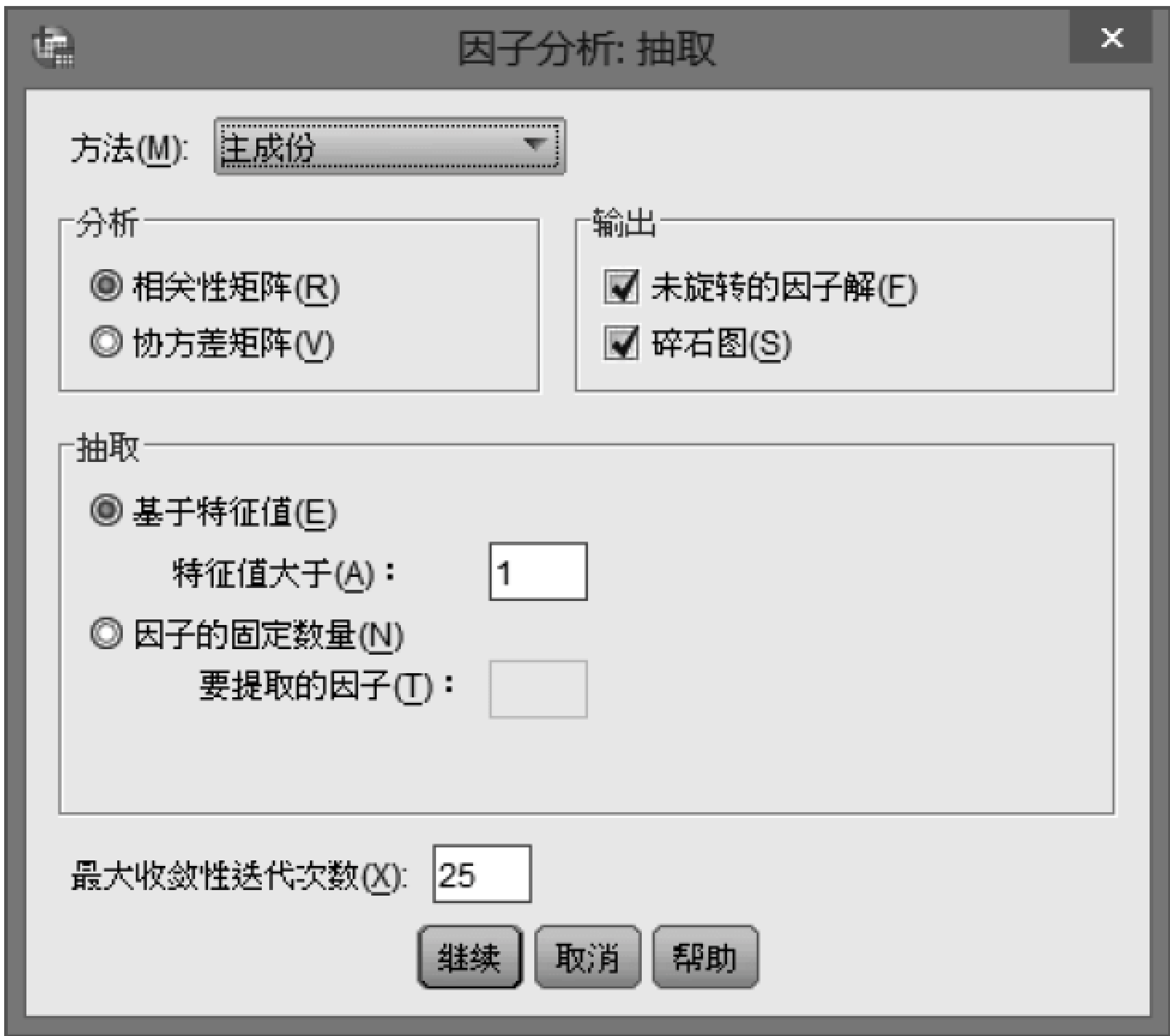


图 3-32　抽取对话框



图 3-33　因子得分

单击因子分析确定按钮，即可得到相应的结果。

得到自变量碎石图如图 3-34 所示。

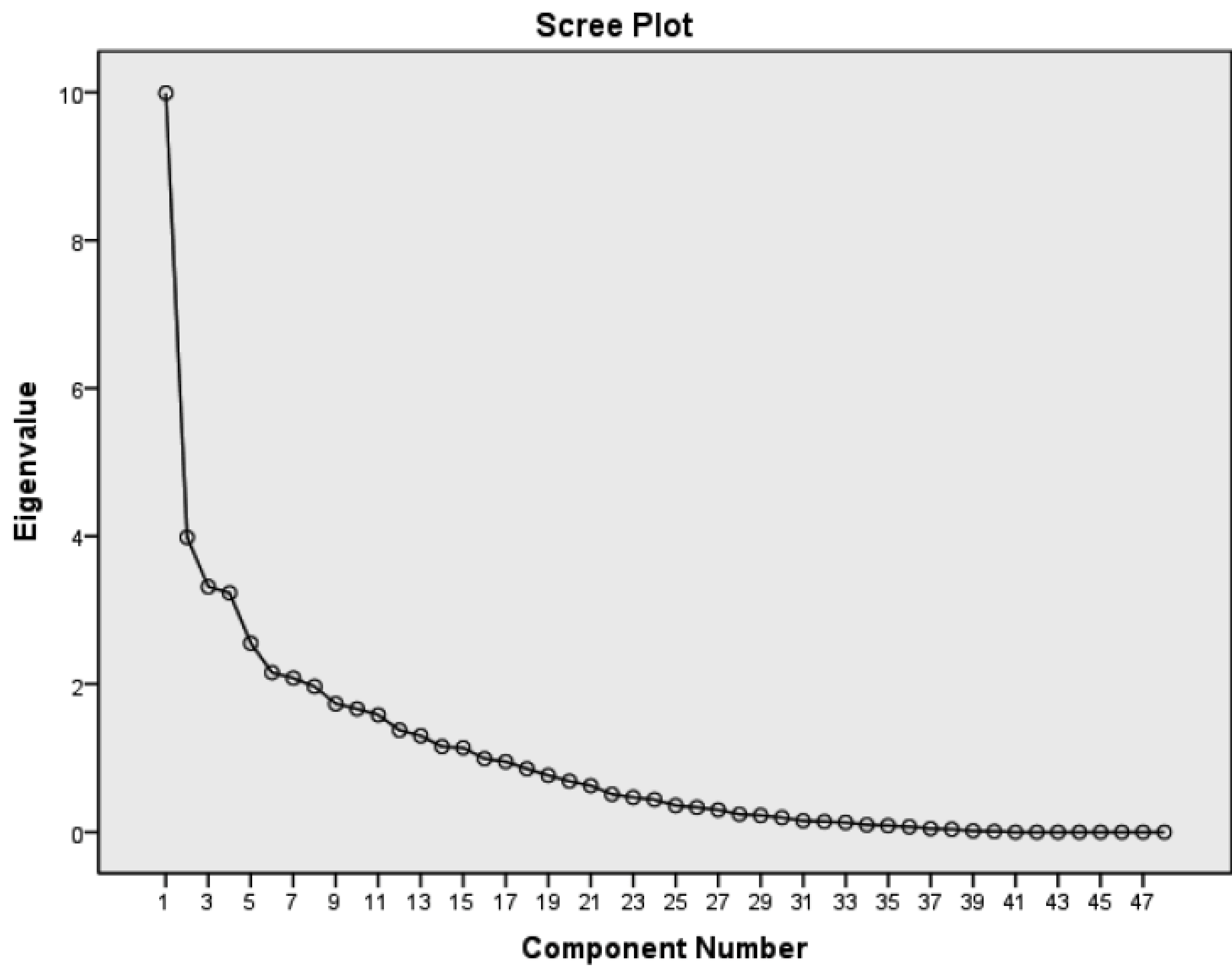


图 3-34　员工数据汇总因子分析碎石图

相应的数据汇总方差中旋转后的贡献率如表 3-10 所示。

表 3-10　员工数据汇总方差中旋转后的贡献率（%of Variance）表（前 15 个公因子）

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings		
	Total	%of Variance	Cumulative %	Total	%of Variance	Cumulative %
1	9.989	20.811	20.811	9.989	20.811	20.811
2	3.984	8.301	29.112	3.984	8.301	29.112
3	3.317	6.910	36.022	3.317	6.910	36.022

续表

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings		
	Total	%of Variance	Cumulative %	Total	%of Variance	Cumulative %
4	3.233	6.735	42.756	3.233	6.735	42.756
5	2.554	5.321	48.078	2.554	5.321	48.078
6	2.157	4.493	52.571	2.157	4.493	52.571
7	2.081	4.336	56.907	2.081	4.336	56.907
8	1.969	4.102	61.008	1.969	4.102	61.008
9	1.735	3.616	64.624	1.735	3.616	64.624
10	1.666	3.471	68.095	1.666	3.471	68.095
11	1.584	3.301	71.396	1.584	3.301	71.396
12	1.376	2.868	74.263	1.376	2.868	74.263
13	1.301	2.711	76.975	1.301	2.711	76.975
14	1.156	2.408	79.382	1.156	2.408	79.382
15	1.139	2.373	81.755	1.139	2.373	81.755
16	0.999	2.080	83.944			

通过该企业员工和领导层进行调查得到相应的数据，按照提取公因子所解释的方差累计贡献率占整个方差 81%以上的原则，借助碎石图，确定公因子。

针对员工问卷汇总，经 SPSS 因子分析得到 15 个公因子所揭示的方差累计贡献率达到了 81.755%，较好地反映了员工问卷原始指标的信息。经旋转后，15 个公因子所对应的方差贡献率分别为：20.811%、8.301%、6.910%、6.735%、5.321%、4.493%、4.336%、4.102%、3.616%、3.471%、3.301%、2.868%、2.711%、2.408%和 2.373%。

各因子提取量如表 3-11 所示。

表 3-11　各因子提取量

	Initial	Extraction
序号	1.000	.816
考核能衡量绩效	1.000	.858
清楚考核要求	1.000	.772
相对部门内考核公平性	1.000	.823
相对其他部门考核公平性	1.000	.871
考核促进工作数和质	1.000	.797
考核执行情况	1.000	.857
管理者绩效评价	1.000	.833
对自己考核结果	1.000	.887
领导和员工对考核结果的沟通	1.000	.861
领导对员工建议的态度	1.000	.904
考核结果的应用情况	1.000	.778
绩管表述的观点	1.000	.735
考核内容形成过程	1.000	.868
绩管评价业绩程度	1.000	.802
适合瀑电考核方法	1.000	.894
哪种考核适合瀑电总厂	1.000	.844
考核直接领导	1.000	.785

续表

	Initial	Extraction
考核目的发放奖金	1.000	.810
考核目的确定目标	1.000	.824
考核可行性	1.000	.835
考核增加合作	1.000	.772
考核目的职务晋升	1.000	.873
考核目的检查完成情况	1.000	.765
管理者和自己考核结果吻合度	1.000	.846
年龄	1.000	.803
学历	1.000	.861
工作部门	1.000	.799
工作层级	1.000	.740
绩效了解程度	1.000	.771
绩效合理性	1.000	.847
考核目的培训需求	1.000	.759
考核透明度	1.000	.787
考核合作员工	1.000	.869
考核目的提高绩效	1.000	.861
考核目的职业生涯规划	1.000	.852
考核目的实现战略目标	1.000	.768
考核目的改编组织文化	1.000	.731
考核反馈看法	1.000	.921
考核员工本人	1.000	.837
考核部门所有员工	1.000	.823
考核全体员工	1.000	.846
领导占考核成绩比例	1.000	.883
绩管制度加强体系培训	1.000	.791
绩管制度加强评分公示	1.000	.730
绩管制度加强绩效面谈	1.000	.838
绩管制度加强申诉渠道畅通	1.000	.647
绩管制度加强表彰奖励	1.000	.823

在表 3-11 中，SPSS 因子分析得 15 个因子可以充分反映原指标的信息。该因子分析有，领导对员工建议的态度：0.914；考核反馈看法：0.902；领导占考核成绩比例：0.895；相对其他部门考核公平性：0.890；适合瀑电考核方法：0.886；考核目的确定目标：0.885；哪种考核适合瀑电总厂：0.883；考核合作员工：0.875；考核执行情况：0.868；考核能衡量绩效：0.863；领导和员工对考核结果的沟通：0.857；绩管制度加强绩效面谈：0.852；考核全体员工：0.849；考核内容形成过程：0.846；学历：0.846。

根据 SPSS 得到的因子值及公式 $\eta_i = \sum \alpha_p f_{pi}$ ，计算出该企业绩效管理的综合得分。其中，η_i 是第 i 个企业的综合得分，α_p 表示总方差中旋转后的贡献率(%of Variance)，即为第 p 个主成分所解释的方差比例，f_{pi} 为因子值。得到，$\overline{\eta}_{员工}$=0.7696 。

对于中高层调查结果分析，按照提取公因子所解释的方差累计贡献率占整个方差 84%以上的原则，得到碎石图如图 3-35 所示。

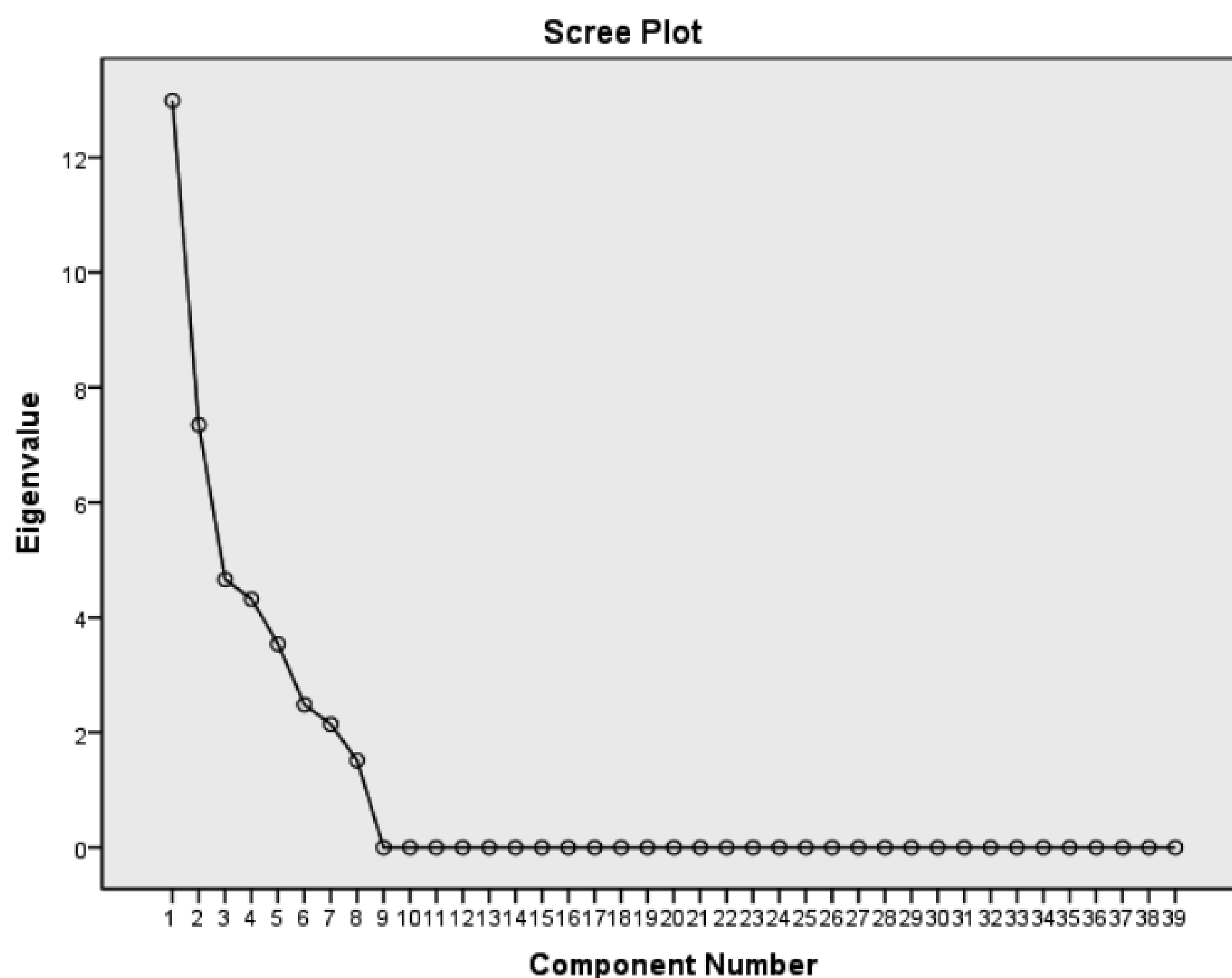


图 3-35　中高层领导数据汇总因子分析碎石图

在图 3-35 中，确定提取出 5 个公因子。5 个公因子所揭示的方差累计贡献率达到了 84.241，较好地反映了原始指标的信息。旋转后：5 个公因子所对应的方差贡献率分别为：33.302%、18.840%、11.951%、11.072%和 9.076%。同理可得到 $\overline{\eta}_{中高层}=0.6099$ 。

由以上分析可知，该调查数据显示，企业员工绩效管理得分 0.7696 高于中高层领导绩效管理的 0.6099，差别不是很大，因此该企业绩效管理有一定的效果，员工积极性很高。但是也应该注意到，中高层领导应该加强自身建设，合理的应用绩效管理，让绩效管理更加贴近员工本身，提升企业绩效。

3.5　SPSS 系统聚类分析

聚类分析指将物理或抽象对象的集合分组成为由类似的对象组成的多个类的分析过程，它是一种重要的人类行为。聚类分析的目标就是在相似的基础上收集数据来分类。聚类源于很多领域，包括数学、计算机科学、统计学、生物学和经济学。在不同的应用领域，很多聚类技术都得到了发展，这些技术方法被用作描述数据，衡量不同数据源间的相似性，以及把数据源分类到不同的簇中。

聚类与分类的不同在于，聚类所要求划分的类是未知的。

聚类是将数据分类到不同的类或者簇这样的一个过程，所以同一个簇中的对象有很大的相似性，而不同簇间的对象有很大的相异性。

从统计学的观点看，聚类分析是通过数据建模简化数据的一种方法。传统的统计聚类分析方法包括系统聚类法、分解法、加入法、动态聚类法、有序样品聚类、有重叠聚类和模糊聚类等。采用 k-均值和 k-中心点等算法的聚类分析工具已被加入到许多著名的统计分析软件包中，如 SPSS 和 SAS 等。

对表 3-1 中的数据进行聚类分析，每一行表示一个人，一个人的阅读能力和识字量，

进行系统聚类分析，首先载入数据，如图 3-36 所示。

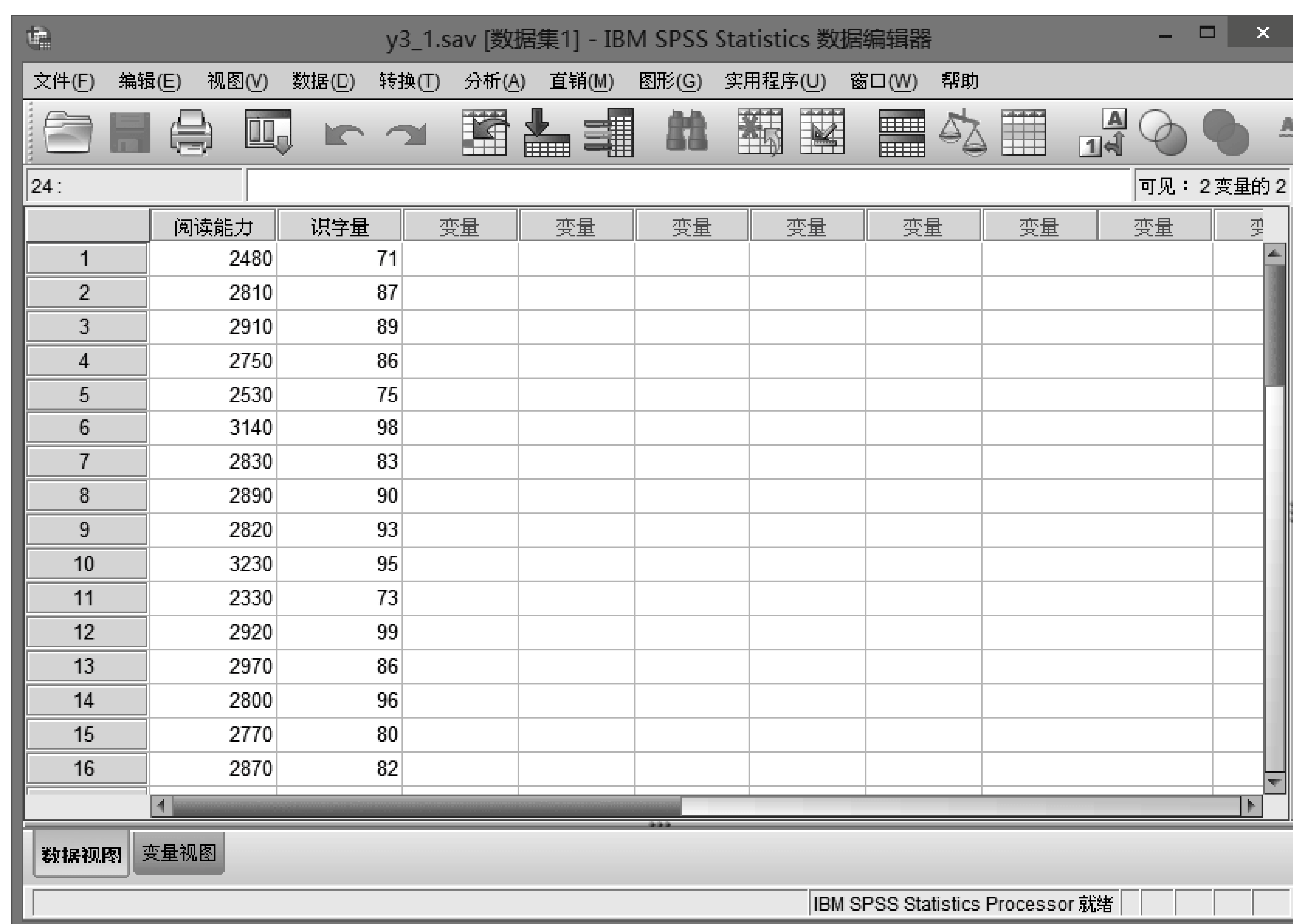


图 3-36　数据载入

选择“分析” | “分类” | “系统聚类”命令，如图 3-37 所示。



图 3-37　系统聚类选项

单击“系统聚类”按钮后，系统默认为个案分析，即认为数据界面每一行是一个个案，相应的数据即为 30 个个案，选择阅读能力和识字量进行变量窗口，如图 3-38 所示。

单击“绘制”按钮，弹出“系统聚类分析图”对话框，勾选“树状图”选项，如图 3-39 所示。



图 3-38　系统聚类对话框



图 3-39　树状图

单击图 3-39 中的“继续”按钮，弹出图 3-38 所示的对话框，单击“方法”按钮，弹出“系统聚类分析方法”对话框，选择聚类方法——组间联接，如图 3-40 所示。



图 3-40　系统聚类分析方法

回到系统聚类分析界面，单击“确定”按钮，即可得到分析结果。

如表 3-12 所示为待分析的数据的统计量，30 个个案，每一个个案都是明显的、有效的。

表 3-12　个案统计量

Case Processing Summary[a,b]					
Cases					
Valid		Missing		Total	
N	Percent	N	Percent	N	Percent
30	100.0	0	.0	30	100.0

a. Squared Euclidean Distance Undefined error #14704 - Cannot open tex

b. Average Linkage (Between Groups)

相应的得到的冰柱图如图 3-41 所示。

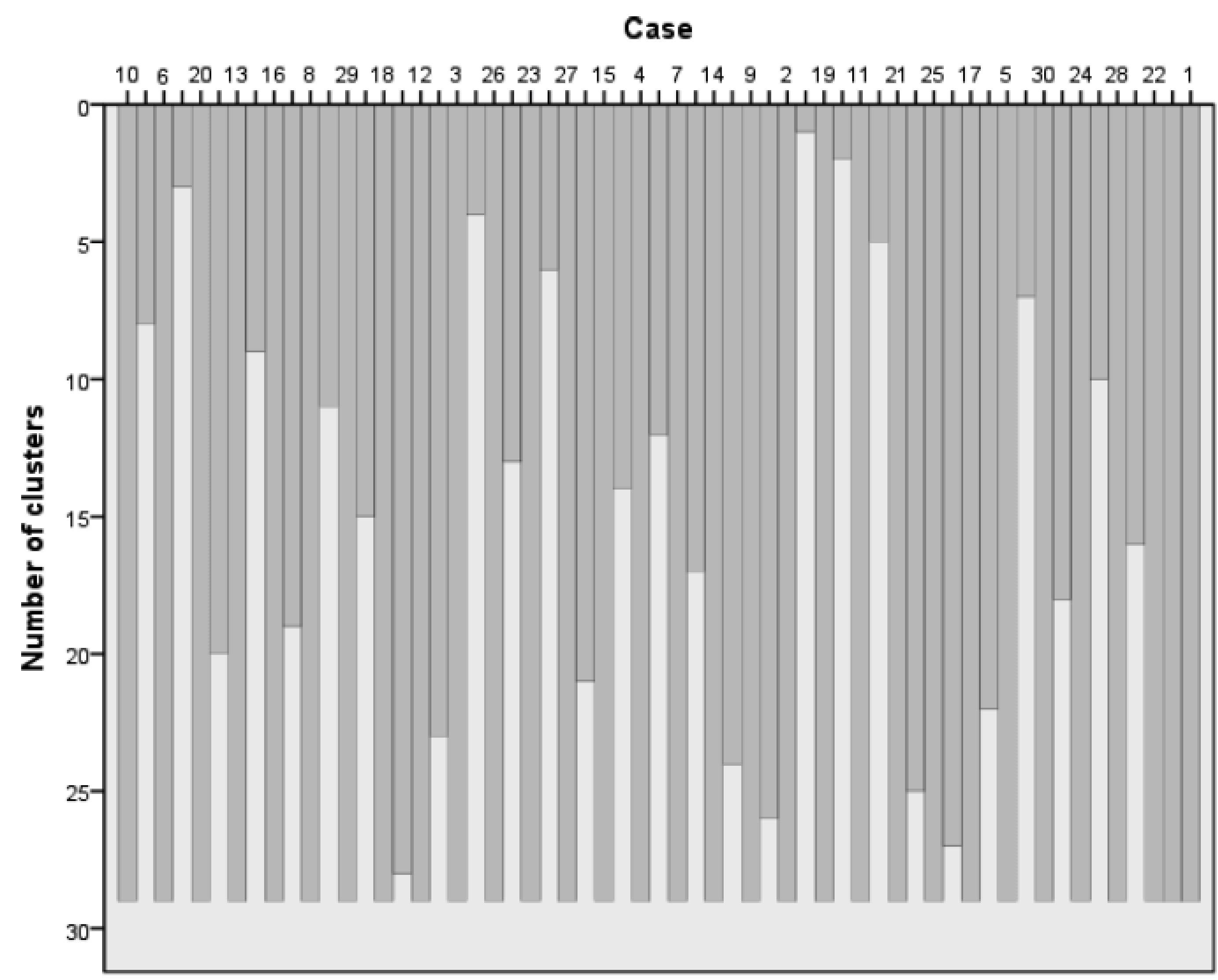


图 3-41　冰柱图

在图 3-41 中，白色的越矮，表示两者之间结合越紧密。例如 12 和 18 个案，2、9 和 14 等个案均是结合紧密的。冰柱图较难看，一般常常采用树状图进行分析，由此得到的树状图如图 3-42 所示。

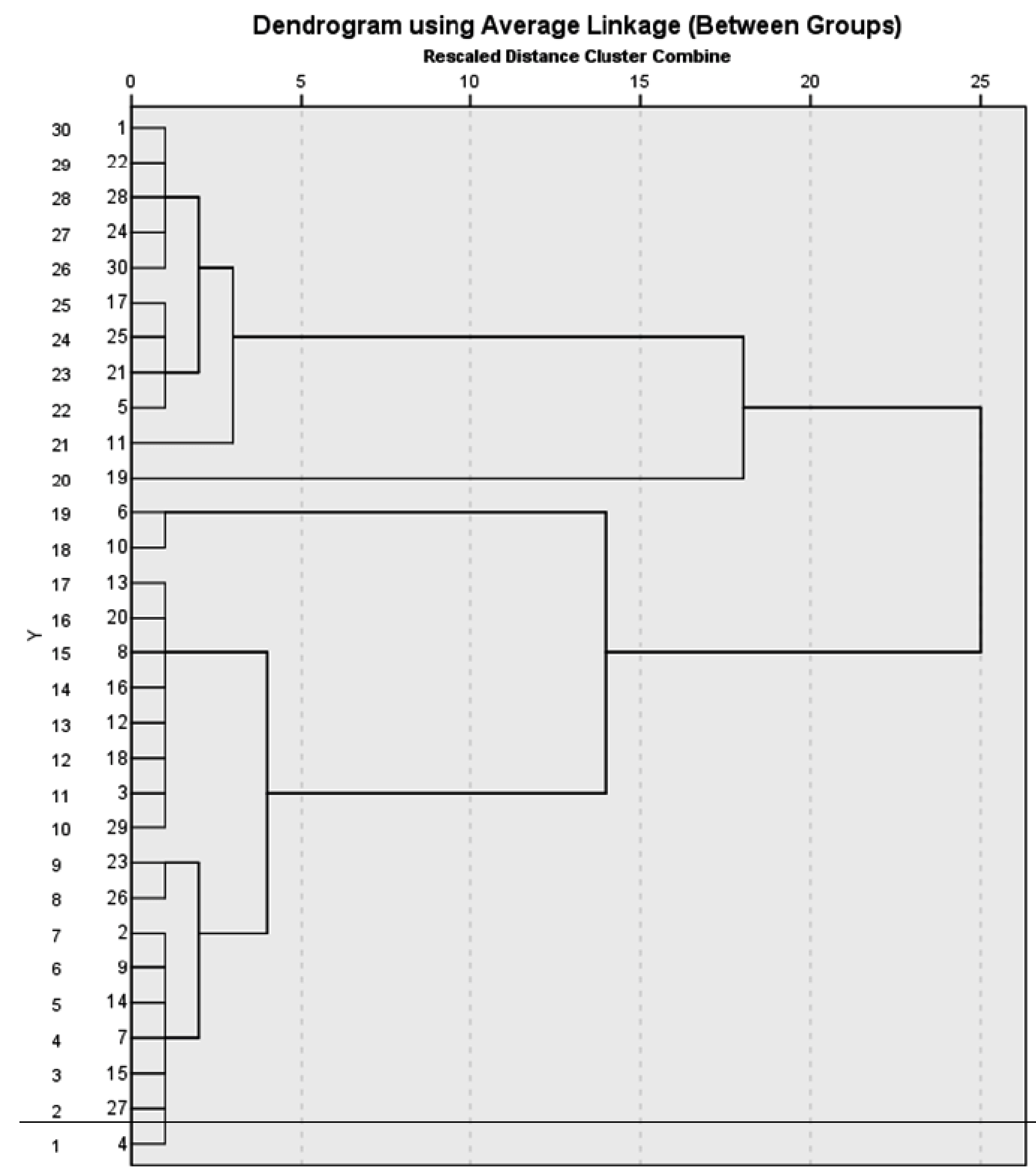


图 3-42　树状图

从图 3-42 中可清楚地看到系统聚类的结果，从每一级来看，系统可聚类为不同的数目，划分的细密些有（2、9、14、7、15、27、4）、（23、26）、（29、3、18、12、16、8、

20、13）、（10、6）、（11）、（19）、（5、21、27、17）、（1、22、28、24、30）八类，也可以划分为（2、9、14、7、15、27、4、23、26）、（29、3、18、12、16、8、20、13）、（10、6）、（11）、（19）、（5、21、27、17、1、22、28、24、30）六类；也可以更宽泛地划分为：（2、9、14、7、15、27、4、23、26、29、3、18、12、16、8、20、13）、（10、6）、（19）、（11、5、21、27、17、1、22、28、24、30）四类。选择组内联接，如图 3-43 所示。



图 3-43　组内聚类

单击“确定”按钮，得到如图 3-44 所示的树状图。

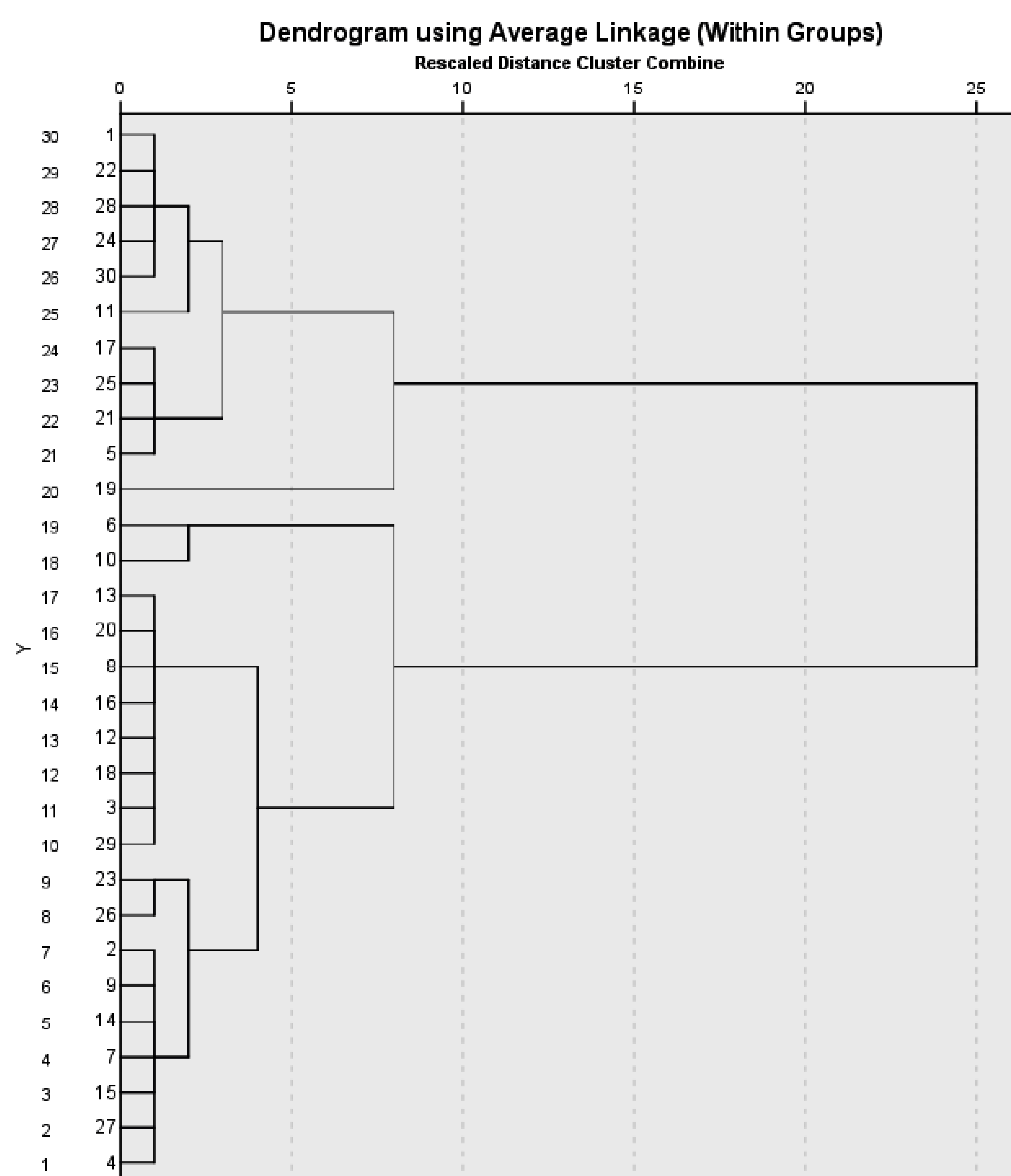


图 3-44　组内聚类树状图

从图 3-44 中可清楚地看到系统聚类的结果，从每一级来看，系统可聚类为不同的数目，划分的细密些有（2、9、14、7、15、27、4、23、26）、（29、3、18、12、16、8、20、13）、（10、6）、（19）、（5、21、27、17）、（1、22、28、24、30）6 类；也可以划分为（10、6）、（19）、（2、9、14、7、15、27、4、23、26、29、3、18、12、16、8、20、13）、（5、21、27、17、1、22、28、24、30）四类；也可以更宽泛地划分为（19、5、21、27、17、1、22、28、24、30）、（10、6、2、9、14、7、15、27、4、23、26、29、3、18、12、16、8、20、13、11、5、21、27、17、1、22、28、24、30）两类。

选择最近邻元素进行聚类，如图 3-45 所示。



图 3-45　最近邻聚类

单击“确定”按钮，得到如图 3-46 所示的树状图。

从图 3-46 中可清楚地看到系统聚类的结果，从每一级来看，系统可聚类为不同的数目，划分的细密些有（2、9、14、7、15、27、4、29、3、18、12、16、8、20、13）、（10、6）、（11）、（19）、（5、21、27、17、1、22、28、24、30）、（23、26）六类；也可以划分为（11、5、21、27、17、1、22、28、24、30）、（10、6）、（19）、（2、9、14、7、15、27、4、29、3、18、12、16、8、20、13、23、26）四类；也可以更宽泛地划分为（10、6）、（19）、（2、9、14、7、15、27、4、23、26、29、3、18、12、16、8、20、13、11、5、21、27、17、1、22、28、24、30）三类。

对比图 3-42、图 3-44 和图 3-46 可知，采用不同的聚类算法，得到的聚类结果有差异，然而主要的大类是没变化的，在此聚类中，（10、6）、（19）这两类一直比较异常，和其他个案相差很远，常常作为独立空间存在，这也可以作为异常个案进行数据预处理，然后再进行系统聚类。

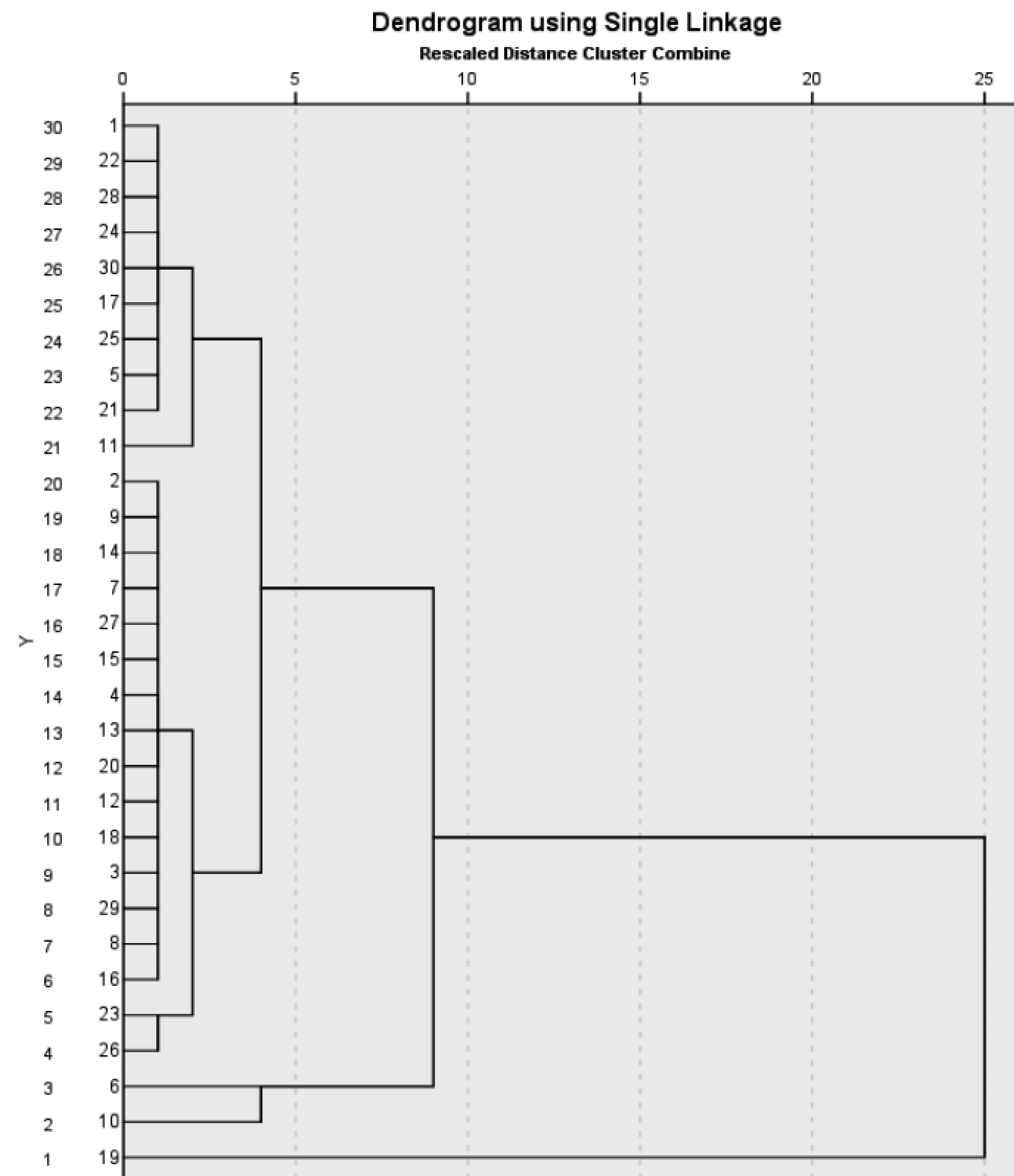


图 3-46　最近邻聚类树状图

第 4 章　数学建模基础理论及算法设计

本章围绕基本的数学建模常用算法进行讲解，具体包括分段函数的处理、数据的预处理分析、线性规划、非线性规划、层次分析方法、时间序列的指数平滑预测、时间序列的线性二次移动平均法、BP 神经网络、粒子群算法及最小树、最短路问题。数学建模可以总结为一些常用算法的综合设计，从不同角度出发进行比较，得到最优化的数学模型从而实现问题的求解。

学习目标：

（1）了解和掌握 MATLAB 基本算法处理功能；

（2）学习分段函数的处理和数据的预处理分析，并能结合实例进行应用求解；

（3）学习层次分析方法和 BP 神经网络等算法，并能结合实例进行应用求解；

（4）学习线性规划和非线性规划等方法，并能结合实例进行应用求解；

（5）学习时间序列的指数平滑预测和线性二次移动平均法等方法，并能结合实例进行应用求解；

（6）学习最小树和最短路问题等方法，并能结合实例进行应用求解；

（7）学习粒子群算法求解复杂函数模型极值等。

4.1　分段函数的一般处理方法

分段函数对于自变量 x 的不同取值范围，有着不同的对应法则，这样的函数通常叫做分段函数。它是一个函数，而不是几个函数。

设有限区间上的有界分段函数：

$$y=f(x)=\begin{cases}\phi_1(x), x\in(a_1,b_1)\\ \phi_2(x), x\in(a_2,b_2)\\ \vdots \\ \phi_n(x), x\in(a_n,b_n)\end{cases}$$

这里 $a_1<b_1\leqslant a_2<b_2\cdots\leqslant a_n<b_n$。

则该分段函数与下面的模型等价：

$$\begin{cases}y=y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n\\ z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n=1, z_i\in\{0,1\}\\ a_i-x\leqslant U*(1-z_i), i=1,2,3,\cdots,n\\ x-b_i\leqslant U*(1-z_i), i=1,2,3,\cdots,n\\ -U*z_i\leqslant y_i\leqslant U*z_i, i=1,2,3,\cdots,n\\ \varphi_i(x)-U*(1-z_i)\leqslant y_i\leqslant\varphi_i(x)+U*(1-z_i), i=1,2,3,\cdots,n\end{cases}$$

说明：（1）$z_i \in \{0,1\}$ 为 0-1 变量，标识 $f(x)$ 取哪一段；

（2）y_i 的取值要么为 0，要么为 $\phi_i(x)$；

（3）U 是函数 $f(x)$ 的一个界，是一个足够大的正数。

其他值得说明的问题：

（1）若 $a_i = b_i$，则为离散情况，以上模型仍然成立；

（2）以上结果可以推广到多元分段函数的情况。

分段函数在 1998 年全国大学生数学建模竞赛 A 题——投资的收益和风险一题中，通过上述方法的处理，模型从多目标非线性规划问题转为一般的整型线性规划问题，大大地减小了计算。

【例 4-1】市场上有 n 种资产（如股票、债券、…），S_i（i=1,…n）供投资者选择，某公司有数额为 M 的一笔相当大的资金可用作一个时期的投资。公司财务分析人员对这 n 种资产进行了评估，估算出在这一时期内购买 S_i 的平均收益率为 r_i，并预测出购买 S_i 的风险损失率为 q_i。考虑到投资越分散，总的风险越小，公司决定，当用这笔资金购买若干种资产时，总体风险可用所投资的 S_i 中最大的一个风险来度量。购买 S_i 要付交易费，费率为 p_i，并且当购买额不超过给定值 u_i 时，交易费按购买 u_i 计算（不买当然无须付费）。另外，假定同期银行存款利率是 r_0，且既无交易费又无风险（r_0=5%）。试给该公司设计一种投资组合方案，即用给定的资金 M，有选择地购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，而总体风险尽可能小。要求利用以下数据进行计算，如表 4-1 所示。

表 4-1　数据表

S_i	r_i(%)	q_i(%)	p_i(%)	u_i(元)
S1	9.6	42	2.1	181
S2	18.5	54	3.2	407
S3	49.4	60	6	428
S4	23.9	42	1.5	549
S5	8.1	1.2	7.6	270
S6	14	39	3.4	397
S7	40.7	68	5.6	178
S8	31.2	33.4	3.1	220
S9	33.6	53.3	2.7	475
S10	36.8	40	2.9	248
S11	11.8	31	5.1	195
S12	9	5.5	5.7	320
S13	35	46	2.7	267
S14	9.4	5.3	4.5	328
S15	15	23	7.6	131

问题的数学模型（多目标非线性规划）如下。

净收益最大：

$$\max Q(x) = r_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i, i = 1,2,3,\cdots,n$$

总体风险最小：

$$\min F(x)=(q_i x_i), i=1,2,3,\cdots,n$$

约束条件：

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}p_i y_i=M & ,i=1,2,3,\cdots,n\\ x_i\geqslant 0 \quad ,i=1,2,3,\cdots,n\\ y_i=\begin{cases}x_i & ,x_i>u_i\\ u_i & ,0<x_i\leqslant u_i,i=1,2,3,\cdots,n\\ 0 & ,x_i=0\end{cases}\end{cases}$$

对于 n 个分段函数：

$$y_i=\begin{cases}x_i,u_i<x_i<M\\ u_i,0<x_i\leqslant u_i\\ 0,x_i=0\end{cases}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

其等价模型为：

$$\begin{cases}y_i=z_{i1}+z_{i2}+z_{i3}\\ b_{i1}+b_{i2}+b_{i3}=1\,,b_{ij}\in\{0,1\}\\ u_i-x\leqslant 2M*(1-b_{i1})\,,x-M\leqslant 2M*(1-b_{i1})\\ -x\leqslant 2M*(1-b_{i2})\,,x-u_i\leqslant 2M*(1-b_{i2})\\ -x\leqslant 2M*(1-b_{i3})\,,x\leqslant 2M*(1-b_{i3})\\ -2M*b_{i1}\leqslant z_{i1}\leqslant 2M*b_{i1}\,,x_i-2M*(1-b_{i1})\leqslant z_{i1}\leqslant x_i+2M*(1-b_{i1})\\ -2M*b_{i2}\leqslant z_{i2}\leqslant 2M*b_{i2}\,,u_i-2M*(1-b_{i2})\leqslant z_{i2}\leqslant u_i+2M*(1-b_{i2})\\ z_{i3}=0\end{cases}$$

于是原模型可以转化为一个整数线性规划模型。

对于该整数线性规划问题，采用 LINGO 数学软件即可轻易求解，具体的 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
S/1..15/:x,y,r,p,q,u,z1,z2,z3,b1,b2,b3;
endsets

max=r0*x0/100+@Sum(S:r*x/100)-@Sum(S:p*y/100);   !净收益=投资收益-交易费
@For(S:q*x/100<M*bili);                            !风险作为约束
x0+@Sum(S:x)+@Sum(S:p*y/100)=M;

@For(S:y=z1+z2+z3);                    !yi=zi1+zi2+zi3 作为约束
@For(S:b1+b2+b3=1);                    !bi1+bi2+bi3=1 作为约束
@For(S:u-x<2*M* (1-b1)); @For(S:x-M<2*M* (1-b1));
@For(S:-x<2*M* (1-b2)); @For(S:x-u<2*M* (1-b2));
@For(S:-x<2*M* (1-b3)); @For(S:x<2*M* (1-b3));

@For(S:-2*M*b1<z1); @For(S:z1<2*M*b1);
@For(S:x-2*M* (1-b1)<z1); @For(S:z1<x+2*M* (1-b1));
@For(S:-2*M*b2<z2); @For(S:z2<2*M*b2);
@For(S:u-2*M* (1-b2)<z2); @For(S:z2<u+2*M* (1-b2));
@For(S:z3=0);
```

```
@For(S:@Bin(b1));  !0-1 变量设置
@For(S:@Bin(b2));  !0-1 变量设置
@For(S:@Bin(b3));  !0-1 变量设置

data:
 M=4000;            !总资金
 bili=0.05;         !风险比例，你可以修改之
r0=5;               !银行利率(%)
 r=9.6  18.5  49.4  23.9  8.1  14  40.7  31.2  33.6  36.8  11.8  9  35  9.4
15;  !收益率(%)
 q=42   54  60  42  1.2  39  68  33.4  53.3  40  31  5.5  46  5.3  23;  !风
险损失率(%)
p=2.1    3.2  6  1.5  7.6  3.4  5.6  3.1  2.7  2.9  5.1  5.7  2.7  4.5
7.6;  !交易费率(%)
u=181    407  428  549  270  397  178  220  475  248  195  320  267  328
131;  !最低交易费(元)

enddata
end
```

运行程序输出结果如下：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          1045.604
Objective bound:                          1045.604
Infeasibilities:                         0.3694822E-12
Extended solver steps:                           2
Total solver iterations:                       175


                                  Variable           Value
                                        R0        5.000000
                                        X0        0.000000
                                         M        4000.000
                                      BILI      0.5000000E-01
                                    X( 1)        0.000000
                                    X( 2)        370.3704
                                    X( 3)        333.3333
                                    X( 4)        476.1905
                                    X( 5)        0.000000
                                    X( 6)        479.8182
                                    X( 7)        294.1176
                                    X( 8)        598.8024
                                    X( 9)        375.2345
                                   X( 10)        500.0000
                                   X( 11)        0.000000
                                   X( 12)        0.000000
                                   X( 13)        434.7826
                                   X( 14)        0.000000
                                   X( 15)        0.000000
                                    Y( 1)        0.000000
                                    Y( 2)        407.0000
                                    Y( 3)        428.0000
                                    Y( 4)        549.0000
                                    Y( 5)        0.000000
                                    Y( 6)        479.8182
                                    Y( 7)        294.1176
                                    Y( 8)        598.8024
                                    Y( 9)        475.0000
                                   Y( 10)        500.0000
```

```
                                    Y( 11)        0.000000
                                    Y( 12)        0.000000
                                    Y( 13)        434.7826
                                    Y( 14)        0.000000
                                    Y( 15)        0.000000
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
                                    B2( 1)        0.000000
                                    B2( 2)        1.000000
                                    B2( 3)        1.000000
                                    B2( 4)        1.000000
                                    B2( 5)        0.000000
                                    B2( 6)        0.000000
                                    B2( 7)        0.000000
                                    B2( 8)        0.000000
                                    B2( 9)        1.000000
                                   B2( 10)        0.000000
                                   B2( 11)        0.000000
                                   B2( 12)        0.000000
                                   B2( 13)        0.000000
                                   B2( 14)        0.000000
                                   B2( 15)        0.000000
                                    B3( 1)        1.000000
                                    B3( 2)        0.000000
                                    B3( 3)        0.000000
                                    B3( 4)        0.000000
                                    B3( 5)        1.000000
                                    B3( 6)        0.000000
                                    B3( 7)        0.000000
                                    B3( 8)        0.000000
                                    B3( 9)        0.000000
                                   B3( 10)        0.000000
                                   B3( 11)        1.000000
                                   B3( 12)        1.000000
                                   B3( 13)        0.000000
                                   B3( 14)        1.000000
                                   B3( 15)        1.000000
```

4.2　数据预处理与标准化方法

【例 4-2】将一个人的体重和身高相加在一起有无什么意义？

答：量纲（就是单位）不同的量相加是没有意义的。不加处理就将两个不同量纲的量相加这是数学建模的大忌！

【例 4-3】如何将一个人的体重 G 和身高 H 这两个指标综合为一个指标用以评价一个人的身材？

答：通常考虑加法模型和乘法模型。乘法模型在这里不太适合，故考虑加法模型，一般采用加权组合的方式，即 $P = w_1 G + w_2 H$ ，这里 $w_1 + w_2 = 1$，但是这样就犯了一个严重的错误。

因此需要先对 G、H 进行预处理，即无量纲化，也就是数据标准化方法。

数据标准化方法主要有以下三种。

（1）规范化方法

对序列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 进行变换：

$$y_i = \frac{x_i - \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\{x_j\}}{\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\{x_j\} - \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\{x_j\}}$$

则新序列 $y_1, y_2, \ldots, y_n \in [0,1]$ 且无量纲。一般的数据需要时都可以考虑先进行规范化处理。

（2）正规化方法

对序列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 进行变换：

$$y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

其中，$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$，$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$。

则新序列 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的均值为 0，而方差为 1，且无量纲。

（3）归一化方法

对正项序列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 进行变换：

$$y_i = \frac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$$

则新序列 $y_1, y_2, \ldots, y_n \in [0,1]$ 且无量纲，并且显然有 $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 1$。

归一化方法在确定权重时经常用到。

针对实际情况，也可能有其他一些量化方法，比如对定性的数据采用隶属函数的方法进行量化处理，或者要综合使用多种方法，总之最后的结果都是无量纲化。

【例 4-4】DVD 分发问题中满意度的量化（2005 年赛题）。

现有 20 种 DVD 要分发给 100 个会员，规定如果要向某人发放 DVD，则一次发给 3 张，问如何对这些 DVD 进行分配，才能使会员获得最大的满意度？

表 4-2　数据表

DVD 编号		D001	D002	D003	D004	D005	D006	……
DVD 现有数量		8	1	22	10	8	40	……
会员偏好	C0001	0	0	2	0	0	0	……
	C0002	1	0	9	0	0	7	……
	C0003	0	6	0	0	0	7	……
	C0004	0	0	0	0	4	0	……
	C0005	5	0	0	0	0	4	……
	………							

注：表 4-2 中的数字越小表示会员的偏爱程度越高，数字 0 表示对应的 DVD 当前不在会员的订单中。

在此考虑三种方法进行变换，然后对它们进行比较。

（1）利用公式 $f_1(x)=\dfrac{11-x}{10}$；

（2）利用公式 $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$；

（3）利用模糊数学中的隶属函数的概念，选取合适的函数，对满意度进行量化，具体如下：

$$\begin{cases} f_3(x)=a\ln(11-x)+b, 1\leqslant x\leqslant 10 \\ s.t.\begin{cases} f_3(1)=1 \\ f_3(10)=0.05 \end{cases} \end{cases}$$

由此可知：$f_3(x)=0.41258\ln(11-x)+0.05, 1\leqslant x\leqslant 10$

三种量化方法的比较，如图 4-1 所示。

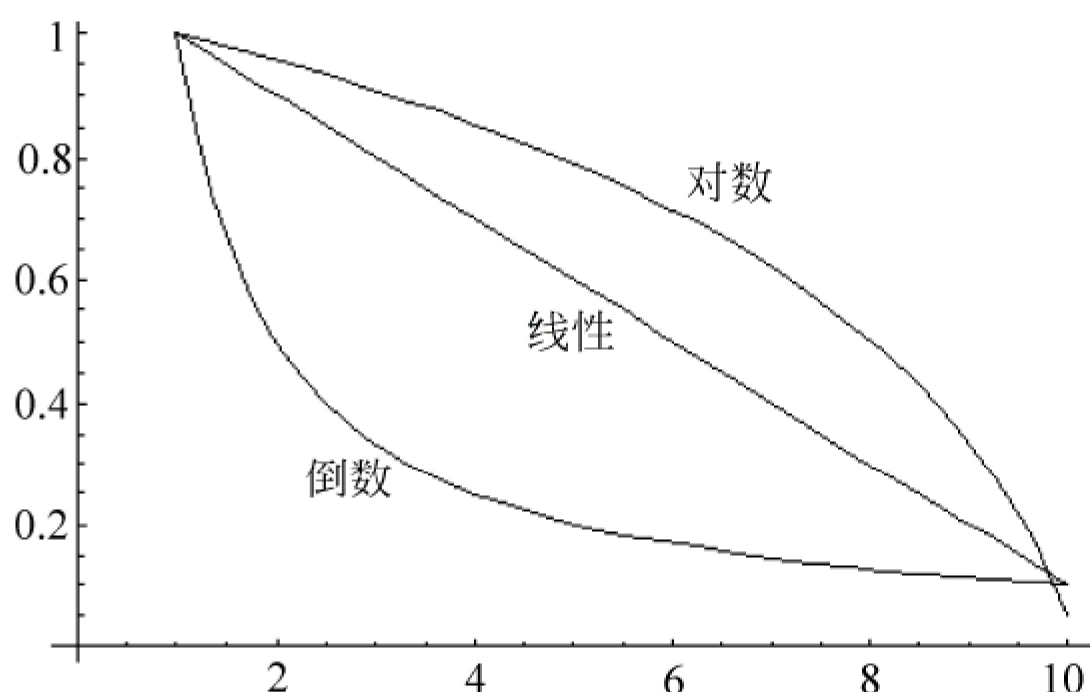


图 4-1　量化曲线

由图 4-1 可知，倒数函数可行；线性函数不太可取；利用模糊数学中的隶属函数的概念可行。

注意：无论采用哪一种方法，对每一个会员的满度度均需要作归一化处理，使得每一个会员对选中的 DVD 的满意度之和等于 1，（算出的每人的满意度或综合满意度都应该介于 0-1 之间）。

【例 4-5】长江水质的定量综合评价（2005 年赛题）。

表 4-3 是《地表水环境质量标准》，给出了水质类别的分类标准。

表 4-3　水质类别表

序号	分类 / 标准值 / 项目	Ⅰ类	Ⅱ类	Ⅲ类	Ⅳ类	Ⅴ类	劣Ⅴ类
1	溶解氧(DO)⩾	7.5（或饱和率 90%）	6	5	3	2	0
2	高锰酸盐指数(COD_{Mn})⩽	2	4	6	10	15	∞
3	氨氮（NH_3-N）⩽	0.15	0.5	1.0	1.5	2.0	∞
4	PH 值（无量纲）	6-9					

表 4-4 给出了 17 个观测点的水质情况。

表 4-4　水质数据表

序号	点位名称	断面情况	主要监测项目（单位：mg/L）				水质类别
			pH	DO	COD_{Mn}	NH_3-N	本月
1	四川攀枝花	干流	7.6	6.8	0.2	0.1	II
2	重庆朱沱	干流（川-渝省界）	7.63	8.41	2.8	0.34	II
3	湖北宜昌南津关	干流（三峡水库出口）	7.07	7.81	5.8	0.55	III
4	湖南岳阳城陵矶	干流	7.58	6.47	2.9	0.34	II
5	江西九江河西水厂	干流（鄂-赣省界）	7.34	6.19	1.7	0.13	II
6	安徽安庆皖河口	干流	7.52	6.54	3.2	0.22	II
7	江苏南京林山	干流（皖-苏省界）	7.78	6.9	3.1	0.11	II
8	四川乐山岷江大桥	岷江（与大渡河汇合前）	7.66	4.2	5.8	0.53	IV
9	四川宜宾凉姜沟	岷江（入长江前）	8.01	7.63	2.4	0.25	II
10	四川泸州沱江二桥	沱江（入长江前）	7.63	4.02	3.6	1.06	IV
11	湖北丹江口胡家岭	丹江口水库（库体）	8.63	10.2	1.8	0.1	I
12	湖南长沙新港	湘江（洞庭湖入口）	7.42	6.45	4.3	0.99	III
13	湖南岳阳岳阳楼	洞庭湖出口	7.73	6.26	1.4	0.21	II
14	湖北武汉宗关	汉江（入长江前）	8	6.43	2.4	0.17	II
15	江西南昌滁槎	赣江（鄱阳湖入口）	6.64	5.18	1.1	0.92	III
16	江西九江蛤蟆石	鄱阳湖出口	7.28	6.87	2.7	0.15	II
17	江苏扬州三江营	夹江（南水北调取水口）	7.29	6.9	1.6	0.15	II

分析水质的类别的确定可知：它是由首要污染物决定的。

由表 4-3 和表 4-4 可知，溶解氧是极大型指标（指标越大，水质越好），PH 值是居中型指标，其余两种是极小型指标，统一进行极小型处理。

（1）溶解氧：$P_{i1}^{*}=\dfrac{1}{P_{i1}},i=1,2,3,\cdots,17$；

（2）PH 值：$P_{i4}^{*}=\left|P_{i4}-7\right|,i=1,2,3,\cdots,17$；

然后对 $P_{i1}^{*},P_{i2}^{*},P_{i3}^{*},P_{i4}^{*}$ 进行规范化处理，即：

$$x_{ij}=\frac{P_{ij}^{*}-\min\limits_{i}}{\max\limits_{i}-\min\limits_{i}},i=1,2,3,\cdots,17,j=1,2,3,4$$

得到规范化矩阵 $X=(x_{ij})_{17\times4}$，这里 $x_{ij}\in[0,1]$ 且无量纲。

对数据标准化处理后，再确定四种指标的权重（变权函数的确定），然后进行最后的综合评价。

因此数据的标准化处理方法在数学建模过程中有着举足轻重的作用，应该引起数模爱好者的注意。

4.3　线性规划

线性规划是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛和方法较成熟的一个重要分支，它是辅助人们进行科学管理的一种数学方法。研究线性约束条件下线性目标函数的极值问题的数学理论和方法，英文缩写 LP。它是运筹学的一个重要分支，广泛应用于军事作战、

经济分析、经营管理和工程技术等方面。为合理地利用有限的人力、物力和财力等资源作出的最优决策，提供科学的依据。

在解决实际问题时，把问题归结成一个线性规划数学模型是很重要的一步，但往往也是困难的一步，模型建立得是否恰当，直接影响到求解。而选取适当的决策变量，是我们建立有效模型的关键之一。

线性规划的目标函数可以是求最大值，也可以是求最小值，约束条件的不等号可以是小于号也可以是大于号。为了避免这种形式多样性带来的不便，规定线性规划的标准形式为：

$$\min_{x} \quad c^T x$$
$$s.t.$$
$$Ax \leqslant b$$

其中，c 和 x 为 n 维列向量，b 为 m 维列向量，A 为 $m \times n$ 矩阵。

假设如下线性规划模型：

$$\min_{x} \quad c^T x$$
$$s.t.$$
$$Ax \geqslant b$$

转化标准型为：

$$\min_{x} \quad -c^T x$$
$$s.t.$$
$$-Ax \leqslant -b$$

数学建模竞赛中则常常遇到的一般线性规划问题的标准型为：

$$\min \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

（1）可行解：满足约束条件的解 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，称为线性规划问题的可行解，而使目标函数达到最小值的可行解叫最优解。

（2）可行域：所有可行解构成的集合称为问题的可行域，记为 R。

在 MATLAB 中基本函数形式为：

[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X0,OPTIONS)

其中，*fval* 返回目标函数的值，*Aeq* 和 *beq* 对应等式约束 $Aeq * x = beq$，*LB* 和 *UB* 分别是变量 x 的下界和上界，x_0 是 x 的初始值，OPTIONS 是控制参数。

【例 4-6】求解下列线性规划问题：

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \geqslant 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

（1）采用 MATLAB 编程求解，由此编写 M 文件，MATLAB 程序如下：

```
c=[2;3;-5];               %目标函数系数
a=[-2,5,-1]; b=-10;       %不等式系数
aeq=[1,1,1];              %等式系数
beq=7;                    %等式右边值
x=linprog(c,a,b,aeq,beq,zeros(3,1))  %线性规划
value=c'*x
```

运行程序得出结果如下：

```
Optimization terminated.
x =
    3.0000
    0.0000
    4.0000
value =
  -14.0000
```

（2）采用 LINGO 软件进行编程计算，编程如下：

```
min 2x1+3x2-5x3    %目标函数
st
x1+x2+x3=7         %等式约束
2x1-5x2+x3>=10
end
```

运行程序得出结果如下：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                           -14.00000
Infeasibilities:                            0.000000
Total solver iterations:                           2


                 Variable           Value        Reduced Cost
                       X1        3.000000            0.000000
                       X2        0.000000            50.00000
                       X3        4.000000            0.000000

                      Row    Slack or Surplus      Dual Price
                        1       -14.00000           -1.000000
                        2        0.000000            12.00000
                        3        0.000000           -7.000000
```

4.4　非线性规划

非线性规划是具有非线性约束条件或目标函数的数学规划，是运筹学的一个重要分支。非线性规划是 20 世纪 50 年代才开始形成的一门新兴学科。70 年代又得到进一步的发展。非线性规划在工程、管理、经济、科研和军事等方面都有广泛的应用，为最优设计提供了有力的工具。

对于一个实际问题，在把它归结成非线性规划问题时，一般要注意如下几点。

（1）确定供选方案：首先要收集同问题有关的资料和数据，在全面熟悉问题的基础上，确认什么是问题的可供选择的方案，并用一组变量来表示它们。

（2）提出追求目标：经过资料分析，根据实际需要和可能，提出要追求极小化或极大化的目标。并且，运用各种科学和技术原理，把它表示成数学关系式。

（3）给出价值标准：在提出要追求的目标之后，要确立所考虑目标的“好”或“坏”的价值标准，并用某种数量形式来描述它。

（4）寻求限制条件：由于所追求的目标一般都要在一定的条件下取得极小化或极大化效果，因此还需要寻找出问题的所有限制条件，这些条件通常用变量之间的一些不等式或等式来表示。

MATLAB 中非线性规划的数学模型写成以下形式：

$$\min f(x)$$

$$\begin{cases} Ax \leqslant B \\ Aeq \cdot x = Beq \\ C(x) \leqslant 0 \\ Ceq(x) = 0 \end{cases}$$

其中，$f(x)$ 是标量函数，A, B, Aeq, Beq 是相应维数的矩阵和向量，$C(x), Ceq(x)$ 是非线性向量函数。

MATLAB 调用的命令是：

```
x = fmincon(fun,x0,A,b)
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq)
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)
[x,fval] = fmincon(…)
[x,fval,exitflag] = fmincon(…)
[x,fval,exitflag,output] = fmincon(…)
[x,fval,exitflag,output,lambda] = fmincon(…)
[x,fval,exitflag,output,lambda,grad] = fmincon(…)
[x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] = fmincon(…)
```

参数说明：fun 为目标函数，它可用前面的方法定义；

$x0$ 为初始值；

A、b 满足线性不等式约束 $A \cdot x \leqslant b$，若没有不等式约束，则取 A=[ ]，b=[ ]；

Aeq、beq 满足等式约束 $Aeq \cdot x = beq$，若没有，则取 Aeq = [ ]，beq = [ ]；

lb、ub 满足 $lb \leqslant x \leqslant ub$，若没有界，可设 lb = [ ]，ub = [ ]；

nonlcon 的作用是通过接受的向量 x 来计算非线性不等约束 $C(x) \leqslant 0$ 和等式约束 $Ceq(x) = 0$ 分别在 x 处的估计 C 和 Ceq，通过指定函数柄来使用，如>>x = fmincon(@myfun, x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@mycon)。先建立非线性约束函数，并保存为 mycon.m：function [C,Ceq] = mycon(x)

C = ⋯　　%计算 x 处的非线性不等约束 $C(x) \leqslant 0$ 的函数值。

Ceq = ⋯　　%计算 x 处的非线性等式约束 $Ceq(x) = 0$ 的函数值。

lambda 是 Lagrange 乘子，它体现哪一个约束有效。

output 输出优化信息；

grad 表示目标函数在 x 处的梯度；

hessian 表示目标函数在 x 处的 Hessiab 值。

【例 4-7】求下面问题在初始点（0，1）处的最优解。

$$\left(x_1^2+x_2^2-x_1x_2-2x_1-5x_2\right)_{\min}$$

其中，

$$\begin{cases}-\left(x_1-1\right)^2+x_2\geqslant 0\\-2x_1+3x_2\leqslant 6\end{cases}$$

约束条件的标准形式为：

$$\begin{cases}\left(x_1-1\right)^2-x_2\leqslant 0\\-2x_1+3x_2\leqslant 6\end{cases}$$

先在 MATLAB 编辑器中建立非线性约束函数文件：

```
function  [c, ceq]=mycon (x)
c=(x(1)-1)^2-x(2);
ceq=[ ];        %无等式约束
```

然后，在命令窗口输入如下命令或建立 M 文件：

```
>>fun='x(1)^2+x(2)^2-x(1) *x(2)-2*x(1)-5*x(2)';     %目标函数
>>x0=[0 1];
>>A=[-2 3];     %线性不等式约束
>>b=6;
>>Aeq=[ ];      %无线性等式约束
>>beq=[ ];
>>lb=[ ];        %x 没有下、上界
>>ub=[ ];
>>[x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian]
=fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@mycon)
```

运行程序结果如下：

```
x =
    3     4
fval =
   -13
exitflag =       %解收敛
    1
output =
       iterations: 2
        funcCount: 9
         stepsize: 1
        algorithm: 'medium-scale: SQP, Quasi-Newton, line-search'
    firstorderopt: [ ]
     cgiterations: [ ]
lambda =
         lower: [2x1 double]   %x 下界有效情况，通过 lambda.lower 可查看
         upper: [2x1 double]   %x 上界有效情况，为 0 表示约束无效
         eqlin: [0x1 double]   %线性等式约束有效情况，不为 0 表示约束有效
      eqnonlin: [0x1 double]   %非线性等式约束有效情况
       ineqlin: 2.5081e-008    %线性不等式约束有效情况
    ineqnonlin: 6.1938e-008    %非线性不等式约束有效情况
grad =      %目标函数在最小值点的梯度
  1.0e-006 *
   -0.1776
         0
```

```
hessian =     %目标函数在最小值点的 Hessian 值
    1.0000   -0.0000
   -0.0000    1.0000
```

4.5　层次分析法

层次分析法（Analytic Hierarchy Process，简称 AHP）是将与决策总是有关的元素分解成目标、准则和方案等层次，在此基础之上进行定性和定量分析的决策方法。该方法是美国运筹学家匹茨堡大学教授萨蒂于 20 世纪 70 年代初，在为美国国防部研究“根据各个工业部门对国家福利的贡献大小而进行电力分配”课题时，应用网络系统理论和多目标综合评价方法，提出的一种层次权重决策分析方法。

层次分析法的特点是在对复杂的决策问题的本质、影响因素及其内在关系等进行深入分析的基础上，利用较少的定量信息使决策的思维过程数学化，从而为多目标、多准则或无结构特性的复杂决策问题提供简便的决策方法。尤其适合于对决策结果难于直接准确计量的场合。

4.5.1　层次分析法的基本原理与步骤

运用层次分析法建模，大体上可按下面四个步骤进行。

1. 建立递阶层次结构模型

应用层次分析法分析决策问题时，首先要把问题条理化和层次化，构造出一个有层次的结构模型。在这个模型下，复杂问题被分解为元素的组成部分。这些元素又按其属性及关系形成若干层次。上一层次的元素作为准则对下一层次有关元素起支配作用。这些层次可以分为三类。

1）最高层：这一层次中只有一个元素，一般它是分析问题的预定目标或理想结果，因此也称为目标层；

2）中间层：这一层次中包含了为实现目标所涉及的中间环节，它可以由若干个层次组成，包括所需考虑的准则和子准则，因此也称为准则层；

3）最底层：这一层次包括了为实现目标可供选择的各种措施和决策方案等，因此也称为措施层或方案层。

2. 构造出各层次中的所有判断矩阵

层次结构反映了因素之间的关系，但准则层中的各准则在目标衡量中所占的比重并不一定相同，在决策者的心目中，它们各占有一定的比例。

Saaty 等人采取对因子进行两两比较建立成对比较矩阵的办法，即每次取两个因子 x_i 和 x_j，以 a_{ij} 表示 x_i 和 x_j 对 Z 的影响大小之比，全部比较结果用矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示，称 A 为 $Z-X$ 之间的成对比较判断矩阵（简称判断矩阵）。容易看出，若 x_i 和 x_j 对 Z 的影响之比为 a_{ij}，则 x_j 与 x_i 对 Z 的影响之比应为 $a_{ji}=\dfrac{1}{a_{ij}}$。

关于如何确定 a_{ij} 的值，Saaty 等建议引用数字 1～9 及其倒数作为标度。表 4-5 列出了 1～9 标度的含义。

表 4-5　因子对比标度

标　　度	含　　义
1	表示两个因素相比，具有相同重要性
3	表示两个因素相比，前者比后者稍重要
5	表示两个因素相比，前者比后者明显重要
7	表示两个因素相比，前者比后者强烈重要
9	表示两个因素相比，前者比后者极端重要
2,4,6,8	表示上述相邻判断的中间值
倒数	若因素 i 与因素 j 的重要性之比为 a_{ij}，那么因素 j 与因素 i 重要性之比为 $a_{ji}=1/a_{ij}$

表 4-5 列举的因子对比标度为 9 个，一般层次分析法，分级为 9 级。从心理学观点来看，分级太多会超越人们的判断能力，既增加了做判断的难度，又容易因此而提供虚假数据。Saaty 等人还用实验方法比较了在各种不同标度下人们判断结果的正确性，实验结果也表明，采用 1～9 标度最为合适。

3．层次单排序及一致性检验

判断矩阵 A 对应于最大特征值 $\lambda_{\max}$ 的特征向量 W，经归一化后即为同一层次相应因素对于上一层次某因素相对重要性的排序权值，这一过程称为层次单排序。

若 A 的最大特征值 $\lambda_{\max}$ 对应的特征向量为 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$，则 $a_{ij}=w_i/w_j$，$\forall i,j=1,2,\cdots,n$，即：

$$A=\begin{bmatrix} \dfrac{w_1}{w_1} & \dfrac{w_1}{w_2} & \cdots & \dfrac{w_1}{w_n} \\ \dfrac{w_2}{w_1} & \dfrac{w_2}{w_2} & \cdots & \dfrac{w_2}{w_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{w_n}{w_1} & \dfrac{w_n}{w_2} & \cdots & \dfrac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

对判断矩阵的一致性检验的步骤如下：

1）计算一致性指标 CI，CI 定义如下式所示。

$$CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$$

2）查找相应的平均随机一致性指标 RI。对 $n=1,\cdots,9$，Saaty 给出了 RI 的值，如表 4-6 所示。

表 4-6　不同 n 值对应的 RI 值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

如表 4-6 所示，RI 的值是通过统计计算而得，如下式。用随机方法构造 1000 个样本矩阵：随机地从 1～9 及其倒数中抽取数字构造正互反矩阵，求得最大特征根的平均值

$\lambda'_{\max}$，并定义：

$$RI = \frac{\lambda'_{\max} - n}{n-1}$$

3）计算一致性比例 CR，CR 定义如下式所示。

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

当 $CR < 0.10$ 时，认为判断矩阵的一致性是可以接受的，否则应对判断矩阵做适当修正。

4．层次总排序及一致性检验

通过层次单排序及一致性检验操作后，得到一组元素对其上一层中某元素的权重向量。然而最终需要得到最低层中各方案对于目标的排序权重，从而进行方案选择。总排序权重要自上而下地将单准则下的权重进行合成。

设上一层次（A 层）包含 $A_1, A_2, \cdots A_m$ 共 m 个因素，它们的层次总排序权重分别为 $a_1, \cdots, a_m$。又设其后的下一层次（B 层）包含 n 个因素 $B_1, \cdots, B_n$，它们关于 A_j 的层次单排序权重分别为 $b_{1j}, \cdots, b_{nj}$（当 B_i 与 A_j 无关联时，$b_{ij} = 0$）。现求 B 层中各因素关于总目标的权重，即求 B 层各因素的层次总排序权重 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，计算按表 4-7 所示方式进行，即 $b_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_j$， $i = 1, \cdots, n$。

表 4-7　各层排序权重

层 B\层 A	A_1	A_2	……	A_n	B 层总排序权值
	a_1	a_2	……	a_m	
B_1	b_{11}	b_{12}	……	b_{1m}	$\sum_{j=1}^{m} b_{1j} a_j$
B_2	b_{21}	b_{22}	……	b_{2m}	$\sum_{j=1}^{m} b_{2j} a_j$
B_3	b_{31}	b_{32}	……	b_{3m}	$\sum_{j=1}^{m} b_{3j} a_j$
⋮	⋮	⋮	……	⋮	⋮
B_{n-1}	$b_{(n-1)1}$	$b_{(n-1)2}$	……	$b_{(n-1)m}$	$\sum_{j=1}^{m} b_{(n-1)} a_j$
B_n	b_{n1}	b_{n2}	……	b_{nm}	$\sum_{j=1}^{m} b_{(nj)} a_j$

4.5.2　层次分析法应用举例

面对严峻的就业形势，大学生就业成为社会热点话题。然而大学生在就业时，也会思考工作的可接受度，从而挑选适合自己的工作。假设一名毕业生经双方恳谈，已有三个单位表示愿意录用该毕业生。该生根据已有信息建立了一个层次结构模型，如图 4-2 所示。

针对目标层 A 工作满意度而言，研究课题 B_1、发展前途 B_2、待遇 B_3、同事情况 B_4、地理位置 B_5 和单位名气 B_6 相互之间的权重，该毕业生可根据自己的接受度，给定相互之间的权重因子，假设如表 4-8 所示。

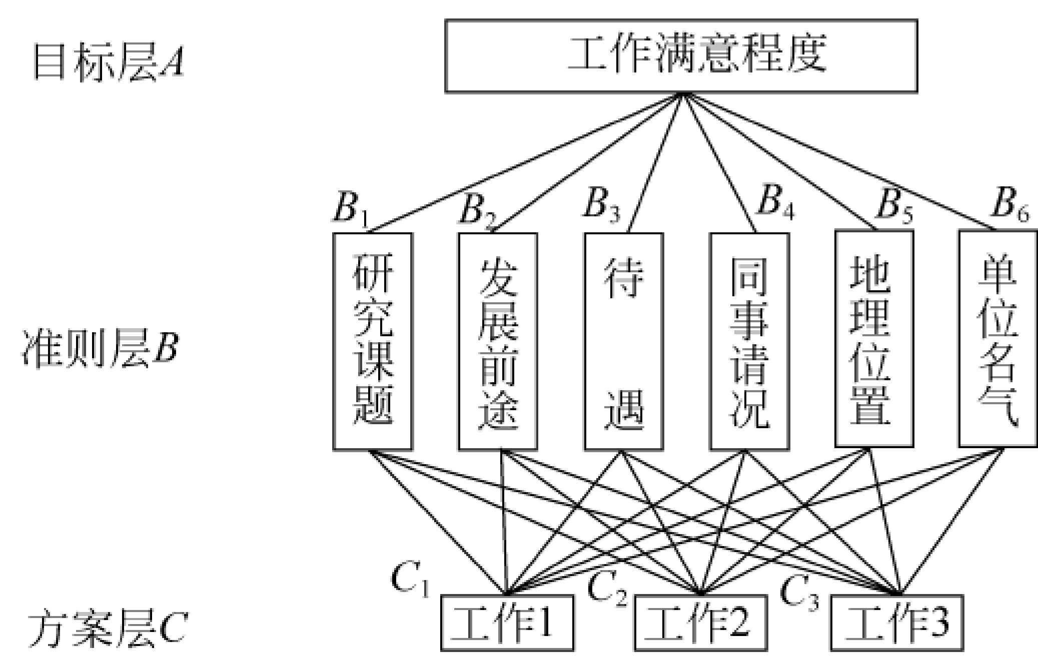


图 4-2　工作满意度层次结构

表 4-8　准则层 B 相互因子权重

A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
B_1	1	1	1	4	1	1/2
B_2	1	1	2	4	1	1/2
B_3	1	1/2	1	5	3	1/2
B_4	1/4	1/4	1/5	1	1/3	1/3
B_5	1	1	1/3	3	1	1
B_6	2	2	2	3	3	1

对于准则层 B 而言，研究课题 B_1、发展前途 B_2、待遇 B_3、同事情况 B_4、地理位置 B_5 和单位名气 B_6 对方案层 C 的影响权重对比因子如表 4-9～表 4-14 所示。

表 4-9　方案层 C 对准则层 B_1 相互因子权重

B_1	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1/4	1/2
C_2	4	1	3
C_3	2	1/3	1

表 4-10　方案层 C 对准则层 B_2 相互因子权重

B_2	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1/4	1/5
C_2	4	1	1/2
C_3	5	2	1

表 4-11　方案层 C 对准则层 B_3 相互因子权重

B_3	C_1	C_2	C_3
C_1	1	3	1/3
C_2	1/3	1	7
C_3	3	1/7	1

表 4-12　方案层 C 对准则层 B_4 相互因子权重

B_4	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1/3	5
C_2	3	1	7
C_3	1/5	1/7	1

表 4-13　方案层 C 对准则层 B_5 相互因子权重

B_5	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1	7
C_2	1	1	7
C_3	1/7	1/7	1

表 4-14　方案层 C 对准则层 B_6 相互因子权重

B_6	C_1	C_2	C_3
C_1	1	7	9
C_2	1/7	1	1
C_3	1/9	1	1

由层次分析法的基本原理与步骤，编写 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all         %清屏
a=[1,1,1,4,1,1/2            %表 4-8  准则层 B 相互因子权重
   1,1,2,4,1,1/2
   1,1/2,1,5,3,1/2
   1/4,1/4,1/5,1,1/3,1/3
   1,1,1/3,3,1,1
   2,2,2,3,3,1];
[x,y]=eig(a);               %求特征值
eigenvalue=diag(y);         %提取 y 矩阵的对角值
lamda=eigenvalue(1);
ci1=(lamda-6)/5;
cr1=ci1/1.24;
w1=x(:,1)/sum(x(:,1))       %准则层权值
w1 =
    0.1507
    0.1792
    0.1886
    0.0472
    0.1464
    0.2879

%%准则层 1
b1=[1,1/4,1/2;4,1,3;2,1/3,1];
[x,y]=eig(b1);              %求特征值
eigenvalue=diag(y);
lamda=eigenvalue(1);
ci21=(lamda-3)/2;
cr21=ci21/0.58;
w21=x(:,1)/sum(x(:,1))      %研究课题
w21 =
    0.1365
    0.6250
    0.2385

%%准则层 2
b2=[1  1/4   1/5;4   1   1/2;5   2    1];
[x,y]=eig(b2);              %求特征值
eigenvalue=diag(y);         %对角化
lamda=eigenvalue(1);
ci22=(lamda-3)/2;
cr22=ci22/0.58;
```

```
w22=x(:,1)/sum(x(:,1))     %发展前途
w22 =
    0.0974
    0.3331
    0.5695

%%准则层 3
b3=[1    3  1/3;1/3   1    1/7;3   7    1];
[x,y]=eig(b3);               %求特征值
eigenvalue=diag(y);          %对角化
lamda=eigenvalue(1);
ci23=(lamda-3)/2;
cr23=ci23/0.58;
w23=x(:,1)/sum(x(:,1))     %待遇
w23 =
    0.2426
    0.0879
    0.6694

%%准则层 4
b4=[1   1/3   5;3   1    7;1/5  1/7   1];
[x,y]=eig(b4);               %求特征值
eigenvalue=diag(y);          %对角化
lamda=eigenvalue(1);
ci24=(lamda-3)/2;
cr24=ci24/0.58;
w24=x(:,1)/sum(x(:,1))     %同事情况
w24 =
    0.2790
    0.6491
    0.0719

%%准则层 5
b5=[1   1    7;1   1    7;1/7  1/7   1];
[x,y]=eig(b5);               %求特征值
eigenvalue=diag(y);          %对角化
lamda=eigenvalue(2);
ci25=(lamda-3)/2;
cr25=ci25/0.58;
w25=x(:,2)/sum(x(:,2))     %地理位置
w25 =
    0.3248
    0.8419
   -0.1667

%%准则层 6
b6=[1   7   9;1/7  1   1 ;1/9   1   1];
[x,y]=eig(b6);               %求特征值
eigenvalue=diag(y);          %对角化
lamda=eigenvalue(1);
ci26=(lamda-3)/2;
cr26=ci26/0.58;
w26=x(:,1)/sum(x(:,1))     %单位名气
w26 =
    0.7986
    0.1049
    0.0965
```

```
%%总排序
w_sum=[w21,w22,w23,w24,w25,w26] *w1
ci=[ci21,ci22,ci23,ci24,ci25,ci26];
cr=ci*w1/sum(0.58*w1)      %总排序权值
w_sum =
    0.3744
    0.3545
    0.2710
```

运行程序，整理结果如表 4-15 所示。

表 4-15　工作评价权值计算结果表

准则		研究课题	发展前途	待遇	同事情况	地理位置	单位名气	总排序权值
准则层权值		0.1507	0.1792	0.1886	0.0472	0.1464	0.2879	
方案层单排序权值	工作 1	0.1365	0.0974	0.2426	0.2790	0.4667	0.7986	0.3952
	工作 2	0.6250	0.3331	0.0879	0.6491	0.4667	0.1049	0.2996
	工作 3	0.2385	0.5695	0.6694	0.0719	0.0667	0.0965	0.3052

从表 4-15 计算结果表可得到，根据该毕业生的综合权衡，该毕业生最满意的工作为工作 1，排序权值为 0.3952，高于工作 2 的 0.2996，工作 3 的 0.3052。

4.6　时间序列指数平滑预测法

时间序列数据随时间变化波动，数据离散的分布，较难用一般的线性关系表示。本节选取食品价格预测作为研究对象，对单个食品的价格进行合理预测对比分析，以期更直观地反应物价的变化情况。

4.6.1　一次指数平滑预测法

一次指数平滑预测法以 $\alpha(1-\alpha)^i$ 为权数 $(0<\alpha<1),(i=0,1,2,3,\ldots)$ 对时间序列 $\{y_t\}$ 进行加权平均的一种预测方法。y_t 的权数为 α，y_{t-1} 的权数为 $\alpha(1-\alpha)$，y_{t-2} 的权数为 $\alpha(1-\alpha)^2$，依次类推，其计算公式如下：

$$\hat{y}_{t+1}=S_t^{(1)}=\alpha y_t+(1-\alpha)S_{t-1}^{(1)}$$

其中：y_t 表示第 t 期实际值；$\hat{y}_{t+1}$ 表示第 t+1 期预测值；$S_t^{(1)}$、$S_{t-1}^{(1)}$ 分别表示第 $t-1$、t 期一次指数平滑值；α 表示平滑系数，0<α<1。

各时点平滑预测值 y 与实际值 x 的误差值 e_t 为：

$$e_t=x_t-S'_{t-1}=x_t-y_t$$

预测标准误差为：

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n-1}(y_{t+1}-\hat{y}_{t+1})^2}{n-1}}$$

上式中，n 为时间序列所含原始数据个数。以菜子油价格为例，MATLAB 程序如下。

```
clc,clear
load('yx.mat') %原始数据以列向量的方式存放
yt=yx; n=length(yt);
alpha=[0.1 0.3 0.9];m=length(alpha);
yhat(1,1:m)=(yt(1)+yt(2))/2;
for i=2:n
    yhat(i,:)=alpha*yt(i-1)+(1-alpha).*yhat(i-1,:);
end
yhat;%预测值
err=sqrt(mean((repmat(yt,1,m)-yhat).^2))%预测误差总和
yhat114=alpha*yt(n)+(1-alpha).*yhat(n,:) %预测下一时刻值
```

分别取不同的 α 平滑系数，得到表 4-16 结果。

表 4-16　一次指数平滑

$S_0^{(1)}=y_1=4.81$			$\alpha=0.1$		$\alpha=0.3$		$\alpha=0.9$	
日期	时期 t	价格	平滑预测值	误差	平滑预测值	误差	平滑预测值	误差
均价(10-3)	1	4.81	4.805	0	4.805	0	4.805	0
均价(10-4)	2	4.8	4.806	0.009	4.807	0.007	4.810	–0.009
均价(10-5)	3	4.73	4.805	0.078	4.805	0.075	4.801	–0.0709
均价(10-6)	4	4.7	4.797	0.100	4.782	0.082	4.737	–0.0371
均价(10-7)	5	4.7	4.788	0.090	4.758	0.0578	4.704	–0.0037
均价(10-8)	6	4.73	4.779	0.0512	4.740	0.0104	4.700	0.0296
均价(10-9)	7	4.75	4.774	0.0261	4.737	–0.0127	4.727	0.0230
均价(10-10)	8	4.75	4.772	0.0235	4.741	–0.009	4.748	0.00230
均价(10-11)	9	5.43	4.769	–0.659	4.744	–0.686	4.750	0.680
均价(10-12)	10	5.78	4.836	–0.943	4.950	–0.830	5.362	0.4180
均价(11-1)	11	5.85	4.930	–0.919	5.199	–0.651	5.738	0.112
均价(11-2)	12	5.88	5.022	–0.857	5.394	–0.486	5.839	0.041
均价(11-3)	13	5.93	5.108	–0.821	5.540	–0.390	5.876	0.054
预测（11-4）	14		5.1900		5.6569		5.9246	
预测（11-5）	15							

从表 4-16 中可知，易得到 $S_{a=0.1}=0.548$、$S_{a=0.3}=0.407$、$S_{a=0.9}=0.235$、$\alpha=0.1$ 和 $\alpha=0.3$ 的误差比 $\alpha=0.9$ 的误差大，所以在此选择 $\alpha=0.9$ 进行预测，得到 2011 年 4 月份菜籽油的价格预测值将为 5.9246 元。然而，对于预测多个数据，一次指数平滑预测法预测误差大。

4.6.2　二次指数平滑预测法

在 4.6.1 小节中，从结果中可得出 $\alpha=0.9$ 的误差最小，故在此选用 $\alpha=0.9$ 进行相关分析。多次指数平滑预测法是对少一次指数平滑值再作一次指数平滑来进行预测的一种方法，但第 $t+1$ 期预测值并非第 t 期的多次指数平滑值，而是采用下列计算公式进行预测：

$$\begin{cases} S_t^{(i)} = \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{(i)} \\ S_t^{(i+1)} = \alpha S_t^{(i)} + (1-\alpha) S_{t-1}^{(i+1)} \\ \hat{y}_{t+T} = a_t + b_t T \end{cases}$$

其中：$a_t = 2S_t^{(i)} - S_t^{(i+1)}$，$b_t = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}(S_t^{(i)} - S_t^{(i+1)})$，$S_t^{(i)}$ 表示第 t 期的 i 次指数平滑值；$S_t^{(i+1)}$ 表示第 t 期的 $i+1$ 次指数平滑值；y_t 表示第 t 期的实际值；$\hat{y}_{t+T}$ 表示第 $t+T$ 期预测值；α 表示平滑系数，$\alpha = 0.9$。

预测的标准误差为：

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{n-2}}$$

MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load('yx.mat')                                          %原始数据以列向量的方式存放
yt=yx; n=length(yt);
alpha=0.9;     %平滑系数
st1(1)=yt(1); st2(1)=yt(1);   %预测值
for i=2:n
    st1(i)=alpha*yt(i)+(1-alpha) *st1(i-1);   % S_t^(i) = αy_t +(1-α)S_t^(i)
    st2(i)=alpha*st1(i)+(1-alpha) *st2(i-1);  % S_t^(i+1) = αS_t^(i) +(1-α)S_(t-1)^(i+1)
end
a=2*st1-st2                                             % a_t = 2S_t^(i) - S_t^(i+1)
b=alpha/(1-alpha) * (st1-st2)                           %b_t
yhat=a+b;
yhat=yhat';
str=char(['C',int2str(n+2)]);                           %字符型输出
```

运行程序得到结果如表 4-16 所示。

4.6.3　三次指数平滑法

当时间序列呈现非线性趋势时，可用三次指数平滑法。设时间序列为 $x_1, x_2, \cdots, x_t$，同样令：

$$S'_0 = S''_0 = S'''_0 = x_1$$

且取同一个平滑系数 a，则按下式逐步计算：

$$S'_t = ax_t + (1-a)S'_{t-1}$$

$$S''_t = aS'_t + (1-a)S''_{t-1}$$

$$S'''_t = aS''_t + (1-a)S'''_{t-1}$$

同样可按预测均方差最小原则选定一个 a 值，一般 $a = 0.9$。

以选定的较好的一个 a 值的计算结果 S'_t、S''_t 和 S'''_t 数列为准，对时间序列末期 t 的数据按下式计算模型系数：

$$a_t = 3S'_t - 3S''_t + S'''_t$$

$$b_t = \frac{a}{2(1-a)^2}[(6-5a)S_t' - (10-8a)S_t'' + (4-3a)S_t''']$$

$$c_t = \frac{a^2}{2(1-a)^2}(S_t' - 2S_t'' + S_t''')$$

则预测模型为：

$$y_{t+T} = a_t + b_t \cdot T + c_t \cdot T^2$$

式中 T——自 t 时点起向前预测的时点期数。

MATLAB 程序如下：

```
%%三次指数平滑
clc,clear
load('yx.mat')                                      %原始数据以列向量的方式存放
yt=yx; n=length(yt);
alpha=0.9; st1_0=mean(yt(1:3)); st2_0=st1_0; st3_0=st1_0;
st1(1)=alpha*yt(1)+(1-alpha) *st1_0;              %初始值
st2(1)=alpha*st1(1)+(1-alpha) *st2_0;             %初始值
st3(1)=alpha*st2(1)+(1-alpha) *st3_0;             %初始值
for i=2:n
    st1(i)=alpha*yt(i)+(1-alpha) *st1(i-1);       %一次预测 S'_t
    st2(i)=alpha*st1(i)+(1-alpha) *st2(i-1);      %二次预测 S''_t
    st3(i)=alpha*st2(i)+(1-alpha) *st3(i-1);      %三次预测 S'''_t
end
st1=[st1_0,st1];    %合并初值
st2=[st2_0,st2];    %合并初值
st3=[st3_0,st3];    %合并初值
a=3*st1-3*st2+st3;
b=0.5*alpha/(1-alpha)^2* ((6-5*alpha) *st1-2* (5-4*alpha) *st2+(4-3*alpha)
*st3);
c=0.5*alpha^2/(1-alpha)^2* (st1-2*st2+st3);
yhat=a+b+c;  %预测模型值
yhat=yhat';    %转置
```

运行程序得到结果如表 4-17 所示。

表 4-17　多次指数平滑结果

取α=0.9，$S_0^{(1)}=S_0^{(2)}=S_0^{(3)}=y_1$=4.82					
日期	时间 t	实际平均价格	一次指数平滑值	二次指数平滑值	三次指数平滑值
均价(10-3)	1	4.82	4.805	4.805	4.780
均价(10-4)	2	4.8	4.810	4.810	4.861
均价(10-5)	3	4.7333	4.801	4.792	4.769
均价(10-6)	4	4.7	4.737	4.672	4.610
均价(10-7)	5	4.7	4.704	4.664	4.682
均价(10-8)	6	4.7267	4.700	4.693	4.727
均价(10-9)	7	4.75	4.727	4.753	4.790
均价(10-10)	8	4.99	4.748	4.771	4.772
均价(10-11)	9	5.4633	4.750	4.754	4.735
均价(10-12)	10	5.8033	5.362	5.975	6.581
均价(11-1)	11	5.86	5.738	6.176	6.061

续表

取α=0.9，$S_0^{(1)}=S_0^{(2)}=S_0^{(3)}=y_1$=4.82					
日期	时间 t	实际平均价格	一次指数平滑值	二次指数平滑值	三次指数平滑值
均价(11-2)	12	5.8967	5.839	5.983	5.679
均价(11-3)	13	5.93	5.876	5.927	5.804
预测（11-4）	14		5.925	5.978	5.968
预测（11-5）	15				

由公式算得：

$$a_{13}=2S_{13}^{(2)}-S_{13}^{(3)}=5.927$$

$$b_{13}=0.0369$$

则线性预测方程：

$$\hat{y}_{t+T}=a_t+b_tT=5.927+0.0369T \qquad t=13$$

所以价格将逐渐上升。利用此方程，分别取$T=1$、2便求得 4 月份和 5 月份的价格预测平均值分别为 5.9639 元和 6.0008 元。

由上述的结果可知，2011-4 月菜籽油的平均物价为$5.9639元/500\text{g}$，2011-5 月菜籽油的平均物价为$6.0008元/500\text{g}$。价格较 2011-3-25 增长1.19%，以这个速度增长，CPI 又将达到历史新高，造成市场严重通货膨胀；而在国家宏观调控下，国家会做相应反应，应该避免市场严重通货膨胀，物价指数不会再次大幅度攀升，由于模型对食品价格的预测存在一定的误差，故预测的数据仅供参考使用。

4.7　时间序列线性二次移动平均法预测法

移动平均法是根据时间序列资料逐渐推移，依次计算包含一定项数的时序平均数，以反映长期趋势的方法。当时间序列的数值由于受周期变动和不规则变动的影响，起伏较大，不易显示出发展趋势时，可用移动平均法，消除这些因素的影响，分析、预测序列的长期趋势。

移动平均法有简单移动平均法、加权移动平均法和趋势移动平均法等。

（1）简单一次平均法步骤

设时间序列为$\{y_t\}$，取移动平均的项数为 n，则第$t+1$期预测值的计算公式为：

$$\hat{y}_{t+1}=M_t^{(1)}=\frac{y_t+y_{t-1}+\dots+y_{t-n+1}}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}y_{t-n+j}$$

上式中：y_t表示第t期实际值；$M_t^{(1)}$表示第t期一次移动平均数；$\hat{y}_{t+1}$表示第$t+1$期预测值$(t\geqslant n)$；n为时间序列$\{y_t\}$所含原始数据的个数。

（2）线性二次移动平均法步骤

把前面的一次移动平均值记为$M_t^{(1)}$，把二次移动平均值记为$M_t^{(2)}$，从而有：

$$M_t^{(2)}=\frac{M_t^{(1)}+M_{t-1}^{(1)}+\cdots M^{(1)}{}_{t-n+1}}{n}=M_{t-1}^{(2)}+\frac{M_t^{(1)}+M_{t-n}^{(1)}}{n}$$

设时间序列 { y_t } 可表为时间 t 的线性模型，即：

$$y_t = a + bt + \varepsilon_t$$

式中，ε_t 为随机项。

预测时，难以考虑 ε_t，故现在假定 $y_t = a + bt$，从而：

$$M_t^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_{t-i} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[a + b(t-i)] = a + bt - \frac{(n-1)}{2}b$$

可见，一次移动平均值 $M_t^{(1)}$，滞后于实际值 y_t。

同样对 $M_t^{(2)}$ 有：

$$M_t^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M_{t-i}^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[a + b(t-i) - \frac{(n-1)}{2}b\right] = a + bt - (n-1)b = M_t^{(1)} - \frac{(n-1)}{2}b$$

由此式可得：$b = \dfrac{2}{n-1}\left(M_t^{(1)} - M_t^{(2)}\right)$

$$\hat{y}_{t+\tau} = a + b(t+\tau) = M_t^{(1)} + \frac{(n-1)}{2}b + b\tau = 2M_t^{(1)} - M_t^{(2)} + b\tau$$

记 $\begin{cases} \hat{a}_t = 2M_t^{(1)} - M_t^{(2)} \\ \hat{b}_t = \dfrac{2}{n-1}(M_t^{(1)} - M_t^{(2)}) \end{cases}$，则预测方程变为：

$$\hat{y}_{t+\tau} = \hat{a}_t + \hat{b}_t\tau$$

式中，τ 为预测超前期。则 2011-4-5 的预测价格可表示为：

$$\hat{y}_{39+1} = \hat{a}_t + \hat{b}_t \times 1$$

注意： 项数 n 的数值，要根据时间序列的特点而定，不宜过大或过小。n 过大会降低移动平均数的敏感性，影响预测的准确性；n 过小，移动平均数易受随机变动的影响，难以反映实际趋势。一般取 n 的大小能包含季节变动和周期变动的时期为好，这样可以消除它们的影响，所以这里就取 n=3。表示一个月的数据波动情况。

以菜籽油为例，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
%菜籽油的价格预测程序
x1=[4.83   4.83   4.8    4.8    4.8    4.8    4.8    4.7    4.7
    4.7    4.7    4.7    4.7    4.7    4.7    4.7    4.74   4.74
    4.75   4.75   4.75   4.75   4.92   5.3    5.43   5.48   5.48
    5.78   5.78   5.85   5.85   5.85   5.88   5.88   5.88   5.93
    5.93   5.93   5.93];
x1=x1';  %转置
for i=1:37
    m1(i+2)=(x1(i)+x1(i+1)+x1(i+2))/3;    %一次移动平均值
end
for i=3:37
    m2(i+2)=(m1(i)+m1(i+1)+m1(i+2))/3;  %二次移动平均值
end
m1=m1';  %转置
m2=m2';  %转置
a=2*m1-m2;  %â_t
b=m1-m2;   %b̂_t
```

```
for i=1:6
    y(:,i)=a(39,1)+b(39,1)*i;  %预测
end
y
y =
    5.9411    5.9467    5.9522    5.9578    5.9633    5.9689
>>
```

运行程序得到结果如表 4-18 所示。

表 4-18　时间序列线性二次移动平均法预测结果

日期	编号	价格	$M_t^{(1)}$	$M_t^{(2)}$	$\hat{a}_t$	$\hat{b}_t$
均价(10-3-5)	1	4.83	……	……	……	……
均价(10-3-15)	2	4.83	……	……	……	……
均价(10-3-25)	3	4.8	4.82	……	……	……
均价(10-4-5)	4	4.8	4.81	……	……	……
均价(10-4-15)	5	4.8	4.8	4.81	4.79	–0.01
均价(10-4-25)	6	4.8	4.8	4.8033	4.7967	–0.0033
均价(10-5-5)	7	4.8	4.8	4.8	4.8	0
均价(10-5-15)	8	4.7	4.7667	4.7889	4.7444	–0.0222
均价(10-5-25)	9	4.7	4.7333	4.7667	4.7	–0.0333
均价(10-6-5)	10	4.7	4.7	4.7333	4.6667	–0.0333
均价(10-6-15)	11	4.7	4.7	4.7111	4.6889	–0.0111
均价(10-6-25)	12	4.7	4.7	4.7	4.7	0
均价(10-7-5)	13	4.7	4.7	4.7	4.7	0
均价(10-7-15)	14	4.7	4.7	4.7	4.7	0
均价(10-7-25)	15	4.7	4.7	4.7	4.7	0
均价(10-8-5)	16	4.7	4.7	4.7	4.7	0
均价(10-8-15)	17	4.74	4.7133	4.7044	4.7222	0.00889
均价(10-8-25)	18	4.74	4.7267	4.7133	4.74	0.0133
均价(10-9-5)	19	4.75	4.7433	4.7278	4.7589	0.0156
均价(10-9-15)	20	4.75	4.7467	4.7389	4.7544	0.00779
均价(10-9-25)	21	4.75	4.75	4.7467	4.7533	0.0033
均价(10-10-5)	22	4.75	4.75	4.7489	4.7511	0.0011
均价(10-10-15)	23	4.92	4.8067	4.7689	4.8444	0.0378
均价(10-10-25)	24	5.3	4.99	4.8489	5.1311	0.1411
均价(10-11-5)	25	5.43	5.2167	5.0044	5.4289	0.2122
均价(10-11-15)	26	5.48	5.4033	5.2033	5.6033	0.2
均价(10-11-25)	27	5.48	5.4633	5.3611	5.5656	0.1022
均价(10-12-5)	28	5.78	5.58	5.4822	5.6778	0.0978
均价(10-12-15)	29	5.78	5.68	5.5744	5.7856	0.1056
均价(10-12-25)	30	5.85	5.8033	5.6878	5.9189	0.1156
均价(11-1-5)	31	5.85	5.8267	5.77	5.8833	0.0567
均价(11-1-15)	32	5.85	5.85	5.8267	5.8733	0.0233
均价(11-1-25)	33	5.88	5.86	5.8456	5.8744	0.0144
均价(11-2-5)	34	5.88	5.87	5.86	5.88	0.01
均价(11-2-15)	35	5.88	5.88	5.87	5.89	0.01
均价(11-2-25)	36	5.93	5.8967	5.8822	5.9111	0.0144

续表

日　　期	编　号	价　格	$M_t^{(1)}$	$M_t^{(2)}$	$\hat{a}_t$	$\hat{b}_t$
均价(11-3-5)	37	5.93	5.9133	5.8967	5.93	0.01667
均价(11-3-15)	38	5.93	5.93	5.9133	5.9467	0.01667
预测（11-3-25）	39	5.93	5.93	5.9244	5.9356	0.00556
预测（11-4-5）	40			5.9411		
预测（11-4-15）	41			5.9467		
预测（11-4-25）	42			5.9522		
预测（11-5-5）	43			5.9578		
预测（11-5-15）	44			5.9633		
预测（11-5-25）	45			5.9689		

从表 4-18 可知，11-3-25 时预测价格为：

$$\hat{y}_{38+1}=\hat{a}_t+\hat{b}_t\times 1=5.9467+0.0167=5.9634$$

$$\Delta_{相对误差}=(\hat{y}_{38+1}-y_{38+1})\Big/y_{38+1}=\frac{5.9634-5.93}{5.93}\times 100\%=0.56\%$$

故模型预测的 2011-3-25 的菜籽油价格的误差为 $0.56\%<5\%$，很小，故模型合理。从而根据该模型，预测出 2011-4 月到 2011-5 月菜籽油的价格，可知，价格有一定的上升，但变化幅度不大，预测结果有一定的合理性。

MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
%各类食品的价格预测
%x 由 workplace 载入
load('x.mat')
x=x';
for i=1:37
     for j=1:42
      m1(i+2,j)=(x(i,j)+x(i+1,j)+x(i+2,j))/3;  %取平均
end
end
for i=3:37
    for j=1:42
m2(i+2,j)=(m1(i,j)+m1(i+1,j)+m1(i+2,j))/3;    %二次平均
end
end
a=2*m1-m2;   %系数 a(t)
b=m1-m2;     %系数 b(t)
for i=1:42
     for j=1:6
       y(i,j)=a(39,i)+b(39,i)*j;  %预测
end
end
```

运行程序得到所有类食品价格预测结果，如表 4-19 所示。

表 4-19　各类食品预测结果

食 品 名 称	2011-4-5	2011-4-15	2011-4-25	2011-5-5	2011-5-15	2011-5-25
1 菜籽油	5.9411	5.9467	5.9522	5.9578	5.9633	5.9689
2 大豆油	5.6133	5.63	5.6467	5.6633	5.68	5.6967

续表

食品名称	2011-4-5	2011-4-15	2011-4-25	2011-5-5	2011-5-15	2011-5-25
3 花生油	116.85	116.85	116.85	116.85	116.85	116.85
4 大豆调和油	63.067	63.4	63.733	64.067	64.4	64.733
5 鲜猪肉（精瘦肉）	13.29	13.3	13.31	13.32	13.33	13.34
6 鲜猪肉（肋条肉）	9.39	9.1967	9.0033	8.81	8.6167	8.4233
7 鲜牛肉	18.844	19.017	19.189	19.361	19.533	19.706
8 鲜羊肉(鲜羊肉带骨）	21.697	21.77	21.843	21.917	21.99	22.063
9 鲜羊肉(鲜羊肉去骨）	19.2	19.2	19.2	19.2	19.2	19.2
10 活鸡	11.933	11.92	11.907	11.893	11.88	11.867
11 鸡肉	8.0333	7.8867	7.74	7.5933	7.4467	7.3
12 鸡蛋	4.1333	4.05	3.9667	3.8833	3.8	3.7167
13 带鱼	11.261	11.523	11.786	12.048	12.31	12.572
14 草鱼	4.8267	4.58	4.3333	4.0867	3.84	3.5933
15 鲤鱼	5.7733	5.7167	5.66	5.6033	5.5467	5.49
16 芹菜	2.7644	2.6633	2.5622	2.4611	2.36	2.2589
17 大白菜	0.74778	0.77	0.79222	0.81444	0.83667	0.85889
18 油菜	1.4989	1.4967	1.4944	1.4922	1.49	1.4878
19 黄瓜	2.89	2.8467	2.8033	2.76	2.7167	2.6733
20 萝卜	0.99	1.04	1.09	1.14	1.19	1.24
21 茄子	3.2756	3.11	2.9444	2.7789	2.6133	2.4478
22 西红柿	3.1189	3.0867	3.0544	3.0222	2.99	2.9578
23 土豆	2.1922	2.11	2.0278	1.9456	1.8633	1.7811
24 胡萝卜	1.8256	1.73	1.6344	1.5389	1.4433	1.3478
25 青椒	4.7644	5.05	5.3356	5.6211	5.9067	6.1922
26 尖椒	6.9589	7.1233	7.2878	7.4522	7.6167	7.7811
27 圆白菜	1.1856	1.1567	1.1278	1.0989	1.07	1.0411
28 豆角	6.8411	6.95	7.0589	7.1678	7.2767	7.3856
29 蒜苔	5.2233	4.7067	4.19	3.6733	3.1567	2.64
30 韭菜	2.9956	2.85	2.7044	2.5589	2.4133	2.2678
31 芦柑	3.7378	3.8733	4.0089	4.1444	4.28	4.4156
32 苹果	5.4133	5.4933	5.5733	5.6533	5.7333	5.8133
33 香蕉	3.6044	3.7233	3.8422	3.9611	4.08	4.1989
34 西瓜	3.0922	3.2167	3.3411	3.4656	3.59	3.7144
35 豆腐	2.25	2.25	2.25	2.25	2.25	2.25
36 食用盐	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3
37 绵白糖	8.83	8.83	8.83	8.83	8.83	8.83
38 白砂糖	5.8167	5.8333	5.85	5.8667	5.8833	5.9
39 红糖	6.59	6.68	6.77	6.86	6.95	7.04
40 酱油	5.28	5.28	5.28	5.28	5.28	5.28
41 醋	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
42 鲜牛奶	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5

使用线性二次移步平均预测方法对一定时期的数据预测，误差相对较小，在输出的模型的结果可看到，每一个数据较实际数据而言，误差较小，预测值在实际值的附近波动。如上述的鲜牛奶、醋等的价格在 4、5 两个月将保持不变，与实际中的结果概率预测结论相

同；故该模型的价格预测数据具有一定的参考性。

4.8　BP 神经网络

BP 神经网络是一种多层前馈神经网络。该网络主要特点是信号前向传递，误差反向传播。在前向传递中，输入信号从输入层经隐含层逐层处理，直至输出层。每一层的神经元状态只影响下一层神经元状态。如果输出层得不到期望输出，则转入反向传播，根据预测误差调整网络权值和阈值，从而使 BP 神经网络预测输出不断逼近期望输出。BP 神经网络的拓扑结构如图 4-3 所示。

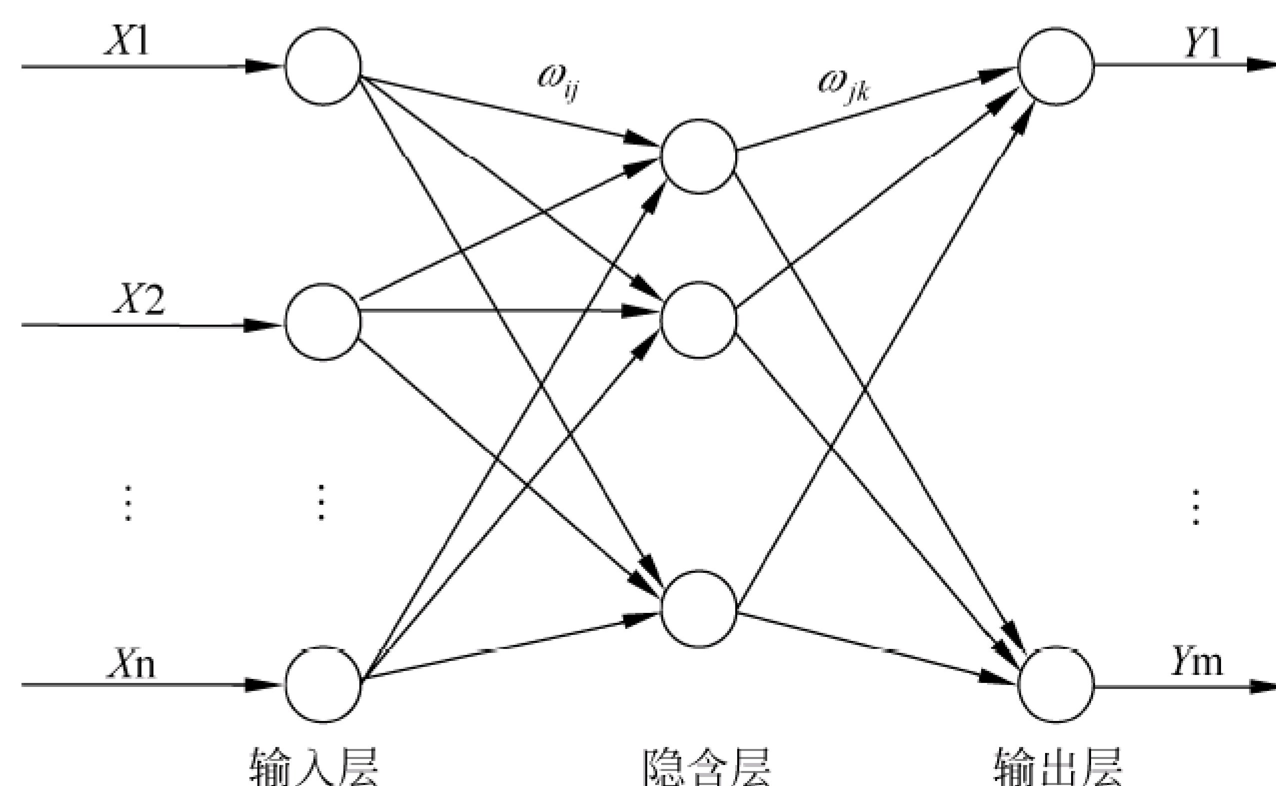


图 4-3　BP 神经网络拓扑结构图

图 4-3 中，$X1, X2, \dots, Xn$ 是 BP 神经网络的输入值，$Y1, Y2, \dots, Ym$ 是 BP 神经网络的预测值，ω_{ij} 和 ω_{jk} 为 BP 神经网络权值。从图 4-3 中可以看出，BP 神经网络可以看成一个非线性函数，网络输入值和预测值分别为该函数的自变量和因变量。当输入节点数为 N，输出节点数为 M 时，BP 神经网络就表达了从 N 个自变量到 M 个因变量的函数映射关系。

从图 4-3 可看出，BP 神经网络每一个输入量经过每一个隐藏层，在相应的权值和阈值的作用下放大，隐藏层经过一定的加权后给输出层。BP 神经网络具有记忆和学习功能，其具体步骤和流程如下。

Step 1：初始化给各联接权 $\{\omega_{ij}\}$ 及阈值 $\{\theta_{ij}\}$ 赋予 $[-1,+1]$ 之间的随机值。

Step 2：随机选取一模式对 $A_k = \left(a_1^k, a_2^k, \cdots, a_n^k\right)$，$Y_k = \left(y_1^k, y_2^k, \cdots, y_n^k\right)$ 提供给网络。

Step3：用输入模式 $A_k = \left(a_1^k, a_2^k, \cdots, a_n^k\right)$、联接权 $\{\omega_{ij}\}$ 和阈值 $\{\theta_{ij}\}$ 计算中间层各单元的输入 s_j，然后用 $\{s_j\}$ 通过 s 函数计算中间层各单元的输出 $\{b_j\}$。

Step 4：用中间层的输出 $\{b_j\}$、联接权 $\{\omega_{ij}\}$ 和阈值 $\{\theta_{ij}\}$ 计算输出层各单元的输入 $\{L_j\}$，然后用 $\{L_j\}$ 通过 s 函数计算输出层各单元的响应 $\{C_j\}$。

Step 5：用希望输出模式 $Y_k = \left(y_1^k, y_2^k, \cdots, y_n^k\right)$、网络实际输出 $\{C_j\}$，计算输出层的各单元的一般化误差 $\{d_j^k\}$。

Step 6：用联接权$\{\omega_{ij}\}$、输出层的一般化误差$\{d_j^k\}$、中间层的输出$\{b_j\}$计算中间层各单元的一般化误差$\{e_j^k\}$。

Step 7：用输出层各单元的一般化误差$\{d_j^k\}$、中间层各单元的输出$\{b_j\}$修正联接权$\{\omega_{ij}\}$和阈值$\{\theta_{ij}\}$。

Step 8：用中间层各单元的一般化误差$\{e_j^k\}$、输入层各单元的输入$A_k=\left(a_1^k,a_2^k,\cdots,a_n^k\right)$修正联接权$\{\omega_{ij}\}$和阈值$\{\theta_{ij}\}$。

Step 9：随机选取下一个学习模式对提供给网络，返回到步骤（3），直至全部 m 个模式对训练完毕。如图 4-4 所示。

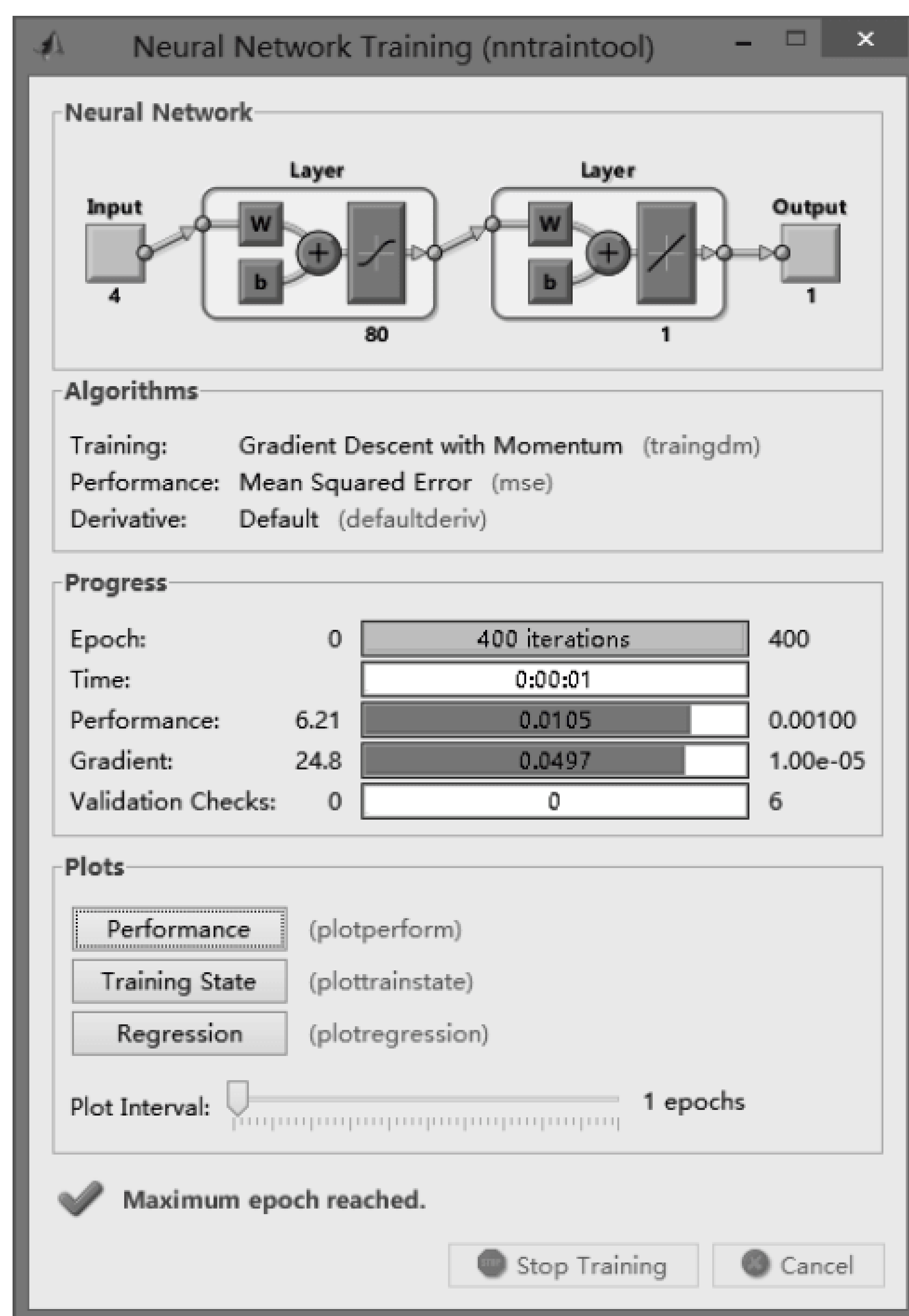


图 4-4　BP 神经网络训练图

Step 10：重新从 m 个学习模式对中随机选取一个模式对，返回步骤（3），直至网络全局误差函数 E 小于预先设定的一个极小值，即网络收敛或学习次数大于预先设定的值，即网络无法收敛。

【例 4-8】为了全面而系统的对网络性能进行综合评估，大多数需要从不同角度反映网络性能的指标，对比 BP 网络算法的应用研究，在此分析基于线性加权的网络性能评估模型，基于线性加权的网络性能评估，选取背景流量、网络时延、时延抖动情况和网络丢包率等因素，作为网络性能评估指标。采用客观权重的方法，根据经验数据，对网络性能各指标权重系数进行评估，当然也可以根据仿真方法模拟先前网络数据，得出网络性能指标的权重值，通过网络权重值和各指标量，由此得到网络性能综合评价模型，根据待检测的数据，得出相应的评估值。

其中网络性能指标值统计如表 4-20 所示。

表 4-20　网络性能指标值

背景流量/Kbps	时延/s	时延抖动/s	丢包率
500.0000	0.065506	0.001649	0.000000
550.0000	0.065483	0.001679	0.000000
600.0000	0.065625	0.001865	0.000000
650.0000	0.065668	0.002790	0.000000
700.0000	0.065646	0.002003	0.000000
750.0000	0.065764	0.003879	0.000000
800.0000	0.066084	0.005085	0.000000
850.0000	0.066614	0.006591	0.000000
900.0000	0.072721	0.014862	0.003731
910.0000	0.074368	0.015066	0.041199
920.0000	0.076668	0.011714	0.060606
930.0000	0.077252	0.012498	0.057471
940.0000	0.077784	0.011760	0.085603
950.0000	0.077882	0.012031	0.120301

为了定量地给出每个网络的好坏程度，以上数据各指标有 14 个工况，采用 1～14 进化量化作为输出值，1 表示网络最好，14 则表示网络最差。同样，这个评估性能参数，也可以作为 BP 神经网络的训练输出结果。

相应的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
warning off
load('x.mat')
x=x';
y=[1:14];
x=mapminmax(x);  %归一化
y=mapminmax(y);  %归一化
net=newff(minmax(x),[80,1],{'tansig','purelin'},'traingdm'); %网络训练函数
%net=newff(minmax(x),[10,1],{'logsig','logsig'},'traingd');  %网络训练函数
%当前输入层权值和阈值
inputWeights=net.IW{1,1};
inputbias=net.b{1};
%当前网络层权值和阈值
layerWeights=net.LW{2,1};
layerbias=net.b{2};
%设置训练参数
net.trainParam.show = 50;         %训练步数
net.trainParam.lr = 0.01;         %学习率
net.trainParam.mc = 0.9;          %惯性率—动量因子
net.trainParam.epochs = 400;      %迭代次数
net.trainParam.goal = 1e-3;       %最小误差

%调用 TRAINGDM 算法训练 BP 网络
[net, tr]=train(net, x, y);
%对 BP 网络进行仿真
A_train = sim(net,x);
%计算仿真误差
E = y - A train;
%均方误差
```

```
disp '网络训练均方误差'
MSE = mse(E)
figure(1)
plot(y,'ro--','linewidth',2)
hold on
plot(A_train,'bs--','linewidth',2)
legend('实际值','输出值')
```

运行程序输出结果如下：

```
网络训练均方误差
MSE =
    0.0111
```

运行程序输出图形如图 4-5 所示。

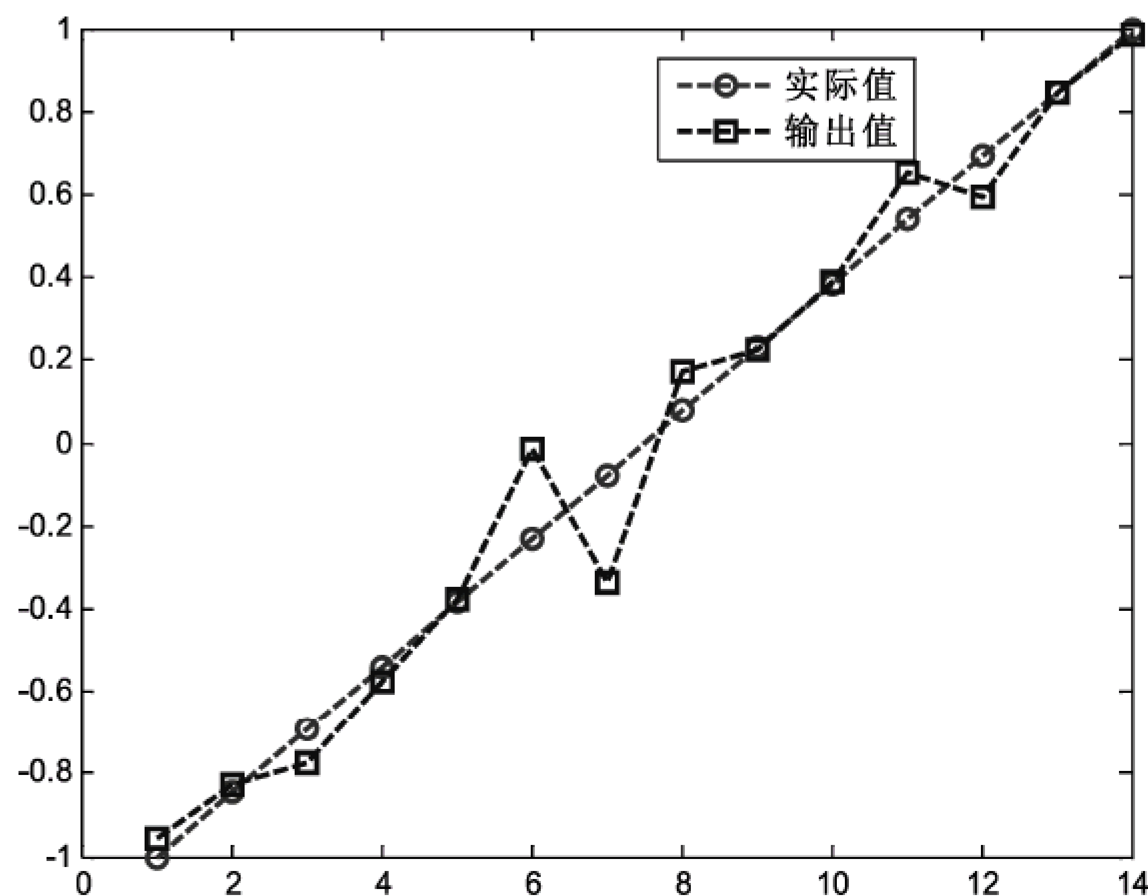


图 4-5　期望值与实际输出值的曲线比较图

从图 4-5 可看出，期望值与实际输出值非常的逼近，均方根误差为 0.0105。以上数据各指标有 14 个工况，采用 1～14 进化量化作为输出值，1 表示网络最好，14 则表示网络最差。在此 BP 神经网络中归一化处理后，映射到−1～1 之间。分析表 4-20 中的数据可知，表中数据，背景流量、网络时延、时延抖动情况和网络丢包率数据是逐渐增大的，网络性能是逐渐变差的，因此图 4-5 能很好地表征 BP 网络性能，采用 BP 神经网络模型能够较精确地评估网络性能，BP 神经网络可以实现非线性函数的映射功能。

4.9　图与网论模型及方法

图与网络是运筹学（Operations Research）中的一个经典和重要的分支。所研究的问题涉及经济管理、工业工程、交通运输、计算机科学与信息技术、通讯与网络技术等诸多领域。下面将要讨论的最短路问题、最大流问题、最小费用流问题和匹配问题等都是图与网络的基本问题。

图论中所谓的“图”是指某类具体事物和这些事物之间的联系。如果我们用点表示这些具体事物，用连接两点的线段（直的或曲的）表示两个事物的特定的联系，就得到了描述这个“图”的几何形象。图论为任何一个包含了一种二元关系的离散系统提供了一个数学模型，借助于图论的概念、理论和方法，可以对该模型求解。哥尼斯堡七桥问题就是一

个典型的例子，如图 4-6 所示。

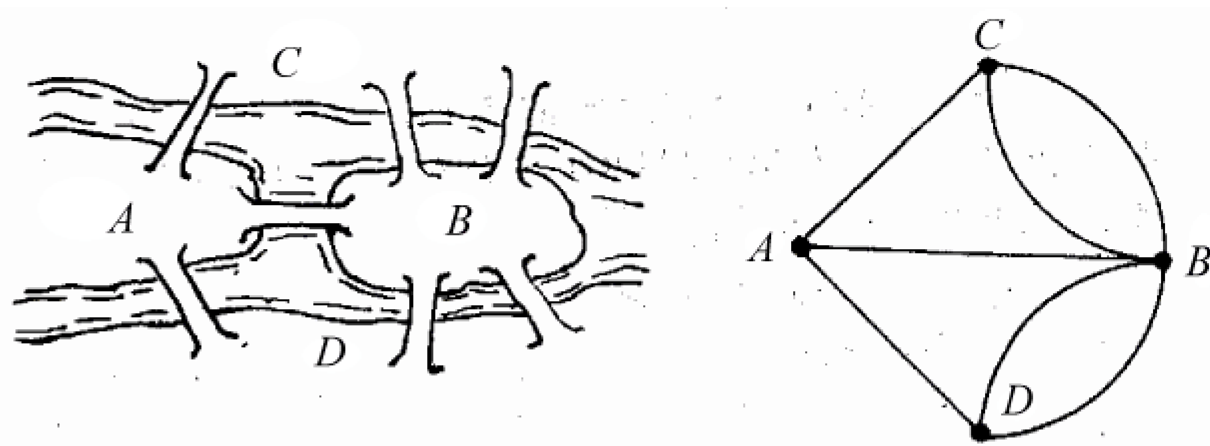


图 4-6　七桥问题

在哥尼斯堡有七座桥将普莱格尔河中的两个岛及岛与河岸联结起来，问题是要从这四块陆地中的任何一块开始通过每一座桥正好一次，再回到起点。当然可以通过试验去尝试解决这个问题，但该城居民的任何尝试均未成功。欧拉为了解决这个问题，采用了建立数学模型的方法。他将每一块陆地用一个点来代替，将每一座桥用连接相应两点的一条线来代替，从而得到一个有四个“点”，七条“线”的“图”。问题成为从任意一点出发一笔画出七条线再回到起点。欧拉考察了一般一笔画的结构特点，给出了一笔画的一个判定法则：这个图是连通的，且每个点都与偶数线相关联，将这个判定法则应用于七桥问题，得到了“不可能走通”的结果，不但彻底解决了这个问题，而且开创了图论研究的先河。

4.9.1　最小树

树：如果图 G 是一个无圈的无向连通图，则称图 G 为树，记作 T。树中的边称为树枝。

树的性质：

（1）在图中任意两点之间必有一条而且只有一条通路。

（2）在图中划去一条边，则图不连通。

（3）在图中不相邻的两个顶点之间加一条边，可得一个且仅得一个圈。

（4）图中边数有 $n_e = p-1$ （P 为顶点数）。

生成树：如果图 T 是 G 的一个生成子图，而且 T 又是一棵树，则称图 T 为一棵生成树。

定理：图 G 有生成树的充分必要条件为图是连通图。

最小生成树：设 $T=(V,E_1)$ 是赋权图 $G=(V,E)$ 的一棵生成树，称 T 中全部边上的权数之和为生成树的权，记为 $w(T)$，即 $w(T)=\sum\limits_{e\in E_1} w(e)$。

如果生成树 T^* 的权 $w(T^*)$ 是 G 的所有生成树的权中最小者，则称 T^* 是 G 的最小生成树，简称为最小树，即 $w(T^*)=\sum\limits_{T}\min\{w(T)\}$，式中取遍 G 的所有生成树 T。

科茹斯克尔（Kruskal）算法是一个好算法。Kruskal 算法又称避圈法，其具体求解流程如下。

（1）选择边 e_1，使得 $w(e_1)$ 尽可能小；

（2）若已选定边 $e_1,e_2,\dots,e_i$，则从 $E\setminus\{e_1,e_2,\dots,e_i\}$ 中选取 e_{i+1}，使得：

① $G\left[\{e_1,e_2,\dots,e_{i+1}\}\right]$ 为无圈图；

② $w(e_{i+1})$ 是满足(i)的尽可能小的权。

（3）当第(2)步不能继续执行时，则停止。

定理： 由 Kruskal 算法构作的任何生成树 $T^* = G\left[\{e_1, e_2, \ldots, e_{v-1}\}\right]$ 都是最小树。

如图 4-7 为一个图模型，试求其最小生成树。

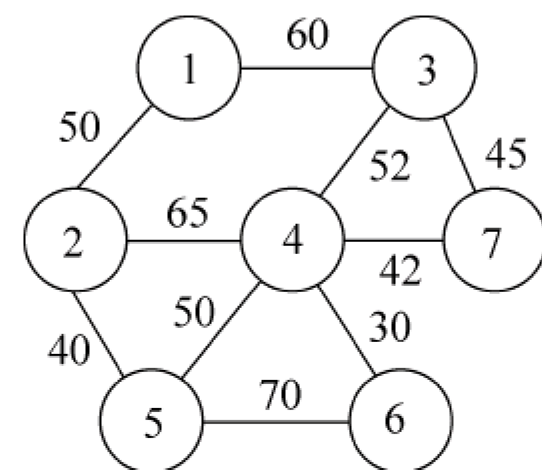


图 4-7　图模型

对于 Kruskal 算法而言，其输入参数为连通图的边权矩阵 $b(i,j)$，注意在边权矩阵的定义中顶点编号是自然序，即编号应为 1、2、…。算法的输出参数为最小生成树的边集合 T，最小生成树的邻接矩阵 v 和最小生成树的权。其中边集合 T 的第一行和第二行分别代表边的两个端点。

最小生成树的邻接矩阵可以由 T 重构出来，因为如果 T 如上所述，则可知，对应矩阵 T 每一列的两个顶点 (v_i, v_j)，在邻接矩阵中有 $v(i,j)=1, v(j,i)=1$，而不在 T 中表示出的边的值即为 0。这样就可由 T 得出最小生成树的邻接矩阵。

最小生成树的权即为选出的边的权值之和。

编程如下：

```
clc;clear;
M=1000;
a(1,2)=50; a(1,3)=60;                    %初始网络值-邻接矩阵的赋值
a(2,4)=65; a(2,5)=40;
a(3,4)=52;a(3,7)=45;
a(4,5)=50; a(4,6)=30;a(4,7)=42;
a(5,6)=70;
[i,j]=find((a~=0)&(a~=M));               %对角线赋值 0
b=a(find((a~=0)&(a~=M)));                %矩阵中不为 0 和 M 的数
data=[i';j';b'];index=data(1:2,:);       %赋值
loop=max(size(a))-1;                     %循环次数
result=[];                               %初始化
while length(result)<loop
   temp=min(data(3,:));                  %取最小
   flag=find(data(3,:)==temp);           %查找是否相等的元素，相等为 1，不等为 0
   flag=flag(1);
   v1=data(1,flag);v2=data(2,flag);      %赋值
   if index(1,flag)~=index(2,flag)       %如果不等结果保留
      result=[result,data(:,flag)];
   end
   if v1>v2
      index(find(index==v1))=v2;         %继续查找，更新
   else
      index(find(index==v2))=v1;         %继续查找，更新
   end
   data(:,flag)=[];                      %清空，初始化
   index(:,flag)=[];                     %清空，初始化
end
result   %输出结果
```

运行程序输出结果如下：

```
result =

    4    2    4    3    1    4
    6    5    7    7    2    5
   30   40   42   45   50   50
```

由结果可知，最小树模型如图 4-8 所示。

图 4-8　最小树模型

4.9.2　最短路

1. Dijkstra算法

首先假设图的表述为 $G=(V,E,W)$，其中顶点集 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$，即顶点的个数 $|V|=p$。w_{ij} 表示边 (v_i,v_j) 的权，且需要满足非负条件 $w_{ij}\geqslant 0$。如果 $(v_i,v_j)\notin E$，则令 $w_{ij}=\infty$。最短路问题即为求 G 中 v_1 到其他各顶点的最短路径。用 $d(v_j)$ 表示从 v_1 到 v_j 的只允许经过已选出顶点的最短路径的权值。相应的算法步骤如下。

（1）初始化，令 $d(v_1)=0$，$d(v_j)=w_{1j}\ (j=2,3,\ldots,n)$，$S=\{v_1\}$，$R=V\setminus S=\{v_2,v_3,\ldots,v_p\}$；

（2）在 R 中寻找一个顶点 v_k，使得：

$$d(v_k)=\min_{v_j\in R}\{d(v_j)\}$$

置 $S=S\cup\{v_k\}$，$R=V\setminus S$。若 $R=\varnothing$，则算法终止，否则转(3)；

（3）修正 $d(v_j)$，对 R 中每个 v_j，令：$d(v_j)=\min\{d(v_j),d(v_k)+w_{kj}\}$ 转(2)。

这个算法经过 $|V|-1$ 次循环之后，所有顶点都被选出，$d(v_j)\ (j=1,2,\ldots,p)$ 的终值就给出了从顶点 v_1 到其余各顶点 $v_j\ (j=2,3,\ldots,p)$ 的最短路径的长度，反向追踪即可以得到最短路径。

假设有一个旅行家，他居住在城市 v_1，他计划游览他附近的若干城市。假设这些城市网络可以用图 4-9 来表示，现在他首先要估算从 A 出发到各城市的最少花费，然后确定行程，如何求解 v_1 到各顶点的最短距离。

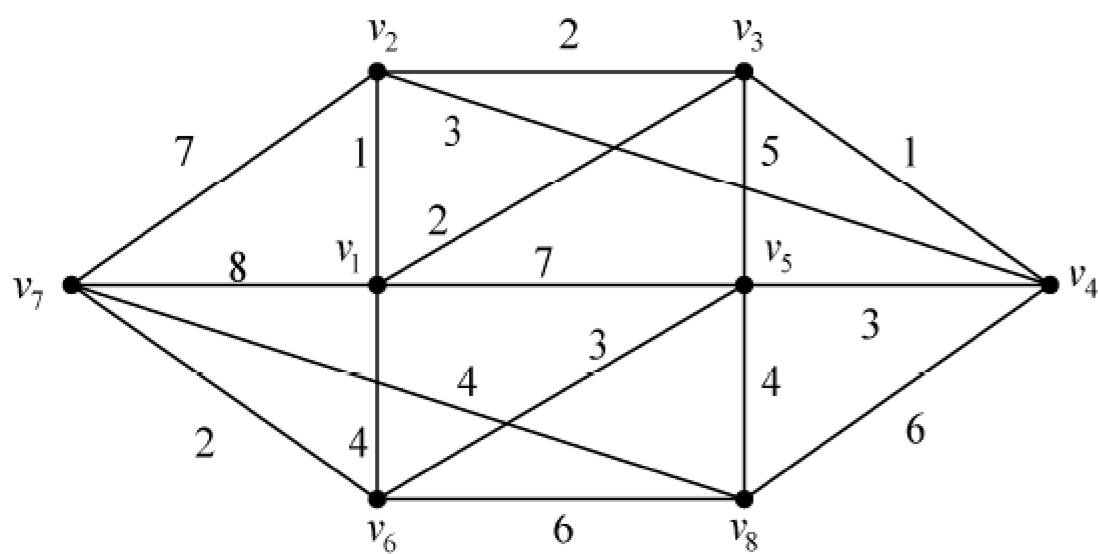


图 4-9　城市网络图

由图 4-9 可知，写出图 G 的带权邻接矩阵：

$$W=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty & 7 & 4 & 8 & \infty \\ 1 & 0 & 2 & 5 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty & 6 \\ 7 & \infty & 5 & 3 & 0 & 3 & \infty & 4 \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 4 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

则相应的权值 w_{ij} 即是 W 的第 i 行第 j 列的元素。由于 G 是无向图，可见 W 为对称阵。

（1）令 $d(v_1)=0$， $d(v_j)=w_{1j}\ (j=2,3,\ldots,n)$， 则有：

$$S=\{v_1\},R=\{v_2,v_3,\ldots,v_8\}$$

（2） $d\{v_k\}=\min\limits_{v_j\in R}\{d(v_j)\}=d(v_2)=1$， 则有：

$$S=\{v_1,v_2\},R=\{v_3,\ldots,v_8\}$$

（3）修正 $d(v_j),v_j\in R$， 则有公式：

$$d(v_j)=\min\{d(v_j),d(v_2)+w_{2j}\}$$

继续转（2），即按照下面的循环计算：

（4） $d\{v_k\}=\min\limits_{v_j\in R}\{d(v_j)\}=d(v_3)=2$， 则有：

$$S=\{v_1,v_2,v_3\},R=\{v_4,v_5\ldots,v_8\}$$

（5）修正 $d(v_j),v_j\in R$， 则有公式：

$$d(v_j)=\min\{d(v_j),d(v_3)+w_{3j}\}$$

编写 dijkstra()函数如下：

```
function [r_path, r_cost] = dijkstra(pathS, pathE, transmat)
%The Dijkstra's algorithm, Implemented by Yi Wang, 2005
% pathS: 所求最短路径的起点
% pathE :所求最短路径的终点
% transmat: 图的转移矩阵或者邻接矩阵，应为方阵
if ( size(transmat,1) ~= size(transmat,2) )
  error( 'detect cycles:Dijkstra SC', ...
         'transmat has different width and heights' );
end
%初始化:
%noOfNode-图中的顶点数
%parent(i)-节点 i 的父节点
%distance(i)-从起点 pathS 的最短路径的长度
%queue-图的广度遍历
noOfNode = size(transmat, 1);
for i = 1:noOfNode
  parent(i) = 0;        %初值操作
  distance(i) = Inf;  %初值操作
end
queue = [];           %队列

%由路径开始最短路计算
for i=1:noOfNode
  if transmat(pathS, i)~=Inf
    distance(i) = transmat(pathS, i);
    parent(i)   = pathS;  %当前路径
    queue     = [queue i];
  end
end

%对图进行广度遍历
while length(queue) ~= 0
  hopS  = queue(1);
```

```
  queue = queue(2:end);

  for hopE = 1:noOfNode
    if distance(hopE) > distance(hopS) + transmat(hopS,hopE)   %如果当前距
离大于转换后的距离
      distance(hopE) = distance(hopS) + transmat(hopS,hopE);  %更新
      parent(hopE)   = hopS;
      queue          = [queue hopE];
    end
  end

end

%回溯进行最短路径的查找
r_path = [pathE];
i = parent(pathE);

while i~=pathS && i~=0
  r_path = [i r_path];
  i      = parent(i);
end
if i==paths
  r_path = [i r_path];              %记录
else
  r_path = []                       %清空
end
%返回最短路径的权和
r_cost = distance(pathE);
```

主程序如下：

```
clc %清屏
clear all;                          %删除 workplace 变量
close all;                          %关掉显示图形窗口
clc,clear,close all
W=[0 1 2 Inf 7 4 8 Inf ;            %带权邻接矩阵
   1 0 2 5 Inf Inf 7 Inf ;
   2 2 0 1 5 Inf Inf Inf;
   Inf 5 1 0 3 Inf Inf 6 ;
   7 Inf 5 3 0 3 Inf 4 ;
   4 Inf Inf Inf 3 0 2 6;
   8 7 Inf Inf Inf 2 0 4;
   Inf Inf Inf 6 4 6 4 0];
[r_path, r_cost] = dijkstra(1, 8, W)  %从 1～8 节点的最短路径
```

运行程序输出结果如下：

```
r_path =
     1     3     4     8
r_cost =
     9
```

整理结果如下：

$$\nu_1 \rightarrow \nu_3 \rightarrow \nu_4 \rightarrow \nu_8$$

2. Ford算法

对于类似于图 4-9 中的问题，也可用动态规划的方法求解。但在有些问题中，有时会

出现权为负值的情况，此时，这两种方法不能使用。所谓 Ford 算法，只要对 Dijkstra 算法做两点改变即可。

（1）对算法步骤（3）修正 $d\left(v_j\right)$ 应用于所有顶点，而不只对 R 中顶点，因而，对 S 中的顶点和 R 中的顶点一样，其数值都可以继续减少。

（2）仅当 $R=\varnothing$，且算法步骤（3）修正 $d\left(v_j\right)$ 不能使任一顶点上指定的数值减少，算法才终止。

注意： 当一个图包含总长度为负值的回路（负回路）时，Ford 算法可能失败。

当任何一个顶点确实为 $d\left(v_k\right)$ 达到 $|V|$ 次时，算法应终止，此时图中包含负回路，否则，Ford 算法进行有限次后终止，并得到正确结果。

计算赋权图中各对顶点之间最短路径，显然可以调用 Dijkstra 算法。具体方法是：每次以不同的顶点作为起点，用 Dijkstra 算法求出从该起点到其余顶点的最短路径，反复执行 n 次这样的操作，就可得到从每一个顶点到其他顶点的最短路径。

设图可以表示为：$G=\left(V,E,W\right)$，其顶点集合为 $V=\left\{v_1,v_2,\ldots,v_p\right\}$，即顶点的个数 $|V|=p$。w_{ij} 表示边 $\left(v_i,v_j\right)$ 的权，且需要满足非负条件 $w_{ij}\geqslant 0$。如果 $\left(v_i,v_j\right)\notin E$，则令 $w_{ij}=\infty$。

Floyd 算法的基本思想是在图的带权邻接矩阵中用插入顶点的方法，递推依次构造出 p 个矩阵 $D_1,D_2,\ldots,D_p$，其中引入符号 $d_{ij}^{(k)}$ 表示从顶点 v_i 到顶点 v_j 的路径上所经过的顶点序号不大于 k 的最短路径长度，k 代表迭代的次数。这样使得最后得到的矩阵 D_p 称为图的距离矩阵，同时也求出插入点矩阵以得到两点间的最短路径。

（1）距离矩阵的步骤如下。

① 首先写出赋权图 G 的带权邻接矩阵 W，把它作为距离矩阵的初值，即：

$$D_0=\left(d_{ij}^{(0)}\right)_{p\times p}=\left(w_{ij}\right)_{p\times p}=W$$

② 对 $k=1,2,\ldots,p$ 计算 $D_k=\left(d_{ij}^{(k)}\right)_{p\times p}$；

其中，$d_{ij}^{(k)}$ 表示从 v_i 到 v_j 且中间点仅为 $v_1,v_2,\ldots,v_k$ 的 k 个点的所有路径中的最短路的长度。其求取方法为 $d_{ij}^{(k)}=\min\{d_{ij}^{(k-1)},d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)}\}$，于是，$D_p=(d_{ij}^{(p)})_{p\times p}$ 中元素 $d_{ij}^{(p)}$ 就是从 v_i 到 v_j 的路径中间可插入任何顶点的路径中最短路的长度，即 $D^{(p)}$ 就是所求距离矩阵。

（2）路径矩阵的步骤如下。

设路径矩阵 $R_k=\left(r_{ij}^{(k)}\right)_{p\times p}$，$r_{ij}^{(k)}$ 表示从 v_i 到 v_j 的最短路要经过点号为 $r_{ij}^{(k)}$ 的点。

算法开始设置初始值为：$R_0=(r_{ij}^{(0)})_{p\times p}$，$r_{ij}^{(0)}=j$；

迭代到第 k 步：

$$r_{ij}^{(k)}=\begin{cases}k & d_{ij}^{(k-1)}>d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)},\\ r_{ij}^{(k-1)} & \text{otherwise}\end{cases}$$

即由 D_{k-1} 到 D_k 迭代，若某个元素改变（变小），则由 R_{k-1} 到 R_k 迭代中，相应元素改为 k，表示到第 k 次迭代，从 v_i 到 v_j 的最短路过点 v_k 比过原有中间点更短。在求得 D_p 时求得 R_p，可由 R_p 来查找任何点对之间最短路的路径。

（3）查找最短路路径的步骤如下。

若 $r_{ij}^{(p)}=a_1$，则点 v_{a_1} 是点 v_i 到点 v_j 的最短路的中间点。然后用同样的方法再分头查找。若有下列条件：

① 向点 v_i 追溯得：$r_{ia_1}^{(p)}=a_2, r_{ia_2}^{(p)}=a_3, \dots, r_{ia_k}^{(p)}=a_k$；

② 向点 v_j 追溯得：$r_{a_1 j}^{(p)}=b_1, r_{b_1 j}^{(p)}=b_2, \dots, r_{b_m j}^{(p)}=j$　；

则由点 v_i 到 v_j 的最短路的路径为：$\{v_i, v_{a_k}, \cdots, v_{a_2}, v_{a_1}, v_{b_1}, v_{b_2}, \cdots, v_{b_m}, v_j\}$。

（4）Floyd 算法步骤如下：

首先引入符号 $d(i,j)$ 代表 i 到 j 的距离，$r(i,j)$ 代表 i 到 j 之间的插入点。算法的输入为带权邻接矩阵 $W=(w(i,j))_{p\times p}$。

① 初始化

对 $\forall i,j$，设置 $d(i,j)=w(i,j)$ $r(i,j)=j$，令 $k=1$；

② 更新 $d(i,j), r(i,j)$

对 $\forall i,j$，若 $d(i,k)+d(k,j)<d(i,j)$，则令 $d(i,j)=d(i,k)+d(k,j)$，$r(i,j)=k$；

③ 判断终止条件

若 $k=p$，则算法终止；否则 $k=k+1$，转②。

现有一张城市地图如图 4-10 所示，图 4-10 中的顶点为城市，边代表两个城市间的连通关系，边上的权即为距离。每一对可达的城市间设计一条公共汽车线路，要求线路的长度在所有可能的方案里是最短的。

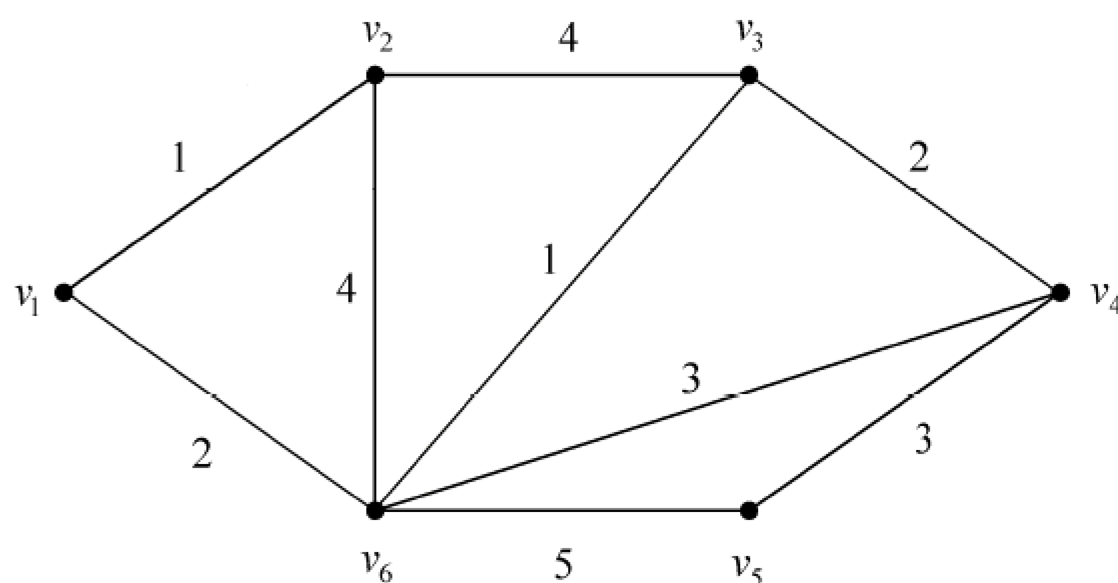


图 4-10　公交车线路

由图 4-10 可知，很显然，这个问题可以抽象成为求连通图中任意两个顶点之间的最短距离，矩阵如下：

$$D_0=\begin{bmatrix}0&1&\infty&\infty&\infty&2\\1&0&4&\infty&\infty&4\\\infty&4&0&2&\infty&1\\\infty&\infty&2&0&3&3\\\infty&\infty&\infty&3&0&5\\2&4&1&3&5&0\end{bmatrix},\quad R_0=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{bmatrix}$$

根据 Floyd 算法的步骤对该问题进行求解，编程如下：

```
clc                           %清屏
clear all;                    %删除 workplace 变量
```

```
close all;              %关掉显示图形窗口
clc,clear,close all
x7=[0 1 inf inf inf 2;    %D0
1 0 4 inf inf 4;
inf 4 0 2 inf 1;
inf inf 2 0 3 3;
inf inf inf 3 0 5;
2 4 1 3 5 0];
n=length(x7);
path=zeros(n);
%floyd 最小距离法
for k=1:n
    for i=1:n
        for j=1:n
            if x7(i,j)>x7(i,k)+x7(k,j)      %节点直接连接大于中间插入的节点时
                x7(i,j)=x7(i,k)+x7(k,j);    %记录更新
                path(i,j)=k;                %路由号记录
            end
        end
    end
end
x7
path
```

运行程序输出结果如下：

```
x7 =
     0     1     3     5     7     2
     1     0     4     6     8     3
     3     4     0     2     5     1
     5     6     2     0     3     3
     7     8     5     3     0     5
     2     3     1     3     5     0
path =
     0     0     6     6     6     0
     0     0     0     3     6     1
     6     0     0     0     4     0
     6     3     0     0     0     0
     6     6     4     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
```

其中 path 中为 0，表示不需要经过中转站，直接到达该位置。例如，path(1,2)=0，而 $x7(1,2)=1$，表示第 1 站到第 2 站之间直接到达，最短路为 1；相应的 $x7(1,3)=3$，而 path(1,3)=6，表示第 1 站需要经过第 6 站台作为中转站方能抵达第 3 站，最短路为 3，其他依此类推。

4.10　基本粒子群算法

粒子群算法（PSO）是一种基于群体的随机优化技术。与其他基于群体的进化算法相比，它们均初始化为一组随机解，通过迭代搜寻最优解。不同的是：进化计算遵循适者生存原则，而 PSO 模拟社会。将每个可能产生的解表述为群中的一个微粒，每个微粒都具有自己的位置向量和速度向量，以及一个由目标函数决定的适应度。所有微粒在搜索空间中以一定的速度飞行，通过追随当前搜索到的最优值来寻找全局最优值。

PSO 模拟社会采用了以下三条简单规则对粒子个体进行操作：①飞离最近的个体，以

避免碰撞。②飞向目标。③飞向群体的中心。这是粒子群算法的基本概念之一。

Reynolds、Boyd 和 Richerson 在研究人类的决策过程时，提出了个体学习和文化传递的概念。根据他们的研究结果，人们在决策过程中使用两类重要信息，一是自身的经验，二是其他人的经验。也就是说，人们根据自身的经验和他人的经验进行自己的决策。这是粒子群算法的另一基本概念。

粒子群算法最早是在1995年由美国社会心理学家James Kennedy和电气工程师Russell Eberhart 共同提出，其基本思想是受他们早期对许多鸟类的群体行为进行建模与仿真研究结果的启发。而他们的建模与仿真算法主要利用了生物学家 Frank Heppner 的模型。

Frank Heppner 的鸟类模型在反映群体行为方面与其他类模型有许多相同之处，不同的地方在于：鸟类被吸引飞向栖息地。在仿真中，一开始每只鸟均无特定的目标进行飞行，直到有一只鸟飞到栖息地，当设置期望栖息比期望留在鸟群中具有较大的适应值时，每只鸟都将离开群体而飞向栖息地，随后就自然的形成了鸟群。由于鸟类用简单的规则确定自己的飞行方向与飞行速度（实质上，每只鸟都试图停在鸟群中而又不相互碰撞），当一只鸟飞离鸟群而飞向栖息地时，将导致它周围的其他鸟也飞向栖息地。这些鸟一旦发现栖息地，将降落在此，驱使更多的鸟落在栖息地，直到整个鸟群都落在栖息地。

鸟类寻找栖息地与对一个特定问题寻找解很类似，已经找到栖息地的鸟引导它周围的鸟飞向栖息地的方式，增加了整个鸟群都找到栖息地的可能性，也符合信念社会的认知观点。J.Kennedy 和 R.Eberhart 对 Frank Heppner 的模型进行了修正，以使粒子能够飞向解空间并在最好解处降落。其关键在于如何保证粒子降落在最好解而不降落在其他解处，这就是信念的社会性及智能性所在。

信念具有社会性的实质在于个体向它周围的成功者学习。个体和周围的其他同类比较，并模仿优秀者的行为。要解决这一问题，关键在于在探索（寻找一个好解）和开发（利用一个好解）之间寻找一个好的平衡。太小的探索导致算法收敛于早期遇到的好解处，而太小的开发会使算法不收敛。

另一方面，需要在个性与社会性之间寻找平衡。也就是说：既希望个体具有个性化，像鸟类模型中的鸟不相互碰撞，又希望其知道其他个体已经找到的好解并向它们学习，即社会性。

J.Kennedy 与 R.Eberhart 很好地解决了这个问题。1995 年他们在 IEEE 国际神经网络学术会议上正式发表了题为："Particle Swarm Optimization"的文章，标志着粒子群算法的诞生。

粒子群算法与其他的进化类算法类似，也采用"群体"和"进化"的概念，同样也根据个体的适应值大小进行操作。不同的是，PSO 中没有进化算子，而是将每个个体看作搜索空间中没有重量和体积的微粒，并在搜索空间中以一定的速度飞行，该飞行速度由个体飞行经验和群体的飞行经验进行动态调整。

设在一个 S 维的目标搜索空间中，有 m 个粒子组成一个群体，其中第 i 个粒子表示为一个 S 维的向量 $\vec{x}_i=\left(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iS}\right)$， $i=1,2,\cdots,m$，每个粒子的位置就是一个潜在的解。将 $\vec{x}_i$ 代入一个目标函数就可以算出其适应值，根据适应值的大小衡量解的优劣。第 i 个粒子的飞翔的速度是 S 维向量，记为 $\vec{V}=(V_{i1},V_{i1},\cdots V_{iS})$。记第 i 个粒子迄今为止搜索到的最优位置为 $\vec{P}_{iS}=\left(P_{iS},P_{iS},\cdots,P_{iS}\right)$，整个粒子群迄今为止搜索到的最优位置为

$\vec{P}_{gs}=\left(P_{gs},P_{gs},\cdots,P_{gs}\right)$。

不妨设 $f(x)$ 为最小化的目标函数，则微粒 i 的当前最好位置由下式确定：

$$p_i(t+1)=\begin{cases}p_i(t)\to f\left(x_i(t+1)\right)\geqslant f\left(p_i(t)\right)\\X_i(t+1)\to f\left(x_i(t+1)\right)<f\left(p_i(t)\right)\end{cases}$$

Kennedy 和 Eberhart 用下列公式对粒子操作：

$$v_{is}(t+1)=v_{is}(t)+c_1r_{1s}(t)\left(p_{is}(t)-x_{is}(t)\right)+c_2r_{2s}(t)\left(p_{gs}(t)-x_{is}(t)\right) \tag{4.1}$$

$$x_{is}(t+1)=x_{is}(t)+v_{is}(t+1) \tag{4.2}$$

其中，$i=[1,m]$，$s=[1,S]$；学习因子 c_1 和 c_2 是非负常数；r_1 和 r_2 为相互独立的伪随机数，服从 $[0,1]$ 上的均匀分布。$v_{is}\in[-v_{\max},v_{\max}]$，$v_{\max}$ 为常数，由用户设定。

从以上进化方程可见，c_1 调节粒子飞向自身最好位置方向的步长，c_2 调节粒子飞向全局最好位置方向的步长。为了减少进化过程中粒子离开搜索空间的可能，v_{is} 通常限定在一个范围之中，即 $v_{is}\in[-v_{\max},v_{\max}]$，$v_{\max}$ 为最大速度，如果搜索空间在 $[-x_{\max},x_{\max}]$ 中，则可以设定 $v_{\max}=kx_{\max}$，$0.1\leqslant k\leqslant 1.0$。

Y.Shi 和 Eerhart 对（4.1）作了改进：

$$v_{is}(t+1)=\omega\bullet v_{is}(t)+c_1r_{1s}\left(p_{is}(t)-x_{is}(t)\right)+c_2r_{2s}(t)\left(p_{gs}(t)-x_{gs}(t)\right) \tag{4.3}$$

在（4.3）中 ω 为非负数，称为动力常量，控制前一速度对当前速度的影响，ω 较大时，前一速度影响较大，全局搜索能力较强；ω 较小时，前一速度影响较小，局部搜索能力较强。通过调整 ω 大小来跳出局部极小值。

终止条件根据具体问题取最大迭代次数或粒子群搜索到的最优位置满足的预定最小适应阈值。

初始化过程如下：

Ⅰ.设定群体规模 m；

Ⅱ.对任意的 i，s，在 $[-x_{\max},x_{\max}]$ 内服从均匀分布产生 x_{is}；

Ⅲ.对任意的 i，s，在 $[-v_{\max},v_{\max}]$ 内服从均匀分布产生 v_{is}；

Ⅳ.对任意的 i，设 $y_i=x_i$。

PSO 算法步骤如下。

Step1：初始化一个规模为 m 的粒子群，设定初始位置和速度。

Step2：计算每个粒子的适应值。

Step3：对每个粒子将其适应值和其经历过的最好位置 p_{is} 的适应值进行比较，若较好，则将其作为当前的最好位置。

Step4：对每个粒子将其适应值和全局经历过的最好位置 p_{gs} 的适应值进行比较，若较好，则将其作为当前的全局最好位置。

Step5：根据方程（4.1）和（4.2）分别对粒子的速度和位置进行更新。

Step6：如果满足终止条件，则输出解；否则返回 Step2。

PSO 算法流程如图 4-11 所示。

粒子群为由 n 个粒子组成的种群 $X=\left(X_1,X_2,X_3,\cdots X_n\right)$；

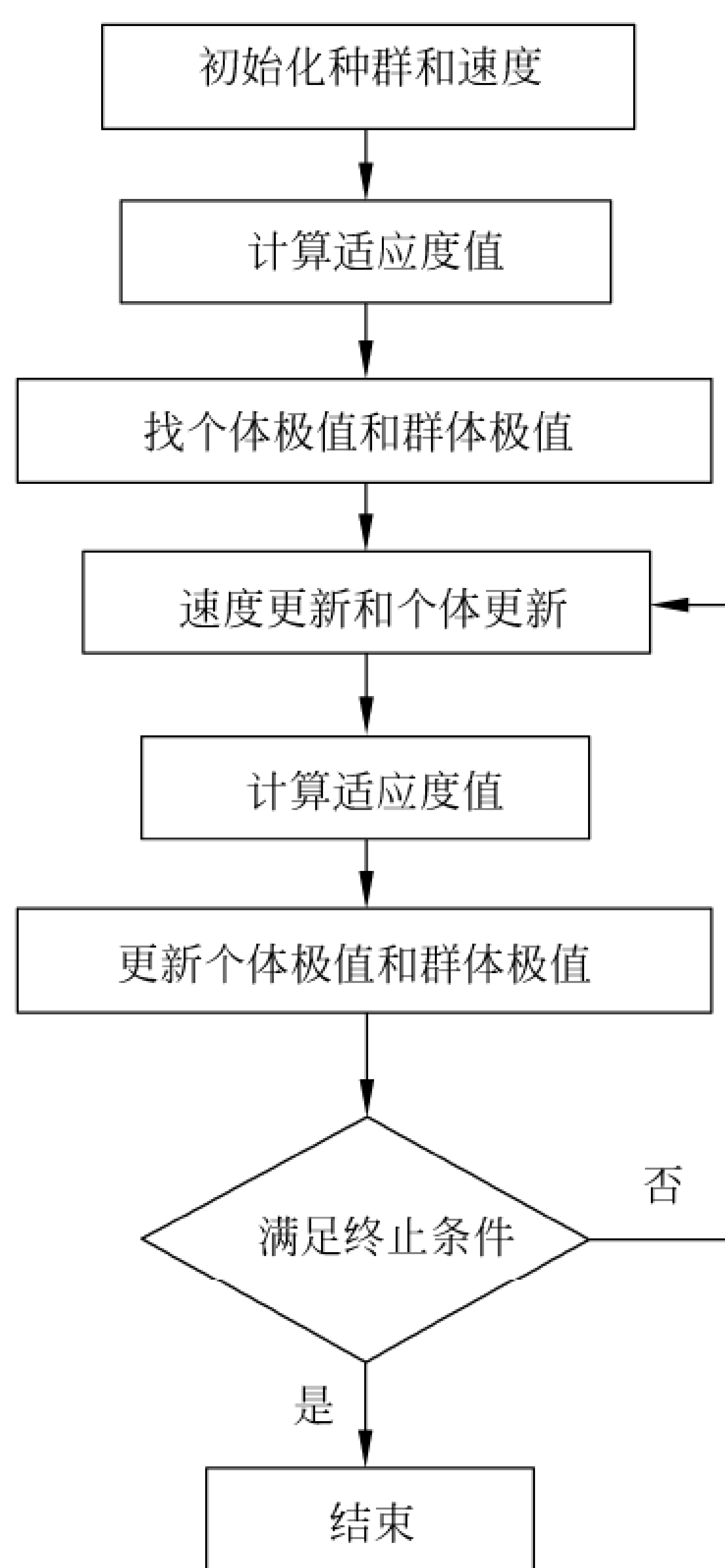


图 4-11　粒子群算法流程图

第 i 个粒子表示一个 D 维向量 $X_i=\left(x_{i1},x_{i2},x_{i3},\cdots,x_{iD}\right)^T$；

第 i 个粒子的速度为 $V_i=\left(V_{i1},V_{i2},V_{i3},\cdots,V_{iD}\right)^T$；

个体极值为 $P_i=\left(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{iD}\right)^T$；

全局极值为 $P_g=\left(P_{g1},P_{g2},\cdots,P_{gD}\right)^T$；

速度更新为 $V_{id}^{k+1}=V_{id}^{k}\mid+c_1r_1\left(P_{id}^k-X_{id}^k\right)+c_2r_2\left(P_{pd}^k-X_{id}^k\right)$，$c_1$ 和 c_2 为其两个参数值，r_1 和 r_2 为其两个随机值；

位置更新为 $X_{id}^{k+1}=X_{id}^k+V_{id}^{k+1}$。

对于 Ackley 函数：

$$f(x)=-c_1\exp\left(-0.2\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^2}\right)-\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos(2\pi x_j)\right)+c_1+e$$

这是一个无约束优化问题，其中 $c_1=20$，$e=2.71282$。若 $n=2$，则全局最优为 $f\left(x^*\right)=f\left(0,0\right)=0$。该函数称为 Ackley 函数，有很多局部最优的值。

对于 Ackley 函数图形，选取其中一个凹峰进行分析，MATLAB 程序如下：

```
%经典函数
clc                         %清屏
clear all;                  %删除 workplace 变量
close all;                  %关掉显示图形窗口
```

```
x1=-0.5:0.01:0.5;      %x 取值范围
x2=-0.5:0.01:0.5;      %x 取值范围
for i=1:101
    for j=1:101
        %目标函数
        z(i,j)=-20*exp(-0.2*sqrt((x1(i)^2+x2(j)^2)/2))-exp((cos(2*pi* x1
        (i))+cos(2*pi*x2(j)))/2)+20+2.71289;
    end
end
[x,y]=meshgrid(x1,x2);         %网格化
figure('color',[1 1 1])
mesh(x,y,z) %画图
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
```

程序运行如图 4-12 所示。

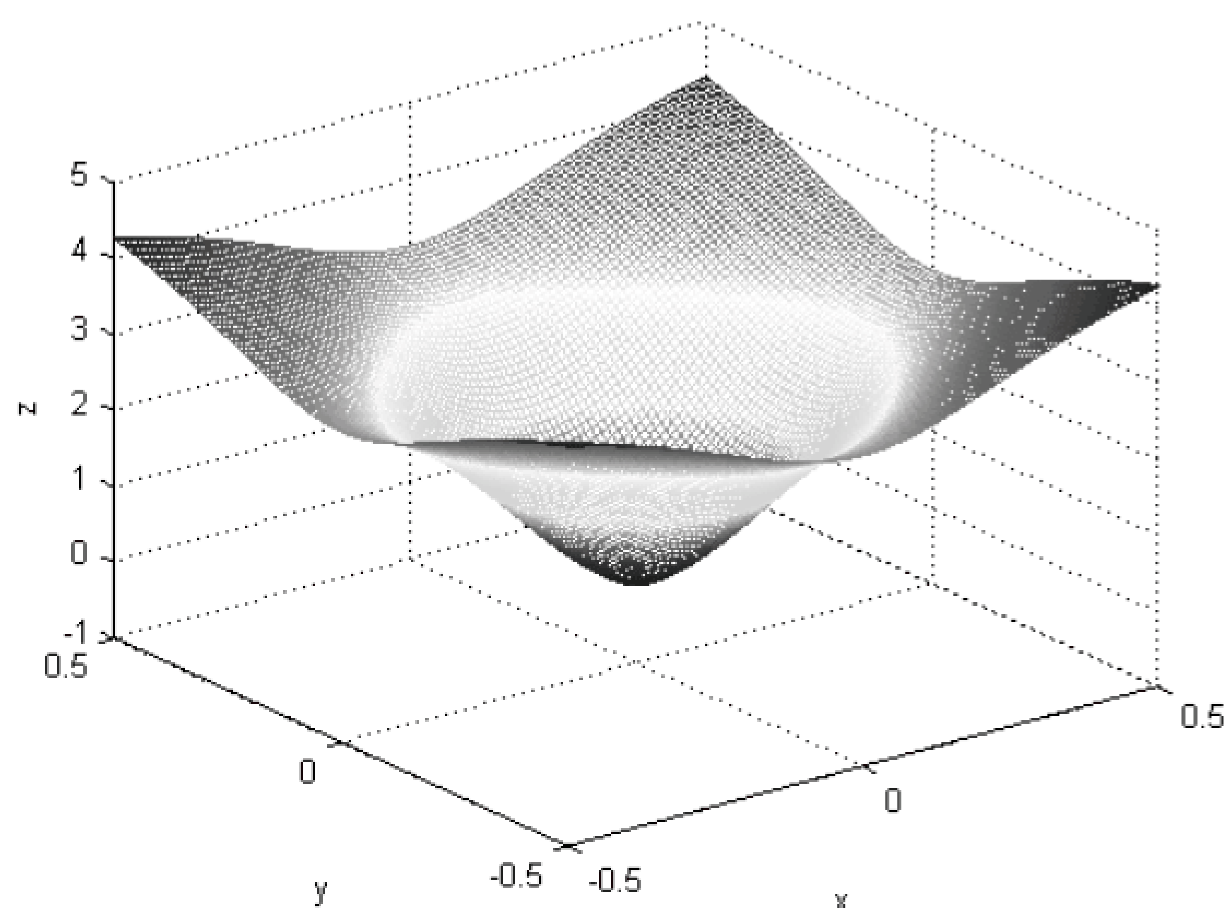


图 4-12　待求解极值函数图形

可看出，该区间内的 Ackley 函数图形只有一个极小值点，因此，对于该段函数进行寻优，不会陷入局部最小，采用粒子群算法对该函数进行极值寻优，编写 MATLAB 如下：

```
%%清空环境
clc                         %清屏
clear all;                  %删除 workplace 变量
close all;                  %关掉显示图形窗口
%%参数初始化
%粒子群算法中的两个参数
c1 = 1.49445;               %惯量因子
c2 = 1.49445;               %惯量因子

maxg=200;                   %进化次数
sizepop=20;                 %种群规模

%初始速度和种群上下边界值
Vmax=1;                     %最大移动速度
Vmin=-1;                    %最小移动速度
popmax=5;                   %粒子最大取值
popmin=-5;                  %粒子最小取值
```

```
%%产生初始粒子和速度
for i=1:sizepop
    %随机产生一个种群
    pop(i,:)=5*rands(1,2);          %初始种群
    V(i,:)=rands(1,2);              %初始化速度
    %计算适应度
    fitness(i)=fun(pop(i,:));       %染色体的适应度
end

%找最好的染色体
[bestfitness bestindex]=min(fitness);
zbest=pop(bestindex,:);             %全局最佳
gbest=pop;                          %个体最佳
fitnessgbest=fitness;               %个体最佳适应度值
fitnesszbest=bestfitness;           %全局最佳适应度值

%%迭代寻优
for i=1:maxg
    maxg                            %迭代次数
    for j=1:sizepop

        %速度更新
        V(j,:) = V(j,:) + c1*rand* (gbest(j,:) - pop(j,:)) + c2*rand* (zbest
        - pop(j,:));
        V(j,find(V(j,:)>Vmax))=Vmax;
        V(j,find(V(j,:)<Vmin))=Vmin;

        %种群更新
        pop(j,:)=pop(j,:)+0.5*V(j,:);
        pop(j,find(pop(j,:)>popmax))=popmax;      %上界约定
        pop(j,find(pop(j,:)<popmin))=popmin;      %下界约定

        %自适应变异
        if rand>0.8
            k=ceil(2*rand);
            pop(j,k)=rand;                        %赋值
        end

        %适应度值
        fitness(j)=fun(pop(j,:));                 %目标函数


        %个体最优更新
        if fitness(j) < fitnessgbest(j)
            gbest(j,:) = pop(j,:);
            fitnessgbest(j) = fitness(j);
        end

        %群体最优更新
        if fitness(j) < fitnesszbest
            zbest = pop(j,:);
            fitnesszbest = fitness(j);
        end

    end
    yy(i)=fitnesszbest;
```

```
end

%%结果分析
plot(yy,'Linewidth',2)
title(['适应度曲线  ' '终止代数=' num2str(maxg)]);
grid on
xlabel('进化代数');ylabel('适应度');
%结果输出
zbest %最佳个体值
```

待寻优的目标函数如下：

```
function y = fun(x)
y=-20*exp(-0.2*sqrt((x(1)^2+x(2)^2)/2))-exp((cos(2*pi*x(1))+cos(2*pi*x(2
)))/2)+20+2.71289;
```

运行程序得如图 4-13 所示的适应度曲线。

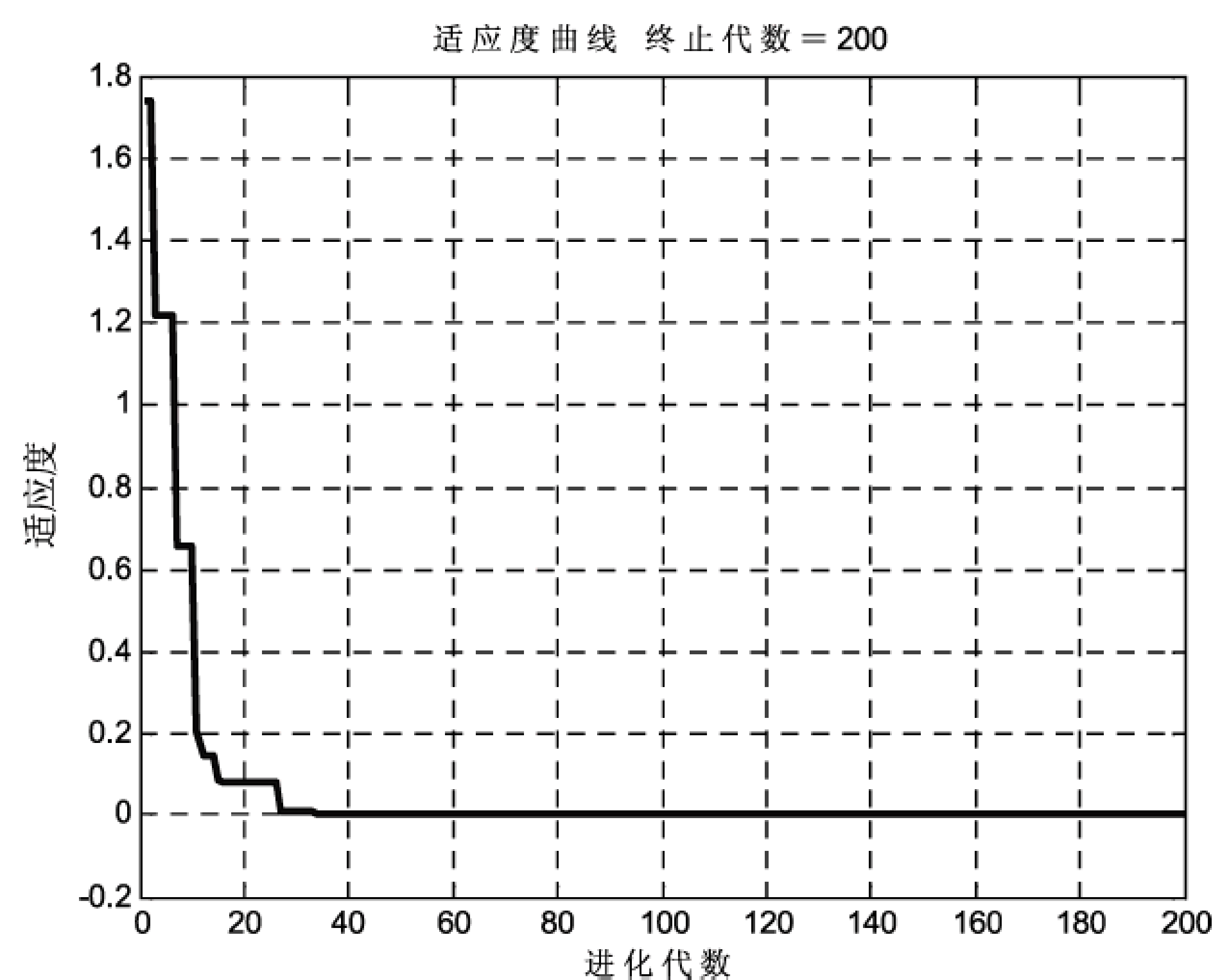


图 4-13　适应度曲线

其中最优函数个体值为：

```
zbest =

   -0.0015    0.0009
```

从图 4-13 可看出，该函数的寻优是收敛的，最优个体值接近于理论值（0,0）。因此，采用粒子群算法进行函数极值寻优，快速、准确且鲁棒性较好。

第5章　基于LINGO的基础理论及算法设计

LINGO 软件能够实现目标规划和最优问题的快速求解，编程较简单，因此在数学建模上常常用到。LINGO 软件功能可以求解线性规划、整数规划、混合整数规划、二次规划和目标规划。LINGO 特点是执行速度非常快。通过该章学习，能够熟练的知道 LINGO 具体编程技巧及编程方法。

学习目标：

（1）LINGO 求解整数规划模型等；

（2）LINGO 求解混合整数规划等；

（3）LINGO 求解非线性规划问题等；

（4）LINGO 求解大规模数学规划问题等；

（5）LINGO 求解各种工程应用问题。

5.1　整 数 规 划

在工程设计和企业管理中，常常会遇到要求决策变量取整数值的规划问题。安排生产时，投入的人力与机器数量必须是整数，生产的某些产品（如汽车、机床和船舶等）的数量也是整数。整数规划就是用于研究和处理这一类问题的数学规划。如果在线性规划的基础上，把规划中的变量（部分或全部）限制为整数时，就称之为线性整数规划。大部分的整数规划都是线性的，所以我们也称线性整数规划为整数规划。

在许多情况下，我们都可以把规划问题的决策变量看成是连续的变量；但在某些情况下，规划问题的决策变量却被要求一定是整数。例如，完成某项工作所需要的人数或设备台数，进入市场销售的商品件数及某一机械设备维修的次数等。当连续的决策变量变为离散变量时非线性优化问题通常会难解得多。

【例 5-1】求解下列整数规划问题：

$$
\begin{aligned}
&\max z = 5x_1 + 8x_2 \\
&s.t.\quad x_1 + x_2 \leqslant 6 \\
&\qquad\ \ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\
&\qquad\ \ x_1, x_2 \geqslant 0 \\
&\qquad\ \ x_1, x_2 \in Z
\end{aligned}
$$

在 LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
max 5x1+8x2      !目标约束
st
x1+x2<6          !目标约束一
```

```
5x1+9x2<45   !目标约束二
end
gin 2         !两个变量为整数
```

运行结果如下所示：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                           40.00000
Objective bound:                           40.00000
Infeasibilities:                           0.000000
Extended solver steps:                            0
Total solver iterations:                          0


                  Variable           Value        Reduced Cost
                       X1         0.000000           -5.000000
                       X2         5.000000           -8.000000

                       Row    Slack or Surplus      Dual Price
                         1         40.00000           1.000000
                         2         1.000000           0.000000
                         3         0.000000           0.000000
```

由此可得到，最优解：

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

此时相应的 z 的最大值 $z_{\max} = 40$。

🔔**注意**：gin n，模型中的前 n 个变量为整数变量，整数变量申明须放在最后（即 end 后）。

5.2　集合覆盖问题

集合覆盖问题（Set Covering Problem，简称 SCP）是经典的 NP-hard 问题，同样也是运筹学研究中典型的组合优化问题，是一个计算机科学问题的典型代表，是日常生活中普遍存在的工程设计问题。在人员调动、网络安全、资源分配、电路设计和运输车辆路径安排等领域有广泛的应用，多年来吸引了众多计算机科学家和运筹学研究人员的研究兴趣。

【例 5-2】设有一集合 S={1,2,3,4,5} 及 S 的一个子集簇 P={{1,2},{1,3,5},{2,4,5},{3},{1},{4,5}}。假设选择 P 中各个元素的费用为 1、1.5、1.5、0.8、0.8、1，试从 P 中选一些元素使之覆盖 S 且所选元素费用之和最小。

记 $x_i = \begin{cases} 1, 若P中第\text{i}元素被中 \\ 0, \ 否 \end{cases}$，$i = 1,2,3,4,5,6$。

由于 1 必须出现，则 $x_1 + x_2 + x_5 \geqslant 1$；

由于 2 必须出现，则 $x_1 + x_3 \geqslant 1$；

由于 3 必须出现，则 $x_2 + x_4 \geqslant 1$；

由于 4 必须出现，则 $x_3 + x_6 \geqslant 1$；

由于 5 必须出现，则 $x_2 + x_3 + x_6 \geqslant 1$。

由此得 0-1 规划模型：

$$\min z = x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 + 0.8x_4 + 0.8x_5 + x_6$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 \geqslant 1 \\ x_1 + x_3 \geqslant 1 \\ x_2 + x_4 \geqslant 1 \\ x_3 + x_6 \geqslant 1 \\ x_2 + x_3 + x_6 \geqslant 1 \end{cases}$$

$$x_i = 0或1, i = 1,2,3,4,5,6$$

在 LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
min x1+1.5x2+1.5x3+0.8x4+0.8x5+x6    !目标约束
st
x1+x2+x5>1                           !目标约束一 x1+x2+x5≥1
x1+x3>1                              !目标约束二 x1+x3≥1
x2+x4>1                              !目标约束三 x2+x4≥1
x3+x6>1                              !目标约束四 x3+x6≥1
x2+x3+x6>1                           !目标约束五 x2+x3+x6≥1
end                                  !模型输入结束
int 6                                !目标约束，6 个变量为 0-1 变量
```

运行结果如下所示：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              2.800000
Objective bound:                              2.800000
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             0


                  Variable           Value        Reduced Cost
                        X1        1.000000            1.000000
                        X2        0.000000            1.500000
                        X3        0.000000            1.500000
                        X4        1.000000           0.8000000
                        X5        0.000000           0.8000000
                        X6        1.000000            1.000000
```

由此可得：

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 1 \end{cases}$$

5.3　混合整数规划问题

混合整数规划通常都可表述为整数规划问题，部分变量为整数变量。混合整数规划以

及整数规划都是在有限个可供选择的方案中，寻找满足一定约束的最好方案。混合整数规划的应用范围是极其广泛的（如水利工程的设置计划和投资项目选择等问题都可表示成混合整数线性规划问题）。它不仅在工业、工程设计和科学研究方面有许多应用，而且在计算机设计、系统可靠性、编码和经济分析等方面也有新的应用。通常求解混合证书规划问题采用的方法是分支定界法。

【例 5-3】某厂有 3 种矿石资源甲、乙和丙，可以用来生产 4 种不同的产品 A1、A2、A3 和 A4，其单位消耗、利润和固定成本（不生产则不需要）等数据如表 5-1 所示，问应如何安排生产？

表 5-1　数据表

	产　品				
需要资源	A1	A2	A3	A4	资源总量
甲	8	7	6	5	1000
乙	5	3	5	5	800
丙	2	5	4	5	600
单位利润	250	235	210	190	
固定成本	2000	1500	1200	900	

用 x_i 表示生产 A_i 的数量（$i=1,2,3,4$）；

$y_i=1$ 表示要生产 A_i（$i=1,2,3,4$）；

$y_i=0$ 表示不生产 A_i（$i=1,2,3,4$）；

矿石资源甲的总量满足：$8x_1+7x_2+6x_3+5x_4 \leqslant 1000$；

矿石资源乙的总量满足：$5x_1+3x_2+5x_3+5x_4 \leqslant 800$；

矿石资源丙的总量满足：$2x_1+5x_2+4x_3+5x_4 \leqslant 600$。

则相应的目标模型如下：

$$\max z=250x_1+235x_2+210x_3+190x_4-2000y_1-1500y_2-1200y_3-900y_4$$

则得模型约束条件：$$s.t.\begin{cases}8x_1+7x_2+6x_3+5x_4 \leqslant 1000\\5x_1+3x_2+5x_3+5x_4 \leqslant 800\\2x_1+5x_2+4x_3+5x_4 \leqslant 600\\0 \leqslant x_i < M\ y_i\ ,i=1,2,3,4\\y_i=0,1\end{cases}$$

其中，M 表示一个充分大的正常数。

在 LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
max 250x1+235x2+210x3+190x4-2000y1-1500y2-1200y3-900y4   !目标约束
st
8x1+7x2+6x3+5x4<1000        !目标约束一
5x1+3x2+5x3+5x4<800         !目标约束二
2x1+5x2+4x3+5x4<600         !目标约束三
x1-9999y1<0                 !目标约束四
x2-9999y2<0                 !目标约束五
x3-9999y3<0                 !目标约束六
x4-9999y4<0                 !目标约束七
end                         !模型输入结束
int y1                      !目标约束八，0-1 变量
```

```
int y2   !目标约束九，0-1 变量
int y3   !目标约束十，0-1 变量
int y4   !目标约束十一，0-1 变量
```

运行结果如下所示：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                        31500.00
Objective bound:                        31500.00
Infeasibilities:                      0.5684342E-13
Extended solver steps:                         3
Total solver iterations:                      20


                  Variable           Value        Reduced Cost
                       X1        66.66667            0.000000
                       X2        0.000000            13.00000
                       X3        0.000000            0.000000
                       X4        93.33333            0.000000
                       Y1        1.000000            2000.000
                       Y2        0.000000            1500.000
                       Y3        0.000000            1200.000
                       Y4        1.000000            900.0000
```

由此可得：

$$\begin{cases} x_1 = 66.6667 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 93.3333 \end{cases}$$

最大利润 $z = 31500$ 。

5.4　目 标 规 划

目标规划（Goal Programming）是线性规划的一种特殊应用，能够处理单个主目标与多个目标并存，以及多个主目标与多个次目标并存的问题。

5.4.1　基于序贯式算法的线性规划

通过求解目标规划问题的有效算法——序贯式算法（序贯法是一种简便、快速、粗略测定半数有效量的方法）可将目标规划分解成计算两个线性规划。

【例 5-4】对如下模型进行序贯式算法分析，将其分成两个现行规划模型进行分析。

$$\min Z=((d_{1_}+d_1),(2d_2+d_3))$$

$$s.t.\begin{cases} x_1\text{-}10x_2+d_{1_}\text{-}d_1=50 \\ 3x_1+5x_2+d_{2_}\text{-}d_2=20 \\ 8x_1+6x_2+d_{3_}\text{-}d_3=100 \\ x_i(i=1,2),d_{j_},d_j(j=1,2,3)\geqslant 0 \end{cases}$$

将其分成如下两个模型。

（1）模型一

$$\min Z_1=(d_{1_}+d_1)$$

$$s.t.\begin{cases} x_1-10x_2+d_{1_}-d_1=50 \\ 3x_1+5x_2+d_{2_}-d_2=20 \\ x_i(i=1,2),d_{j_},d_j(j=1,2)\geqslant 0 \end{cases}$$

（2）模型二

$$\min Z=(2d_2+d_3)$$

$$s.t.\begin{cases} x_1-10x_2+d_{1_}-d_1=50 \\ 3x_1+5x_2+d_{2_}-d_2=20 \\ 8x_1+6x_2+d_{3_}-d_3=100 \\ d_{1_}+d_1=0 \\ x_i(i=1,2),d_{j_},d_j(j=1,2,3)\geqslant 0 \end{cases}$$

其中，$d_{1_}+d_1=0$ 的值 0 为模型一求得的最优值。

先求第一个目标函数（模型一）的最优值，在 LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
min d1_+d1          !目标约束
ST
x1-10x2+d1_-d1=50 !约束条件
3x1+5x2+d2_-d2=20
end                 !模型输入结束
```

运行结果如下所示：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          0.000000
Infeasibilities:                          0.000000
Total solver iterations:                         0


                  Variable           Value        Reduced Cost
                       D1         0.000000            1.000000
                       D1         0.000000            1.000000
                       X1         50.00000            0.000000
                       X2         0.000000            0.000000
                       D2         0.000000            0.000000
                       D2         130.0000            0.000000
```

可得最优值 $d_{1_}+d_1=0$。

然后再求第二个目标函数（模型二）的最优值，注意要把第一个目标函数的最优值 $d_{1_}+d_1=0$ 作为一个约束条件。

在 LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
min 2d2+d3             !目标约束七
ST
x1-10x2+d1_-d1=50      !约束条件
3x1+5x2+d2_-d2=20
8x1+6x2+d3_-d3=100
d1_+d1=0               !模型一求得的最优值
end                    !模型输入结束
```

运行结果如下所示：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              560.0000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             0


                    Variable           Value        Reduced Cost
                          D2        130.0000            0.000000
                          D3        300.0000            0.000000
                          X1        50.00000            0.000000
                          X2        0.000000            156.0000
                          D1        0.000000            0.000000
                          D1        0.000000            28.00000
                          D2        0.000000            2.000000
                          D3_       0.000000            1.000000
```

即可算得第二级最优值 $2d_2+d_3=560$。

采用将目标规划分解成计算两个线性规划可方便地将模型简化，达到快速求讲解的目的。

5.4.2　帆船生产问题

【例 5-5】一公司每个季度能正常生产 40 条帆船，生产费用为每条 400 美元。已知某年四个季度帆船的需求量是 40、60、75 和 25（每个季度末交货），为此需加班，加班生产每条帆船的费用为 450 美元，多余生产的帆船每季度的库存费用为 20 美元，另生产开始前有 10 条船，问如何安排可使总费用最小？

记 r_i（$i=1,2,3,4$）表示第 i 季度的正常生产帆船数量；

p_i（$i=1,2,3,4$）表示第 i 季度的加班生产帆船数量；

v_i（$i=1,2,3,4$）表示第 i 季度的库存量。

第一个季度帆船的需求量是 40，满足：

$$v_1 + r_1 + p_1 = 40 + v_2$$

第二个季度帆船的需求量是 60，满足：

$$v_2 + r_2 + p_2 = 60 + v_3$$

第三个季度帆船的需求量是 75，满足：

$$v_3 + r_3 + p_3 = 75 + v_4$$

第四个季度帆船的需求量是 25，满足：

$$v_4 + r_4 + p_4 = 25$$

得模型：

$$\min z = 400\sum_{i=1}^{4} r_i + 450\sum_{i=1}^{4} p_i + 20\sum_{i=1}^{4} v_i$$

$$\begin{cases} s.t.\ \ 0 \leqslant r_i \leqslant 40, p_i \geqslant 0, v_i \geqslant 0, i = 1,2,3,4 \\ v_1 + r_1 + p_1 = 40 + v_2 \\ v_2 + r_2 + p_2 = 60 + v_3 \\ v_3 + r_3 + p_3 = 75 + v_4 \\ v_4 + r_4 + p_4 = 25 \\ v_1 = 10 \end{cases}$$

其中，r_i、p_i和v_i为整数。

在 LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
min 400r1+400r2+400r3+400r4+
    450p1+450p2+450p3+450p4+
    20v1+20v2+20v3+20v4      !目标函数
st
r1<40     !约束条件
r2<40     !约束条件
r3<40
r4<40
v1=10
v1+r1+p1-v2=40
v2+r2+p2-v3=60
v3+r3+p3-v4=75
v4+r4+p4=25
end    !模型输入结束
gin 12  !12 个变量为整数
```

运行结果如下所示：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          78650.00
Objective bound:                          78650.00
Infeasibilities:                          0.000000
Extended solver steps:                           0
Total solver iterations:                         0


                  Variable        Value       Reduced Cost
                       R1      40.00000        400.0000
                       R2      40.00000        400.0000
                       R3      40.00000        400.0000
                       R4      25.00000        400.0000
                       P1      0.000000        450.0000
                       P2      10.00000        450.0000
                       P3      35.00000        450.0000
                       P4      0.000000        450.0000
                       V1      10.00000        0.000000
                       V2      10.00000        20.00000
                       V3      0.000000        20.00000
                       V4      0.000000        20.00000
```

可得：

$$\begin{cases} r_1 = 40 \\ r_2 = 40 \\ r_3 = 40 \\ r_4 = 25 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 10 \\ p_3 = 35 \\ p_4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v_1 = 10 \\ v_2 = 10 \\ v_3 = 0 \\ v_4 = 0 \end{cases}$$

此时总费用最小为$z = 78650$。

5.4.3　资金分配问题

企业通过资金的投入和使用，取得收入，并实现了资金的增值。企业应将取得的收入扣除生产经营中的各种耗费和损失，最终获得利润。企业的利润，首先，需依法向国家缴

纳所得税，这一部分资金的分配具有强制性；其次，依法提取各种公积金和公益金，用于企业风险金和职工的集体福利设施；最后，将利润在所有者之间进行分配，这是企业收益分配中的重点，也是资金分配管理的重点。企业应在遵循国家分配政策的前提下，从企业的长远利益出发，合理确定收益分配的规模和分配方式，使企业获得最大的长远利益。筹资、投资和分配是企业主要的财务活动，它们之间相互依存、相互作用，共同作用于生产经营过程，促进资金不断地运动，最终取得最大的利润。这三者构成了财务管理的主要内容。

【例 5-6】假定有一笔资金 b=100 万元，现有 7 个投资项目，各项目的投资额和收益如表 5-2 所示。

表 5-2　数据表

项目	1	2	3	4	5	6	7
投资额 a 万	10	14	19	21	28	32	40
收益 c 万	3	4	5	6	7	9	13

问如何分配使收益最大？

记每个项目为 x_i（$i=1,2,3,4,5,6,7$），$x_i=1$ 表示投资该项目，$x_i=0$ 表示不投资该项目。

收益最大为：

$$\max z = 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4+7x_5+9x_6+13x_7$$

一笔资金 b=100 万元，投资额满足：

$$10x_1+14x_2+19x_3+21x_4+28x_5+32x_6+40x_7 \leqslant 100$$

模型为：

$$\max z = 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4+7x_5+9x_6+13x_7$$

$$\begin{cases} s.t. \\ 10x_1+14x_2+19x_3+21x_4+28x_5+32x_6+40x_7 \leqslant 100 \\ x_i = 0,1,\ i=1,2,\dots,7 \end{cases}$$

在 LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
max  3x1+4x2+5x3+6x4+7x5+9x6+13x7            !目标函数
st
10x1+14x2+19x3+21x4+28x5+32x6+40x7<100      !约束条件
End                                          !模型输入结束
int 7    !7 个变量为 0-1 变量
```

运行结果如下所示：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              29.00000
Objective bound:                              29.00000
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             0


                        Variable           Value        Reduced Cost
                              X1        1.000000           -3.000000
```

```
                    X2         1.000000          -4.000000
                    X3         0.000000          -5.000000
                    X4         0.000000          -6.000000
                    X5         0.000000          -7.000000
                    X6         1.000000          -9.000000
                    X7         1.000000          -13.00000
```

由此可知：投资项目 1、2、6、7，最大收益为 29。

5.5　非线性规划

非线性规划是具有非线性约束条件或目标函数的数学规划，是运筹学的一个重要分支。非线性规划是 20 世纪 50 年代才开始形成的一门新兴学科，70 年代又得到进一步的发展。非线性规划在工程、管理、经济、科研和军事等方面都有广泛的应用，为最优设计提供了有力的工具。

【例 5-7】对于下列非线性模型：

$$\min \quad z = 3x^2 + y^2 - xy + 0.4y$$

$$s.t$$

$$\begin{cases} 1.2x + 0.9y > 1.1 \\ x + y = 1 \\ y < 0.7 \end{cases}$$

在 LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
model:                           !模型输入开始
min=3*x^2+y^2-x*y+0.4*y;         !目标函数必须以'min='或 ‘max='开始
1.2*x+0.9*y>1.1;                 !每条语句必须以;!结尾
x+y=1;
y<0.7;
end                              !模型输入结束
```

运行结果如下所示：

```
Local optimal solution found.
Objective value:                          1.355556
Infeasibilities:                         0.5551115E-16
Extended solver steps:                           2
Total solver iterations:                         9


                  Variable          Value        Reduced Cost
                         X       0.6666667         0.000000
                         Y       0.3333333         0.000000
```

由此可知：

$$\begin{cases} x = 0.66667 \\ y = 0.33333 \\ z_{\min} = 1.355556 \end{cases}$$

🔔注意：@BND(L,x,U)　　限制 x 的范围 L<=x<=U;
　　　@BIN(x)　　　x 为 0 或 1;
　　　@FREE(x)　　取消对 x 的限制;
　　　@GIN(x)　　　x 为整数。

5.5.1　平板车装货问题

【例 5-8】【美国 1988 年数学建模竞赛 B 题】7 种不同规格的包装箱要装两辆铁路平板车上去。包装箱的宽和高相同，但厚度（t，以 cm 计）和重量（w，以 kg 计）不同，表 5-3 给出了每种包装箱的高度、重量和数量。每辆车有 10.2m 长的地方用来装包装箱（像面包片那样），车的载重为 40 吨。对 C_5、C_6、C_7 规格的包装箱的总数有一个特殊的限制：这些规格箱子所占的空间（厚度）不能超过 302.7cm。试把包装箱装到两辆平板车上去，从而使得浪费的空间最小。

表 5-3　每种包装箱的高度、重量和数量

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	
t	48.7	52.0	61.3	72.0	48.7	52.0	64.0	cm
w	2000	3000	1000	500	4000	2000	1000	kg
数量	8	7	9	6	6	4	8	

记：$x1$～$x7$ 分别为第 1 辆平板车上 7 种货物的装载数，$x8$～$x14$ 为第 2 辆车。

浪费的空间最小，利用的空间最大，则满足：

$$\max \quad z = 48.7x_1 + 48.7x_8 + 52x_2 + 52x_9 + 61.3x_3 + 61.3x_{10} + 72x_4 + 72x_{11} + 48.7x_{12} + 52x_6 + 52x_{13} + 64x_7 + 64x_{14}$$

每辆车有 10.2m 长的地方用来装包装箱，则需要满足：

$$\begin{cases} 48.7x_1 + 52x_2 + 61.3x_3 + 72x_4 + 48.7x_5 + 52x_6 + 64x_7 < 1020 \\ 48.7x_8 + 52x_9 + 61.3x_{10} + 72x_{11} + 48.7x_{12} + 52x_{13} + 64x_{14} < 1020 \end{cases}$$

车的载重为 40 吨，则需要满足：

$$\begin{cases} 2000x_1 + 3000x_2 + 1000x_3 + 500x_4 + 4000x_5 + 2000x_6 + 1000x_7 < 40000 \\ 2000x_8 + 3000x_9 + 1000x_{10} + 500x_{11} + 4000x_{12} + 2000x_{13} + 1000x_{14} < 40000 \end{cases}$$

箱子所占的空间（厚度）不能超过 302.7cm，则需满足：

$$48.7x_5 + 48.7x_{12} + 52x_6 + 52x_{13} + 64x_7 + 64x_{14} < 302.7$$

7 种规格的包装箱的数量需要满足下式：

$$\begin{cases} x_1 + x_8 < 8 \\ x_2 + x_9 < 7 \\ x_3 + x_{10} < 9 \\ x_4 + x_{11} < 6 \\ x_5 + x_{12} < 6 \\ x_6 + x_{13} < 4 \\ x_7 + x_{14} < 8 \end{cases}$$

因此得模型为：

$$\max\quad z=48.7x_1+48.7x_8+52x_2+52x_9+61.3x_3+61.3x_{10}$$
$$+72x_4+72x_{11}+48.7x_{12}+52x_6+52x_{13}+64x_7+64x_{14}$$

$s.t.$

$$\begin{cases}48.7x_1+52x_2+61.3x_3+72x_4+48.7x_5+52x_6+64x_7<1020\\48.7x_8+52x_9+61.3x_{10}+72x_{11}+48.7x_{12}+52x_{13}+64x_{14}<1020\\2000x_1+3000x_2+1000x_3+500x_4+4000x_5+2000x_6+1000x_7<40000\\2000x_8+3000x_9+1000x_{10}+500x_{11}+4000x_{12}+2000x_{13}+1000x_{14}<40000\\48.7x_5+48.7x_{12}+52x_6+52x_{13}+64x_7+64x_{14}<302.7\\x_1+x_8<8\\x_2+x_9<7\\x_3+x_{10}<9\\x_4+x_{11}<6\\x_5+x_{12}<6\\x_6+x_{13}<4\\x_7+x_{14}<8\end{cases}$$

LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
max
48.7x1+48.7x8+52.0x2+52x9+61.3x3+61.3x10+72.0x4+72x11+48.7x5+48.7x12+52
.0x6+52x13+64.0x7+64x14
st   !约束条件;
48.7x1+52.0x2+61.3x3+72.0x4+48.7x5+52.0x6+64.0x7<1020
48.7x8+52.0x9+61.3x10+72.0x11+48.7x12+52.0x13+64.0x14<1020
2000x1+3000x2+1000x3+500x4+4000x5+2000x6+1000x7<40000
2000x8+3000x9+1000x10+500x11+4000x12+2000x13+1000x14<40000
48.7x5+48.7x12+52.0x6+52x13+64.0x7+64x14<302.7
   x1+x8<8     !约束条件,依次对应公式
   x2+x9<7     !约束条件,依次对应公式
   x3+x10<9    !约束条件,依次对应公式
   x4+x11<6    !约束条件,依次对应公式
   x5+x12<6    !约束条件,依次对应公式
   x6+x13<4    !约束条件,依次对应公式
   x7+x14<8    !约束条件,依次对应公式
end
gin 14   !14 个变量为整数
```

运行结果如下所示：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              2039.400
Objective bound:                              2039.400
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                           38550
Total solver iterations:                         92227


                 Variable           Value        Reduced Cost
                       X1        8.000000           -48.70000
                       X8        0.000000           -48.70000
```

```
              X2        0.000000         -52.00000
              X9        7.000000         -52.00000
              X3        0.000000         -61.30000
             X10        9.000000         -61.30000
              X4        6.000000         -72.00000
             X11        0.000000         -72.00000
              X5        3.000000         -48.70000
             X12        0.000000         -48.70000
              X6        1.000000         -52.00000
             X13        2.000000         -52.00000
              X7        0.000000         -64.00000
             X14        0.000000         -64.00000
```

浪费的空间最小，利用的空间最大 $z = 2039.4$ 。

5.5.2　绝对值最小问题

【例 5-9】求 4 个整数 20～100 的整数 a、b、c 和 d，使得 $\left|\pi - \dfrac{a \times b}{c \times d}\right| + 1$ 最小。

在 LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
model:
min=@ABS(z)+1;  !目标函数
z=3.14159265358979323846264 3-x*y/(u*v);
@BND(20,x,100);  !约束条件,x 取值范围
@BND(20,y,100);  !约束条件,y 取值范围
@BND(20,u,100);  !约束条件,u 取值范围
@BND(20,v,100);  !约束条件,v 取值范围
@GIN(x);  !约束条件,x 为整数
@GIN(y);  !约束条件,y 为整数
@GIN(u);  !约束条件,u 为整数
@GIN(v);  !约束条件,v 为整数
end
```

运行结果如下所示：

```
Linearization components added:
   Constraints:          4
   Variables:            4
   Integers:             1

Local optimal solution found.
Objective value:                         1.066593
Objective bound:                         1.066593
Infeasibilities:                         0.000000
Extended solver steps:                        443
Total solver iterations:                     1916


                 Variable           Value        Reduced Cost
                        Z    0.6659265E-01        0.000000
                        X        30.00000       -0.1025000
                        Y        41.00000       -0.7500000E-01
                        U        20.00000        0.1537500
                        V        20.00000        0.1537500
```

因此最好的结果是：$z_{\min}=1.066593$，$a=51,b=77,c=50,d=25$。

5.5.3　选址问题

【例 5-10】设某城市有某种物品的 10 个需求点，第 i 个需求点 P_i 的坐标为 (a_i,b_i)，道路网与坐标轴平行，彼此正交。现打算建一个该物品的供应中心，且由于受到城市某些条件的限制，该供应中心只能设在 x 界于[5, 10]，y 界于[5, 10]的范围之内。问该中心应建在何处为好?

P 点的坐标如表 5-4 所示。

表 5-4　坐标表

a_i	1	4	3	5	9	12	6	20	17	8
b_i	2	10	8	18	1	4	5	10	8	9

建立数学模型如下。

设供应中心的位置为 (x,y)，要求它到最远需求点的距离尽可能小，此处采用沿道路行走计算距离，可知每个用户点 P_i 到该中心的距离为 $|x-a_i|+|x-b_i|$，于是有：

$$\min_{x,y}\left\{\max\left[|x-a_i|+|x-b_i|\right]\right\}$$

$$s\cdot t\quad 5\leqslant x\leqslant 10, 5\leqslant y\leqslant 10$$

记 $z=\max\left[|x-a_i|+|x-b_i|\right]$，则原模型可化为：

$$\min z$$

$$s.t.\ \begin{cases}|x-a_i|+|x-b_i|\leqslant z, i=1,2,\ldots,10\\ 5\leqslant x\leqslant 10, 5\leqslant y\leqslant 10\end{cases}$$

在 LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
model:
min=z; !目标函数
@ABS(x-1)+@ABS(y-2)<z;     !约束条件,如表 5-4 数据
@ABS(x-4)+@ABS(y-10)<z;    !约束条件,如表 5-4 数据
@ABS(x-3)+@ABS(y-8)<z;     !约束条件,如表 5-4 数据
@ABS(x-5)+@ABS(y-18)<z;    !约束条件,如表 5-4 数据
@ABS(x-9)+@ABS(y-1)<z;     !约束条件,如表 5-4 数据
@ABS(x-12)+@ABS(y-4)<z;    !约束条件,如表 5-4 数据
@ABS(x-16)+@ABS(y-5)<z;    !约束条件,如表 5-4 数据
@ABS(x-20)+@ABS(y-10)<z;   !约束条件,如表 5-4 数据
@ABS(x-17)+@ABS(y-8)<z;    !约束条件,如表 5-4 数据
@ABS(x-8)+@ABS(y-9)<z;     !约束条件,如表 5-4 数据
@BND(5,x,10);              !约束条件,x 取值范围
@BND(5,y,10);              !约束条件,y 取值范围
end
```

运行结果如下所示：

```
Linearization components added:
   Constraints:          80
```

```
   Variables:          80
   Integers:           20

Global optimal solution found.
Objective value:                          13.50000
Objective bound:                          13.50000
Infeasibilities:                          0.000000
Extended solver steps:                           1
Total solver iterations:                        10


                  Variable           Value        Reduced Cost
                         Z        13.50000            0.000000
                         X        8.500000            0.000000
                         Y        8.000000            0.000000
```

由此可知：

$$x = 8.5, y = 8, z = 13.5$$

5.6　大规模数学规划

实际问题常常是大数据量的模型，导致了一般常见的约束条件并不能满足所有的条件，则需要采用载入数据部分，作为常量进行求解，这就诞生了大规模的数学规划。

当约束和数据较多时采用的输入方法，可分为四个部分，具体格式如下：

```
model:
```

（1）集合部分

```
SETS:
集合名/1. . n/: 属性 1, 属性 2, …
ENDSETS
```

（2）目标函数与约束部分

（3）数据部分

```
DATA:
……
ENDDATA
```

（4）初始化部分；（若不需要初值，则此部分可省略）

```
INIT:
……
ENDINIT
end
```

5.6.1　飞行管理问题

【例 5-11】【1995 年全国大学生数学建模竞赛 A 题飞行管理问题】在约 10,000 米高空的某边长 160 公里的正方形区域内，经常有若干架飞机作水平飞行。区域内每架飞机的位置和速度均由计算机记录其数据，以便进行飞行管理。当一架欲进入该区域的飞机到达区

域边缘，记录其数据后，要立即计算并判断是否会与区域内的飞机发生碰撞。如果会碰撞，则应计算如何调整各架（包括新进入的）飞机飞行方向角，以避免碰撞。现假定条件如下：

（1）不碰撞的标准为任意两架飞机的距离大于 8 公里；

（2）飞机飞行方向角调整的幅度不应超过 30 度；

（3）所有飞机飞行速度均为每小时 800 公里；

（4）进入该区域的飞机在到达区域边缘时，与区域内飞机的距离应在 60 公里以上；

（5）最多需考虑 6 架飞机；

（6）不必考虑飞机离开此区域后的状况。

请你对这个避免碰撞的飞行管理问题建立数学模型，列出计算步骤，对以下数据进行计算（方向角误差不超过 0.01 度），要求飞机飞行方向角调整的幅度尽量小。设该区域 4 个顶点的坐标为(0, 0)，(160，0)，(160, 160)，(0, 160)。记录数据如表 5-5 所示。

表 5-5　数据表

飞机编号	横坐标 x	纵坐标 y	方向角（度）
1	150	140	243
2	85	85	236
3	150	155	220.5
4	145	50	159
5	130	150	230

注：方向角指飞行方向与 x 轴正向的夹角。

其数学模型为：

$$\min \sum_{i=1}^{6} |\theta_i|$$

$$s.t. \left|\beta_{ij} + \frac{1}{2}(\theta_i + \theta_j)\right| > \alpha_{ij} \ , i, j = 1, 2, \ldots, 6; i \neq j$$

$$|\theta_i| \leqslant 30^\circ \ , i = 1, 2, \ldots, 6$$

这里 θ_i 为六架飞机调整的飞行角度，α_{ij}, β_{ij} 为常数。

使用集合描述的程序。在 LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
model:
sets:
S/1..6/:z;  !z 维数初始化
SS(S,S):a,b;  !a,b 维数初始化
endsets
min=@Sum(S:@Abs(z));  !目标
@For(S(i):@BND(-30,z(i),30));  !约束条件,取值范围约定
@For(SS(i,j)|i#NE#j:@Abs(b(i,j)+0.5*z(i)+0.5*z(j))>a(i,j));   !约束条件
data:
!赋值;
a=
0.00  5.39  32.23  5.09  20.96  2.23
5.39  0.00   4.80  6.61   5.81  3.82
32.23  4.80   0.00  4.36  22.83  2.13
 5.09  6.61   4.36  0.00   4.54  2.99
20.96  5.81  22.83  4.54   0.00  2.31
2.23  3.82   2.13  2.99   2.31  0.00;
b=
```

```
0.00  109.26  -128.25  24.18  173.07  14.47
109.26    0.00  -88.87  -42.24  -92.30  9.00
-128.25  -88.87    0.00   12.48  -58.79  0.31
24.18   -42.24   12.48    0.00   5.97  -3.53
173.07  -92.30   -58.79   5.87   0.00   1.91
14.47   9.00     0.31   -3.53   1.91   0.00;
enddata
end
```

运行结果如下所示：

```
Linearization components added:
   Constraints:          144
   Variables:            144
   Integers:              36

Global optimal solution found.
Objective value:                          3.640000
Objective bound:                          3.640000
Infeasibilities:                         0.2328360E-11
Extended solver steps:                           5
Total solver iterations:                       413


                              Variable           Value
                                Z( 1)        0.000000
                                Z( 2)        0.000000
                                Z( 3)        2.840000
                                Z( 4)        0.000000
                                Z( 5)        0.000000
                                Z( 6)       0.8000000
```

飞机飞行方向角调整的最小值为 $\Sigma\theta$=3.64 。

5.6.2　仓库与客户物资分配供应问题

【例 5-12】某地区拟在 10 个地点建立仓库以存放某种物资，用于供应 20 个客户。已知下列数据，如表 5-6、表 5-7 所示。

表 5-6　仓库的固定费用（单位：万元）

仓库	仓库 1	仓库 2	仓库 3	仓库 4	仓库 5	仓库 6	仓库 7	仓库 8	仓库 9	仓库 10
固定费用	2	3	4	2	3	4	2	3	4	5

表 5-7　某仓库供应某客户全部需求量时的运费（单位：万元）

	仓库 1	仓库 2	仓库 3	仓库 4	仓库 5	仓库 6	仓库 7	仓库 8	仓库 9	仓库 10
客 1	9	10	2	6	7	15	15	1	18	6
客 2	14	16	10	4	10	18	14	1	16	7
客 3	6	9	2	1	20	14	20	5	20	17
客 4	15	12	18	9	17	18	12	2	18	4
客 5	6	8	4	3	7	11	6	2	5	12
客 6	19	14	19	3	9	4	15	5	20	4
客 7	11	4	8	5	13	20	20	16	8	19
客 8	19	20	13	15	16	20	3	8	6	4

续表

	仓库 1	仓库 2	仓库 3	仓库 4	仓库 5	仓库 6	仓库 7	仓库 8	仓库 9	仓库 10
客 9	4	9	15	6	9	13	1	7	17	13
客 10	5	13	9	10	15	1	16	7	20	16
客 11	3	2	4	9	13	10	6	12	9	7
客 12	6	17	8	13	10	19	6	9	19	6
客 13	4	18	16	6	12	6	6	5	1	1
客 14	10	19	2	4	12	4	20	12	10	14
客 15	12	15	15	8	4	12	3	6	9	11
客 16	19	18	11	5	16	20	17	4	5	5
客 17	8	16	8	2	6	20	6	17	8	7
客 18	7	9	8	9	16	1	11	11	9	9
客 19	10	8	3	13	6	20	17	11	17	11
客 20	4	8	14	8	17	7	12	20	15	13

问应如何选择仓库地址使总费用最小？

设 x_{ij} 为仓库 i 供应第 j 个客户全部需求量时的百分数；

y_i=1 表示要建仓库 i， y_i=0 表示不建仓库 i；

d_i 为建仓库 i 的固定费用；

c_{ij} 为仓库 i 供应第 j 个客户全部需求量时的运费。

仓库 i 供应第 j 个客户全部需求量时的百分数满足：$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} = 1$；

供应 20 个客户，则满足：$\sum_{j=1}^{20} x_{ij} \leqslant 20 y_i$ 。

则得混合整数规划模型：

$$\min z = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{20} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{10} d_i y_i$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{10} x_{ij} = 1,\ \ j = 1,2,\dots,20 \\ \sum_{j=1}^{20} x_{ij} \leqslant 20 y_i,\ \ i = 1,2,\dots,10 \\ x_{ij} \geqslant 0,\quad i = 1,2,\dots,10;\ j = 1,2,\dots,20 \\ y_i = 0,1\quad i = 1,2,\dots,10 \end{cases}$$

在 LINGO 的运行窗口中输入如下代码：

```
Model:
Sets:                 !定义集合
CK/1..10/:y,d; !10 个仓库，y 和 d 都是 10 维的变量，其中 y 是 01 变量，d 由下面数据给定
KH/1..20/;            !20 个客户
SS(CK,KH):x,c;        !x 和 c 都是 10*20 的变量，x 表示供应百分数，c 表示全部供应的费用
EndSets
Min=@Sum(SS(i,j):c(i,j)*x(i,j))+@Sum(CK(i):d(i)*y(i))
@For(CK(i):@Sum(KH(j):x(i,j))<20*y(i));  !若不建某仓库，是没有物资的
@For(KH(j):@Sum(CK(i):x(i,j))=1);        !每个客户需要供应的百分数之和都为 1
```

```
@For(CK(i):@Bin(y(i)));                              !y 是 0、1 变量限制
Data:   !数据部分
d=2 3   4   2   3   4   2   3   4   5
;
c=
9   14  6   15  6   19  11  19  4   5   3   6   4   10  12  19  8   7   10  4
10  16  9   12  8   14  4   20  9   13  2   17  18  19  15  18  16  9   8   8
2   10  2   18  4   19  8   13  15  9   4   8   16  2   15  11  8   8   3   14
6   4   1   9   3   3   5   15  6   10  9   13  6   4   8   5   2   9   13  8
7   10  20  17  7   9   13  16  9   15  13  10  12  12  4   16  6   16  6   17
15  18  14  18  11  4   20  20  13  1   10  19  6   4   12  20  20  1   20  7
15  14  20  12  6   15  20  3   1   16  6   6   6   20  3   17  6   11  17  12
1   1   5   2   2   5   16  8   7   7   12  9   5   12  6   4   17  11  11  20
18  16  20  18  5   20  8   6   17  20  9   19  1   10  9   5   8   9   17  15
6   7   17  4   12  4   19  4   13  16  7   6   1   14  11  5   7   9   11  13
;
EndData
End
```

运行结果如下所示：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              69.00000
Objective bound:                              69.00000
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                             26
Total solver iterations:                          304


                 Variable           Value        Reduced Cost
                   Y( 1)        1.000000            2.000000
                   Y( 2)        0.000000           -17.00000
                   Y( 3)        1.000000            4.000000
                   Y( 4)        1.000000            2.000000
                   Y( 5)        0.000000            3.000000
                   Y( 6)        1.000000            4.000000
                   Y( 7)        1.000000            2.000000
                   Y( 8)        1.000000            3.000000
                   Y( 9)        0.000000           -56.00000
                  Y( 10)        0.000000           -55.00000
```

则可得到总费用最小为 $z=69$ 。

第 2 篇　数学建模基础案例分析

第 6 章　企业销售额问题

企业销售额问题是一个较常见的预测规划、回归分析问题。企业根据行业销售额以及企业自身销售额合理的计划下一周期或者更长时间的企业规划，对于实际企业运行具有一定的指导意义。本章旨在针对企业销售额问题，可视化的显示数据趋势，并对企业销售额进行回归分析，然后对模型进行了一定的检验，减小模型误差等。

学习目标：

（1）采用 SPSS 绘制散点图以及求解多元回归模型等；

（2）学习掌握 DW 检验随机误差项等；

（3）学习掌握去除随机误差项自相关性。

6.1　摘　　要

这是个以时间为顺序的销售额的实际事例，对于公司与行业间的销售额之间的关系，建立公司销售额对全行业销售额的回归数学模型，分析该段时间内的变化规律。

问题一中，根据给定的数据，运用 SPSS 软件，绘出所需的散点图，根据直观的散点图，寻找一个恰当的曲线拟合即可。本篇中，运用直线方程、二次方程和指数方程来拟合，从中得到直线方程为最优化拟合曲线，直线方程的相关系数 $R^2=0.999$ ，统计量 $F(1,18)=14888.144$ ， $p=0.00<0.01$ ，很好地反应公司销售额与行业销售额之间的关系，故此模型用直线拟合的方式很好。

问题二中，在经济规律的作用下，一般随着时间的推移有一种向上或向下变动的趋势。本问中，将通过 MATLAB 软件中的 DW 检验诊断随机误差项的自相关性来更好的说明拟合曲线的拟合度，$DW=\sum_{t=2}^{20}(e_t-e_{t-1})^2/\sum_{t=2}^{20}e_t^2$ ，根据问题一中的拟合曲线，分别计算出拟合曲线的 y 值，再据 $e_t=y_t-\hat{y}_t$ 计算残差即随机误差项；再根据 $e_t\sim e_{t-1}$ 的散点图和 DW 的取值进而说明自相关性。此模型中，残差项是自相关性的。

问题三中，在问题二的基础上，根据 DW 表所呈现的相关性，优化模型得到一个带滞后性的经济模型；根据 $d_u<DW=1.8207<4-d_u$ ，可得残差表现出来的不存在自相关性，也就是说明模型建立很完善；由 $y_t'=y_t-\rho y_{t-1}$ 和 $x_t'=x_t-\rho x_{t-1}$ 建立一个消除自相关性的模型，重新求得拟合直线方程，建立滞后性的经济模型，通过 MATLAB 软件求解，得到 $\hat{y}_t=\text{-}0.263+0.7113y_{t-1}+0.173x_t-0.0638x_{t\text{-}1}$，此模型更加合理。

关键词：散点图、残差、拟合曲线、DW 检验、滞后性。

6.2　问题的提出

某公司想用全行业的销售额作为自变量来预测公司的销售额，表 6-1 给出了 1977～1981 年公司销售额和行业销售额的分季度数据（单位：百万元）。

（1）画出数据的散点图，观察用线性回归模型拟合是否合适。

（2）建立公司销售额对全行业销售额的回归模型，并用 DW 检验诊断随机误差项的自相关性。

（3）建立消除了随机误差项自相关性后的回归模型。

表 6-1　数据表

年	季度	t	公司销售额 y	行业销售额 x
1977	1	1	20.96	127.3
	2	2	21.40	130.0
	3	3	21.96	132.7
	4	4	21.52	129.4
1978	1	5	22.39	135.0
	2	6	22.76	137.1
	3	7	23.48	141.2
	4	8	23.66	142.8
1979	1	9	24.10	145.5
	2	10	24.01	145.3
	3	11	24.54	148.3
	4	12	24.30	146.4
1980	1	13	25.00	150.2
	2	14	25.64	153.1
	3	15	26.36	157.3
	4	16	26.98	160.7
1981	1	17	27.52	164.2
	2	18	27.78	165.6
	3	19	28.24	168.7
	4	20	28.78	171.7

6.3　模 型 假 设

（1）该模型的估计只针对上述的数据且年度数据具有合理性；

（2）各个季度的销售额彼此独立；

（3）行业中的各公司之间彼此不造成大的影响；

（4）公司销售额 y，行业销售额 x，季度为 $t=1\cdots20$ 。

6.4 问　题　一

6.4.1 模型的分析

由于公司销售额为行业销售额中的一部分，故公司销售额对行业销售额有一定的影响。在此问题中，客观的根据 20 个季度的数据来宏观的了解二者之间的关系，绘出散点图，在散点图的基础上，进行曲线的拟合，寻找最佳的拟合曲线。

20 个季度的公司销售额和行业销售额的散点图如图 6-1 和图 6-2 所示。

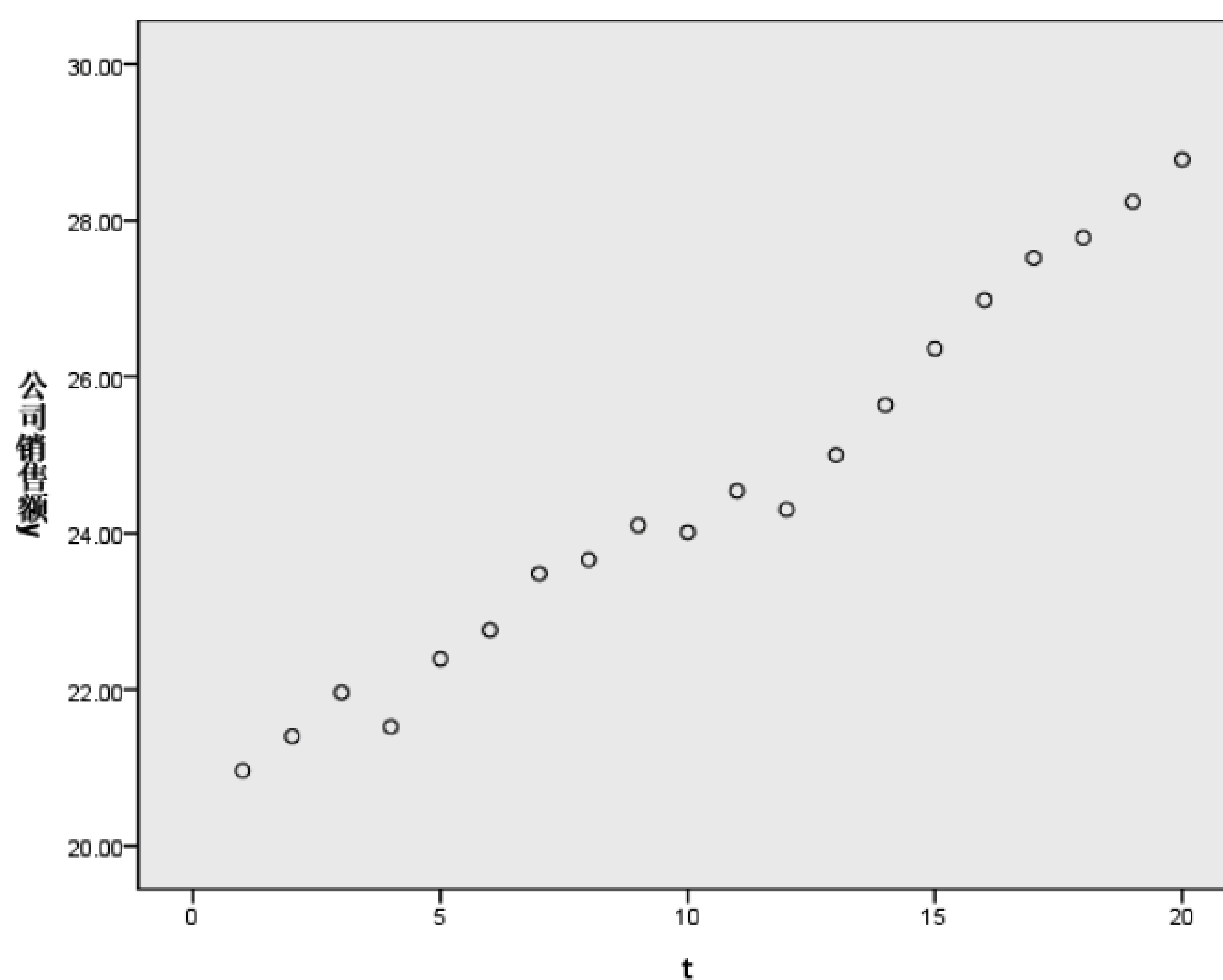


图 6-1　公司销售额变化曲线图

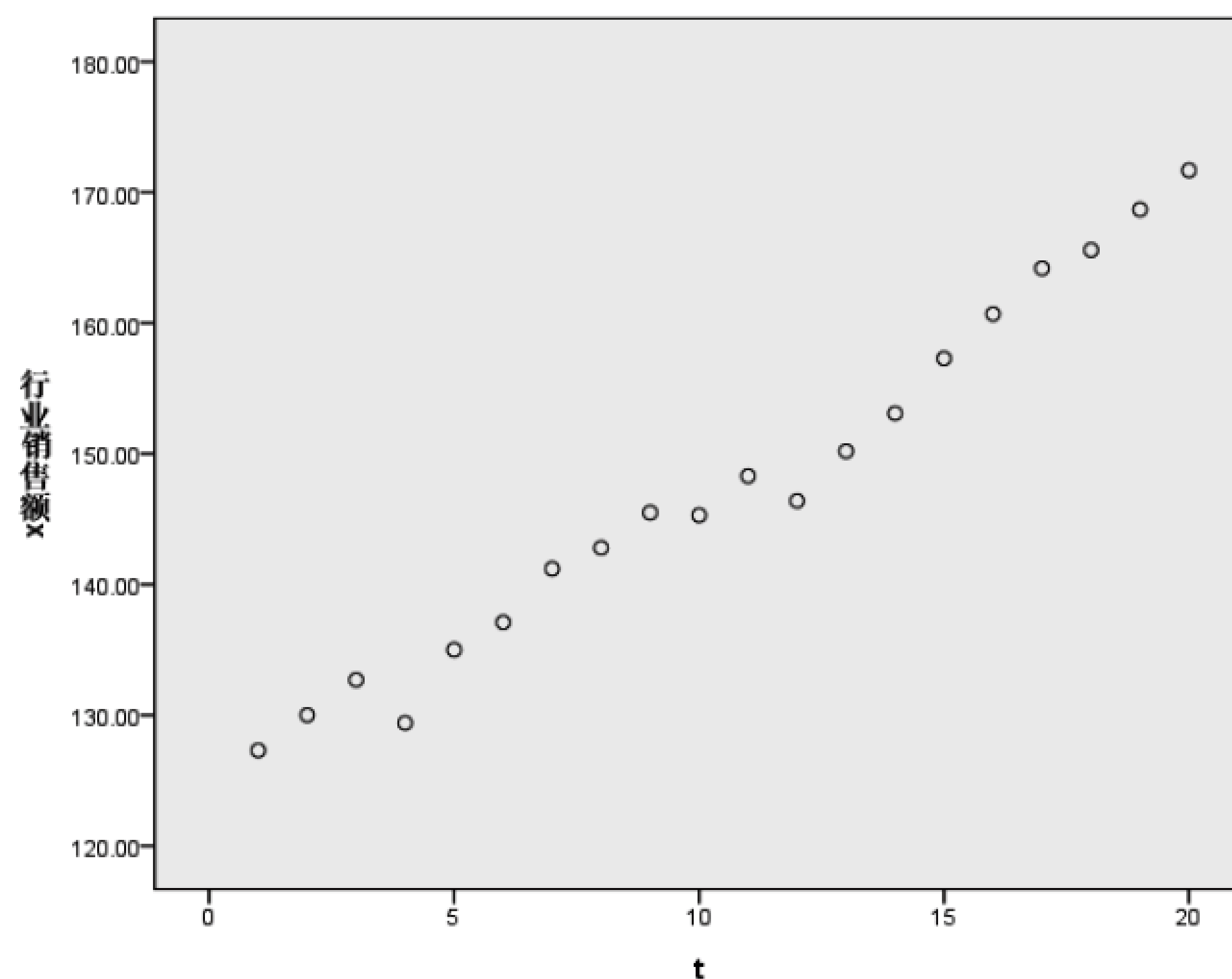


图 6-2　行业销售额变化曲线图

从图 6-1 和图 6-2 可知，公司的销售额上升与下降的趋势与行业的销售额同步变化，随公司销售额的增长而增长，随公司销售额的降低而降低，说明公司销售额与行业销售额之间有着一定的线性关系。在同一个时间轴上绘出销售额的走势图如图 6-3 所示。

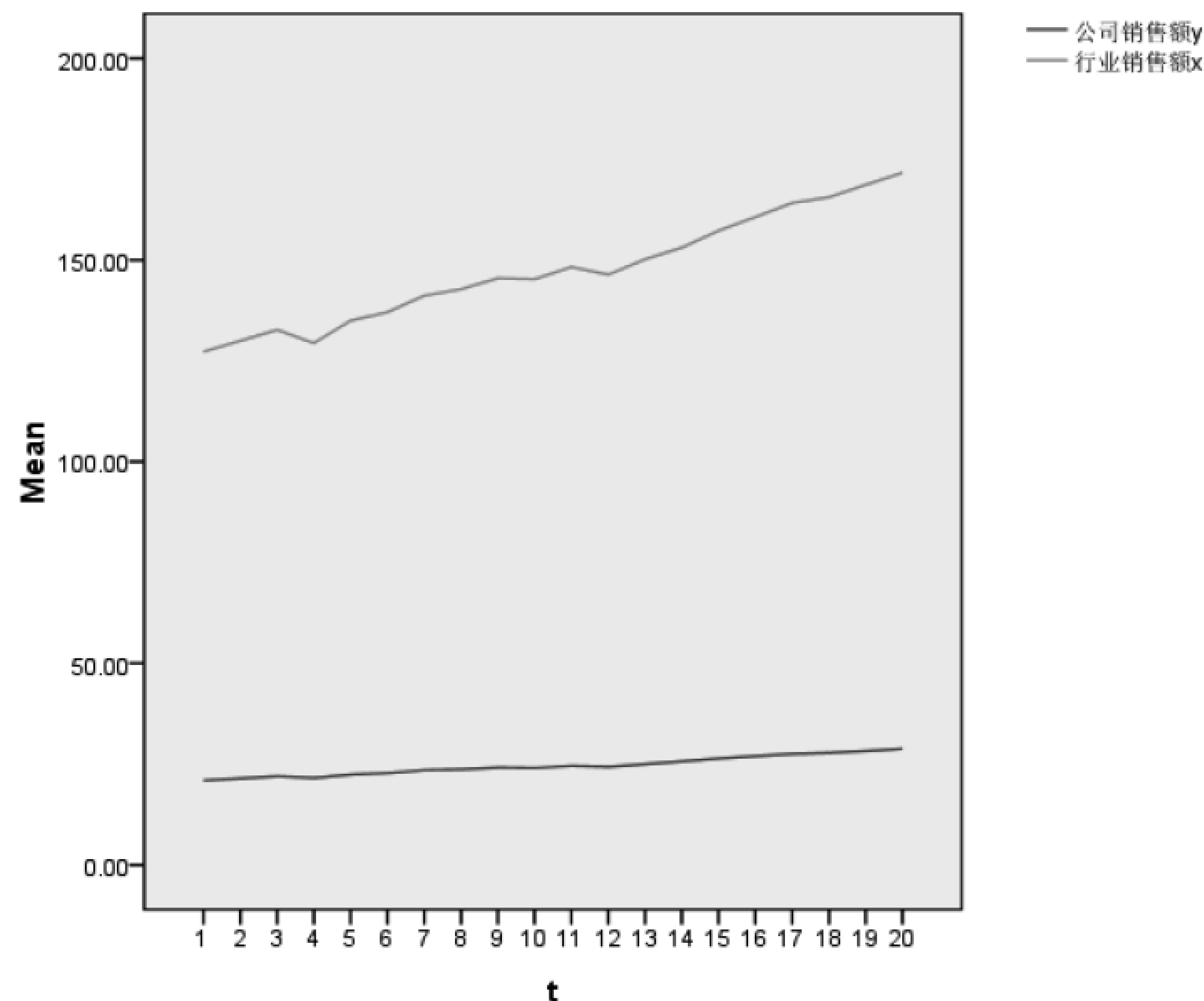


图 6-3　公司与行业销售额同步变化图

反映出公司销售额可在假设的前提下，认为可代表行业的销售额的变化情况。故公司销售额与行业销售额之间呈现明显的线性关系，两条线性之间的差值反应行业中的其他公司的销售额。在此绘出公司销售额与行业销售额的散点图如图 6-4 所示，可确定拟合的线性回归模型。

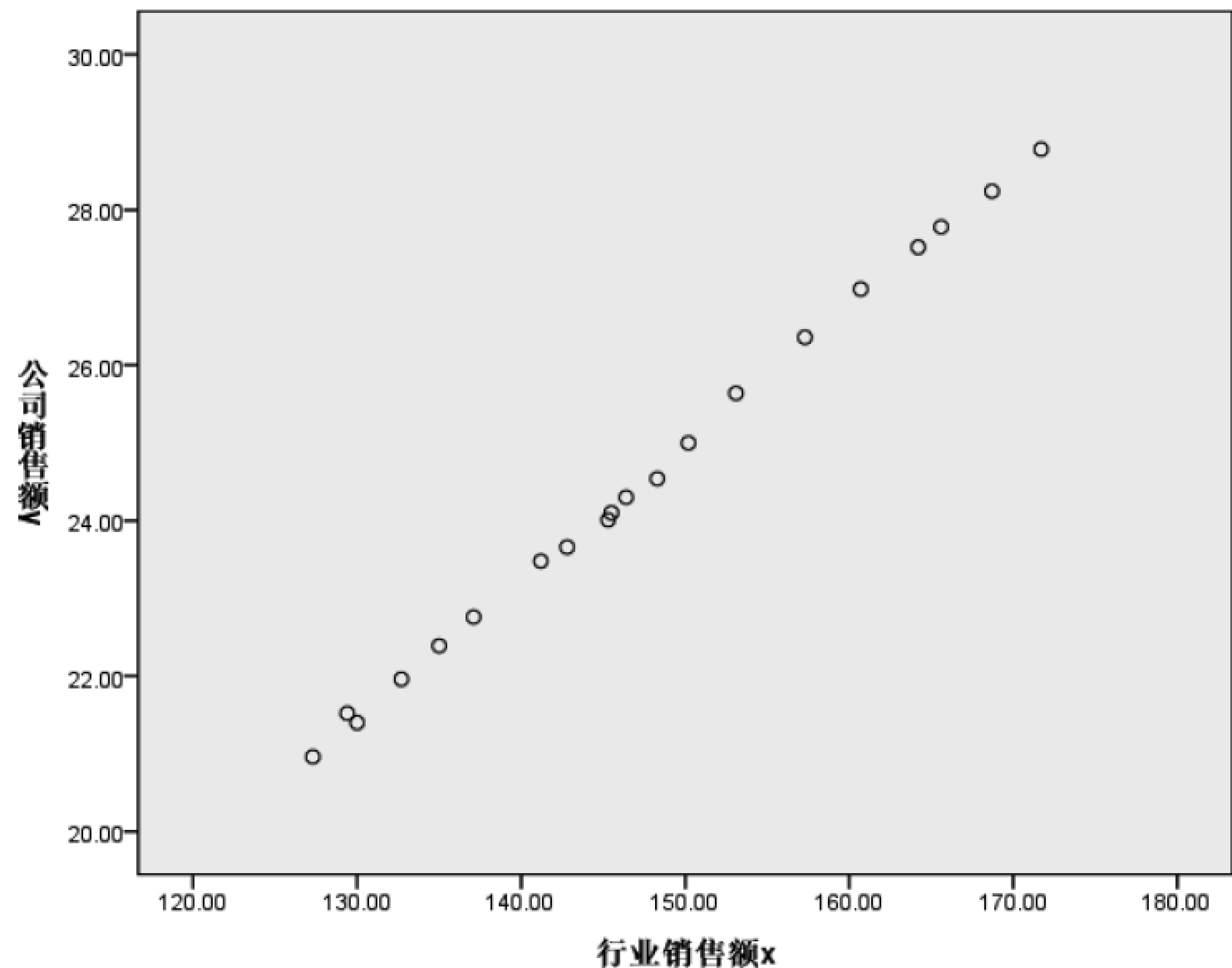


图 6-4　行业销售额与公司销售额之间的关系图

6.4.2　模型的建立与求解

运用 SPSS 软件分析上述的散点图 6-4 可得图 6-5。

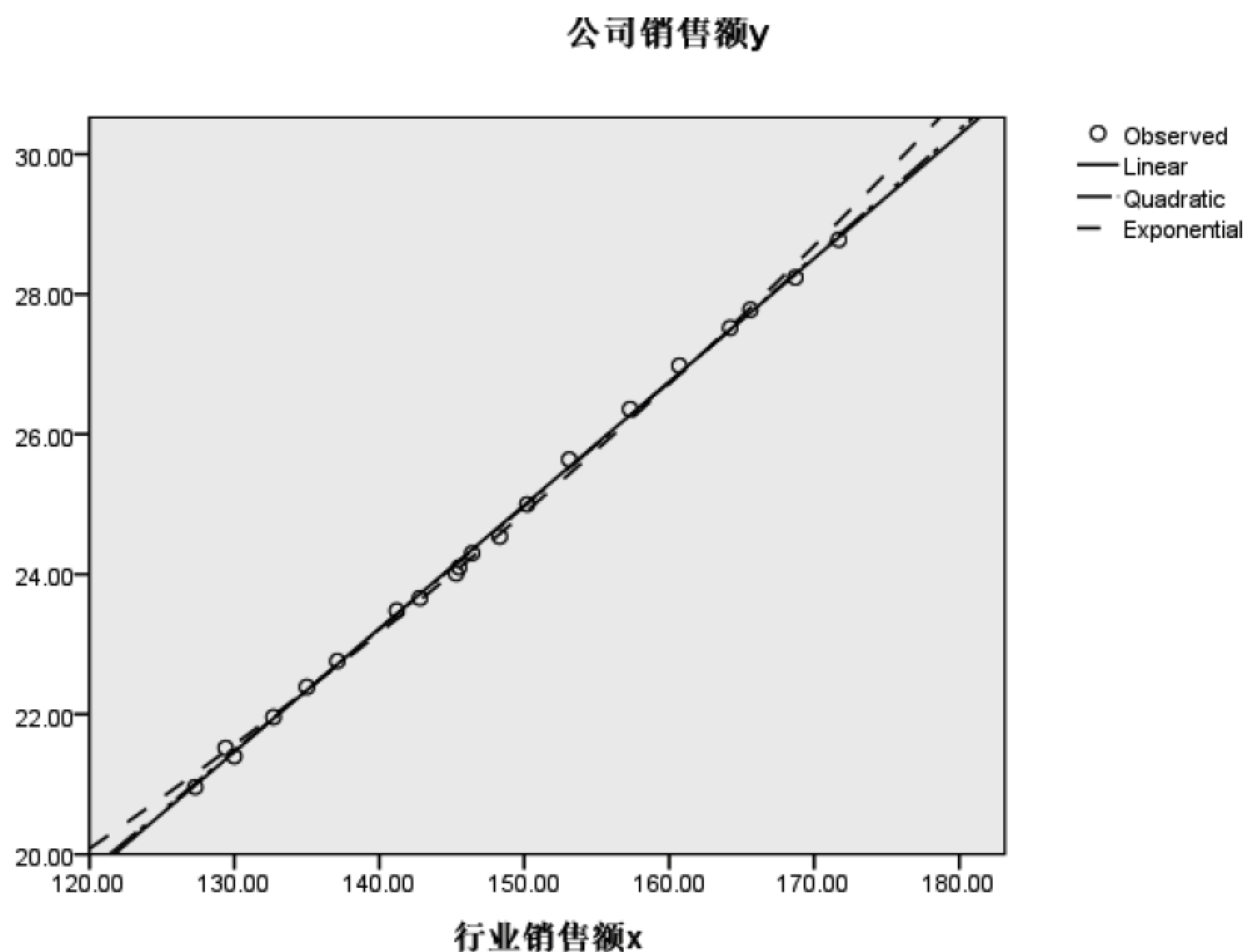


图 6-5　散点拟合图

从图 6-5 中可得到各个拟合曲线的方程及拟合度。

直线方程：

$$y_t = 0.176x_t - 1.455$$

结果显示，回归方程显著，相关系数 $R^2 = 0.999$，统计量 $F(1,18) = 14888.144$，$p = 0.00 < 0.01$，说明模型与数据拟合程度非常好。

二次方程：

$$y_t = 9.451 \times 10^{-5} x_t^2 + 0.148x_t + 0.628$$

结果显示，回归方程显著，$R^2 = 0.999$，$F(2,17) = 7305.202$，$p = 0.00 < 0.01$，说明模型与数据拟合程度很好。

指数方程：

$$y = 8.527\mathrm{e}^{0.007x_t}$$

结果显示，回归方程显著，$R^2 = 0.997$，F（1,18）$= 6962.857$，$p = 0.00 < 0.01$，说明模型与数据拟合程度较好。

对比上述回归方程参数，综合分析：直线的拟合度最高，更适合此散点图的拟合。

可得公司销售额与行业销售额的线性回归模型，如图 6-6 所示。

公司销售额与行业销售额之间满足以下直线方程：

$$y_t = 0.176x_t - 1.455$$

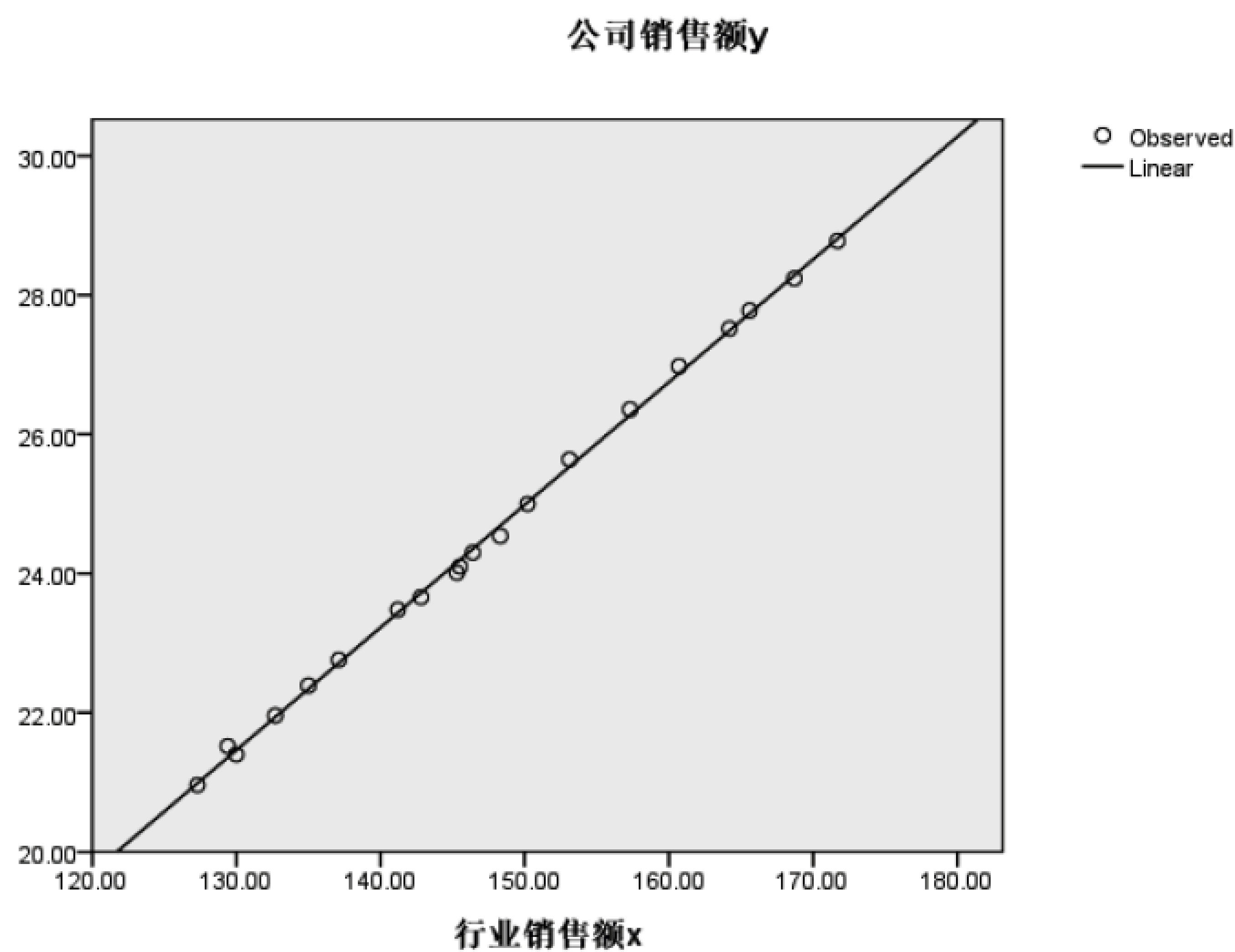


图 6-6　直线拟合图

6.5　问　题　二

6.5.1　模型的分析

公司销售额对全行业销售额的回归模型如上题中的直线拟合。根据 DW 检测可得残差的自相关性，DW 在 2 附近，残差 e_t 的自相关性很弱（或不存在自相关性）；DW 接近 0 或 4，残差 e_t 的相关性很强。在此题中，可绘出残差 e_t 的散点图来估计 e_t 的自相关性。

6.5.2　模型的建立与求解

由问题一的拟合直线可得如表 6-2 所示的拟合参数表。

表 6-2　拟合参数表

参数	参数估计值	置信区间
b_0	-1.455	$[-1.905,-1.005]$
b_1	0.176	$[0.173,0.179]$
$R^2 = 0.999$	$F = 14888.144$	$p = 0.000 < 0.001$

将参数估计值代入直线拟合方程中得到：

$$y_t = 0.176x_t - 1.455$$

用 MATLAB 的 rstool 命令即得不同水平 20 组数据的预测值及其置信区间，程序如下：

```
clc,clear,close all
y=[20.96;21.40;21.96;21.52;22.39;22.76;23.48;23.66;24.10;24.01;24.54;24
.30;25.00;25.64;26.36;26.98;27.52;27.78;28.24;28.78];
x=[127.3;130.0;132.7;129.4;135.0;137.1;141.2;142.8;145.5;145.3;148.3;14
```

```
6.4;150.2;153.1;157.3;160.7;164.2;165.6;168.7;171.7];
rstool(x,y)   %自相关诊断
```

运行程序输出结果如图 6-7 所示。

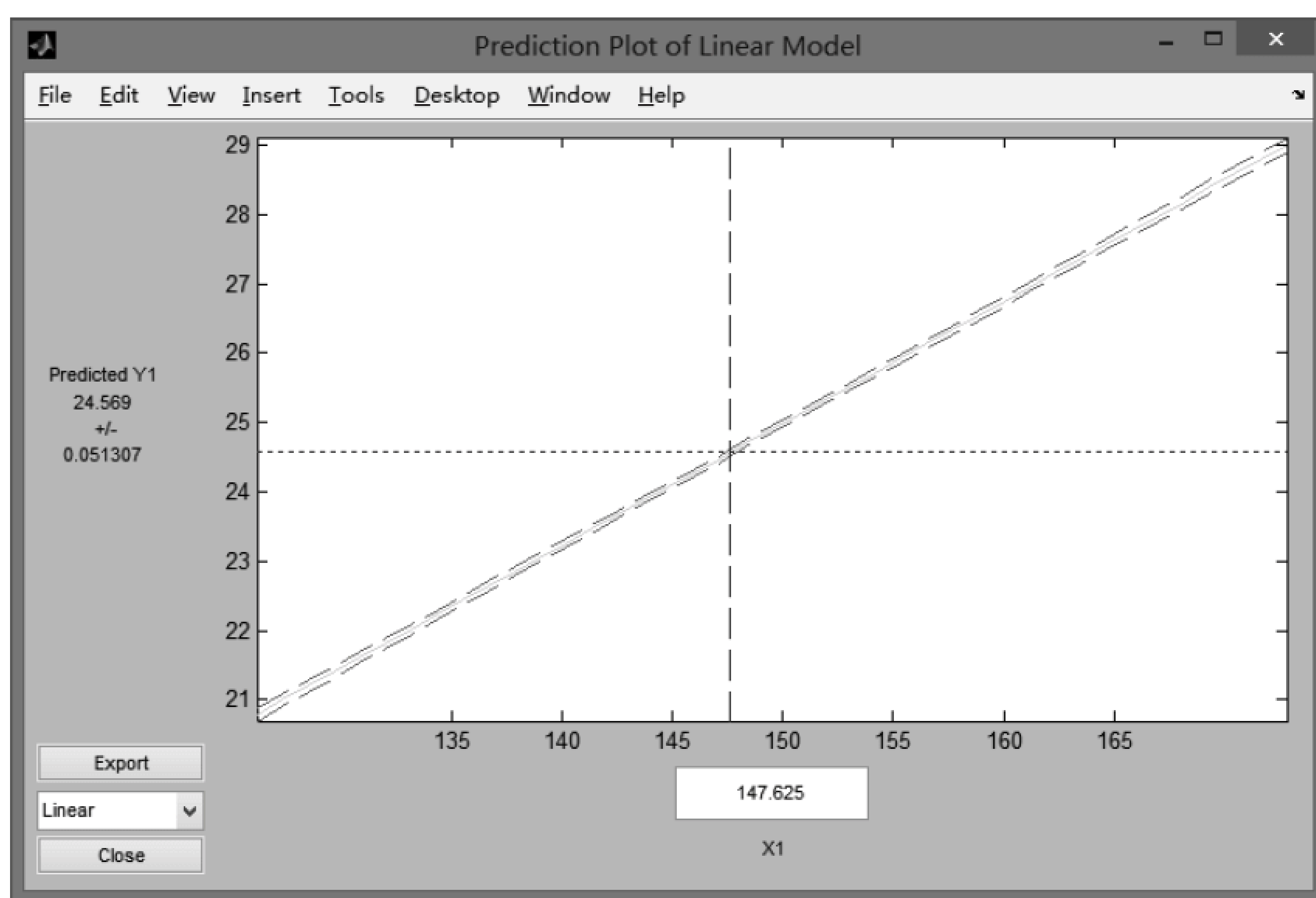


图 6-7　置信区间估计

在图 6-7 的分析结果中，直线拟合在整体上适合。

尽管拟合度很好，但这个模型并没有考虑到 $t=1\cdots20$ 个季度是一个时间序列，在此应该对模型进行一个自相关性检验，即 DW 检验。DW 检验用来说明此问题是否是一个经济滞后性的数学模型。

由 $y_t=0.176x_t-1.455$，再根据残差 $e_t=y_t-\hat{y}_t$ 可得 20 个季度的 20 组数据的残差值。计算数据的残差程序如下：

```
a=ones(20,1);
b=0.176*x-1.455*a;  %预测
c=y-b   %残差
```

运行程序输出结果如表 6-3 所示。

表 6-3　残差值

t	1	2	3	4	5
e^t	0.0102	-0.025	0.0598	0.2006	0.085
t	6	7	8	9	10
e^t	0.0854	0.0838	-0.0178	-0.053	-0.1078
t	11	12	13	14	15
e^t	-0.1058	-0.0114	0.0198	0.1494	0.1302
t	16	17	18	19	20
e^t	0.1518	0.0758	0.0894	0.0038	0.0158

根据表 6-3 的数据，可得 $e_t \sim e_{t-1}$ 的散点图，编写程序如下：

```
c1=c(2:20,1);  %e(t)
c2=c(1:19,1);  %e(t-1)
plot(c1,c2,'*')   %误差散点图
xlabel('e(i-1)'),  %坐标标记
ylabel('e(i)')     %坐标标记
hold on
d=0;
d1=-0.15:0.0001:0.25;
plot(d,d1)   %画图，标记 x 轴
hold on
plot(d1,d)   %画图，标记 y 轴
```

运行程序输出结果如图 6-8 所示。

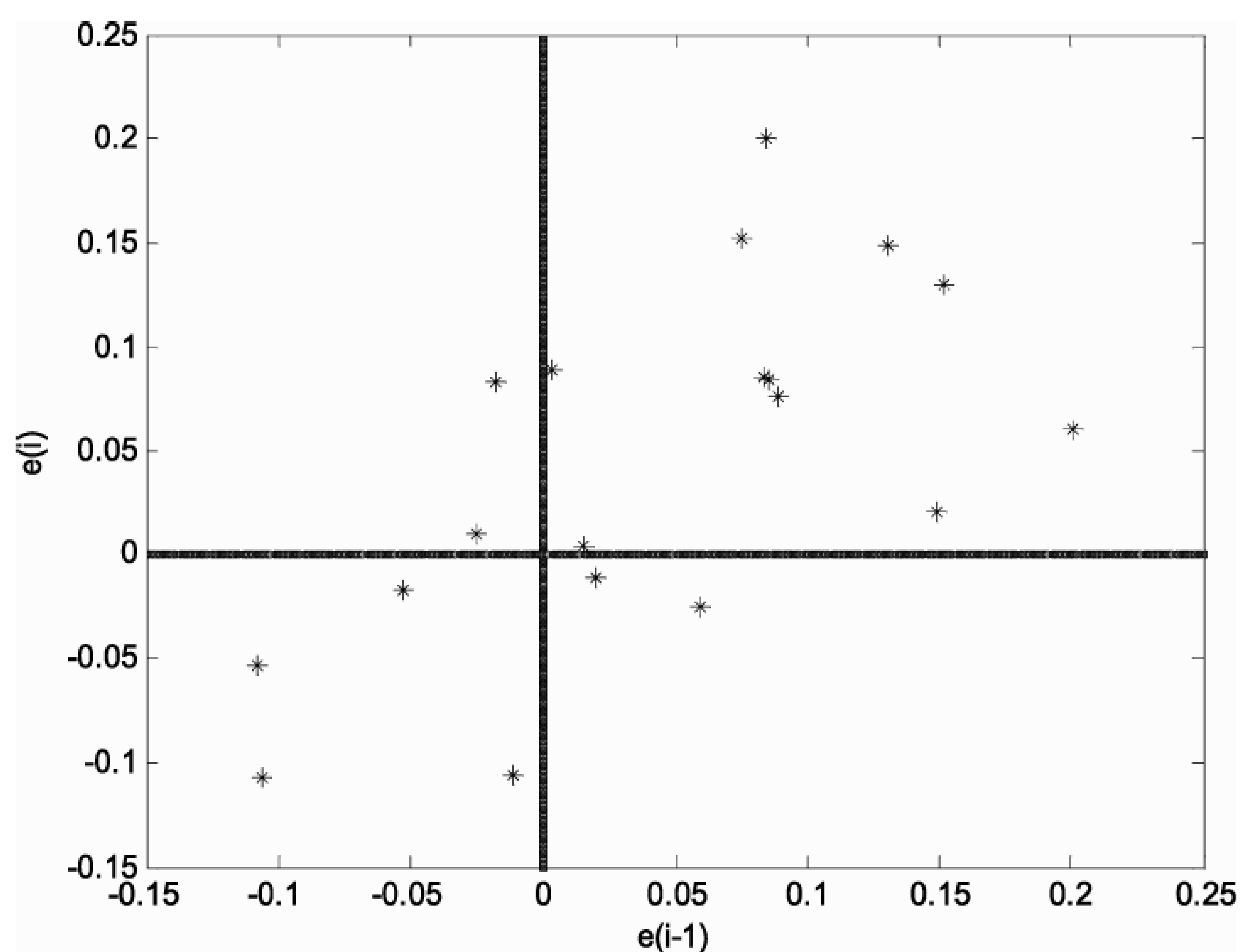


图 6-8　误差相关图

从图 6-8 中可清晰地看出，残差 e_t 主要分布在 1 和 3 象限，为了对 e_t 存在自相关性进行定性的判断，根据 DW 检验，如下：

$$DW=\frac{\sum_{t=2}^{20}(e_t-e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{20}e_t^{\ 2}}$$

化简为：

$$DW=2\left[1-\frac{\sum_{t=2}^{20}e_te_{t-1}}{\sum_{t=2}^{20}e_t^{\ 2}}\right]\approx 2\left(1-\hat{\rho}\right)$$

其中 $\hat{\rho}=\frac{\sum_{t=2}^{20}e_te_{t-1}}{\sum_{t=2}^{20}e_t^{\ 2}}$ 为自相关系数。

运用 MATLAB 软件算出相应的 DW 值与 ρ 值，MATLAB 程序如下：

```
%DW 的程序：
num=c(1:19)'*c(2:20)      %误差乘积
den=sum(c(2:20).^2)       %求和
rou = num/den             %ρ 值
DW=2*(1-rou)              %DW 值
```

由此可得：

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_{t=2}^{20}e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{20}e_t^2}=\frac{0.120120}{0.16887}=0.7113$$

$$DW=2\left[1-\frac{0.120120}{0.16887}\right]=0.5773$$

查 DW 表，可得：

$$n=20 \qquad p=1 \qquad a=0.05 \qquad d_L=1.00 \qquad d_U=1.63$$

可知：

$$DW=0.5773<d_L$$

故残差 e_t 存在明显的自相关性。

故应建立消除了随机误差项自相关性后的回归模型才更加符合题意。

6.6　问　题　三

6.6.1　模型的分析

在问题二中，残差 e_t 存在明显的自相关性，故模型对于一个时间序列型的经济问题，存在一个滞后性，故在此对模型进行 $y_t'=y_t-\rho y_{t-1}$，$x_t'=x_t-\rho x_{t-1}$，$b_0'=b_0-\rho b_0$ 变换，使得模型更加优化，以消除随机误差项的自相关性。

6.6.2　模型的建立与求解

根据问题二中求解的 ρ 和 $y_t'=y_t-\rho y_{t-1}$，$x_t'=x_t-\rho x_{t-1}$，$b_0'=b_0-\rho b_0$，运用 MATLAB 软件在此进行再一次曲线的拟合处理，即：

$$y_t'=b_0+b_1'x_t'+u_t$$

在此模型中 u_t 相互独立服从均值为 0 的正态分布，故上式为此企业销售额问题的最佳模型。

分析可求得模型参数结果如表 6-4 所示。

表 6-4　模拟拟合参数表

参数	参数估计值	置信区间
b_0	-0.263	$[-0.595, 0.069]$
b_1	0.173	$[0.165, 0.180]$
$R^2 = 0.993$	$F = 2421.506$	$p = 0.000 < 0.001$

DW 检验程序如下：

```
%DW 模型优化后的程序：
clc,clear,close all
y=[20.96;21.40;21.96;21.52;22.39;22.76;23.48;23.66;24.10;24.01;24.54;24
.30;25.00;25.64;26.36;26.98;27.52;27.78;28.24;28.78];
y1=y(2:20,1);
y2=y(1:19,1);
y3=y1-0.71133*y2;        %预测方程
x=[127.3;130.0;132.7;129.4;135.0;137.1;141.2;142.8;145.5;145.3;148.3;14
6.4;150.2;153.1;157.3; 160.7;164.2;165.6;168.7;171.7];
x1=x(2:20,1);
x2=x(1:19,1);
x3=x1-0.71133*x2;
a=ones(19,1);              %19 行 1 列为 1 的矩阵
y4=y3-0.173*x3+0.263*a     %残差
y5=y4(2:19,1);
y6=y4(1:18,1);
y7=y5-y6;                  %差值
%DW
y8=sum(y7.^2)              %求和
y9=sum(y5.^2)              %求和
DW= y8/y9                  %DW 值
p=1-DW/2                   %p 值
```

运行程序可得：$DW = 1.8207$，$\rho = 0.0897$

查 DW 表：

$$n = 19 \qquad p = 1 \qquad a = 0.05 \qquad d_L = 1.18 \qquad d_U = 1.40$$

由上述数据可知：

$$d_u < DW = 1.8207 < 4 - d_u$$

此时残差 e_t 不存在自相关性，则拟合曲线的方程为：

$$\hat{y}_t = -0.263 + 0.7113 y_{t-1} + 0.173 x_t - 0.0638 x_{t-1}$$

该优化模型更符合此问题的求解。

第 7 章　日报销售问题

日报销售问题根据地方日报计划销售为背景，综合考虑日报价格和日报销售量两个因子，从而得出该日报社日报销售利润最大问题。本章一方面进行了日报销售最优模型的求解，另一方面注重日报销售问题背后的影子价格，并对问题进行灵敏度分析，对于实际应用具有很大参考价值。

学习目标：

（1）掌握求解销售利润最大问题；

（2）学习掌握参数灵敏性分析。

7.1　问 题 提 出

一家有 80000 订户的地方日报计划提高其订阅价格。现在的价格为每周 1.5 美元。据估计如果每周提高订价 10 美分，就会损失 5000 订户。

（1）求使利润最大的订阅价格？

（2）对（1）中所得结论讨论损失 5000 订户这一参数的灵敏性。分别假设这个参数值为：3000、4000、5000、6000 及 7000，计算最优订阅价格。

（3）设 n=5000 为提高定价 10 美分而损失的订户数。求最优订阅价格 p 作为 n 的函数关系，并用这个公式来求灵敏性 $S(p,n)$。

（4）这家报纸是否应该改变其订阅价格？用通俗易懂的语言说明你的结论。

7.2　摘　　要

地方日报针对销售日报的价格来调整自己报社的日报价格以此来得到利润的最大值，这属于一个实际问题，在此可用数学模型来分析解决。

对于问题（1），在此用 Q 表示提高日报单价后，增加的净利润，Q 越大，说明利润的增量越大，而 Q 受因变量订阅价格 P 的约束，可知 Q 是关于 P 的一个二元一次方程组，由实际问题得到，方程有极值，最终算出 $p=1.55$，$Q_{max}=125$。说明在 $n=5000$，订阅价格 P 为 1.55 美元时，$Q=125$，利润达到最大。

在（2）中可用（1）中数学模型，分别计算最优订阅价格 Q，p 为函数极值，Q 有唯一解。每周日报定价提高 10 美分，分析损失的订户数 5000 的灵敏性，即当单价提高 10 美分时，会损失订户数 5000，这个数据在实际中并不是确定值，对于报社来说，$n=5000$ 应

该具有一般性，是很有可能出现的情况，故可考虑提高价格后，维持利润的 0 风险率。

在（3）中，建立 $S(p,n)=\dfrac{\Delta p/p}{\Delta n/n}=\dfrac{\Delta p}{\Delta n}\dfrac{n}{p}=\dfrac{-cr}{cr+100nw}$，得到影响模型的灵敏性函数 $S(p,n)\approx -0.516$。说明 p 的改变对 n 的影响很小，模型的参数具有合理性。

在（4）中，作者认为报商应该改变订阅价格。在（1）、（2）和（3）中已经得到，$n=3000、4000、5000、6000和7000$ 对模型的影响不大，均得到最优解 $Q\geqslant 0$ 和 $S(p,n)\approx -0.516$，说明利润有上升的可能，可合理的改变价格，或上升或下调。

关键词：订阅价格、净利润、订户数、二元方程、灵敏性。

7.3 基本假设

（1）假设经济平稳发展，无重大事故发生等；

（2）假设订户短期内不因意外事件发生而减少购买日报的数量；

（3）假设题源数据真实可靠。

7.4 符号说明

符号	意　　义	单位	备注
c	提高单价前的订户数 $(c=80000)$	户	全局
w	提高日报单价前的单价（$w=1.5$美元）	美元	全局
p	提高单价后，日报订阅价格为每周 p 美元	美元	全局
r	每周日报提高的单价 $(r=10$美分$)$	美分	全局
n	每周日报定价提高 10 美分，损失的订户数	户	全局
m	提高日报单价后的订户数	户	全局
Q	提高日报单价后，增加的净利润	美元	全局

7.5 问题一

7.5.1 模型的分析

由问题一可知，要使利润最大，即使 Q 的增量最大，而 Q 是由 p 和 m 来决定，通过 $Q=m\times p-c\times w$ 来求得该表达式的最大值，再分析结果的合理性，即可作如下的优化分析。

7.5.2 模型的建立与求解

由题目中的参数分析可知，提高日报单价后，销售收入为 $m\times p$，$m=c-n\times\dfrac{p-w}{r/100}$。未提高单价时，销售收入为 $c\times w$。由此可得出一个数学模型：

$$Q = m \times p - c \times w$$

整理得：

$$Q = (c - n \times \frac{p - w}{r/100}) \times p - c \times w = -\frac{100n}{r} p^2 + (c + \frac{100 \times n \times w}{r}) \times p - c \times w$$

求 p 以使 Q 有最大值，代入 $w = 1.5, r = 10, n = 5000, c = 80000$，编程 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
p=1.5:0.001:1.70;                    %p 取值
Q=-50000*p.^2+155000*p-120000;       %方程
max(Q)                               %最大值
plot(p,Q)                            %画图
hold on
Q=0;
plot(p,Q)                            %画 0 轴线
xlabel('p')                          %坐标标记
ylabel('Q')
```

运行程序得到函数图像如图 7-1 所示。

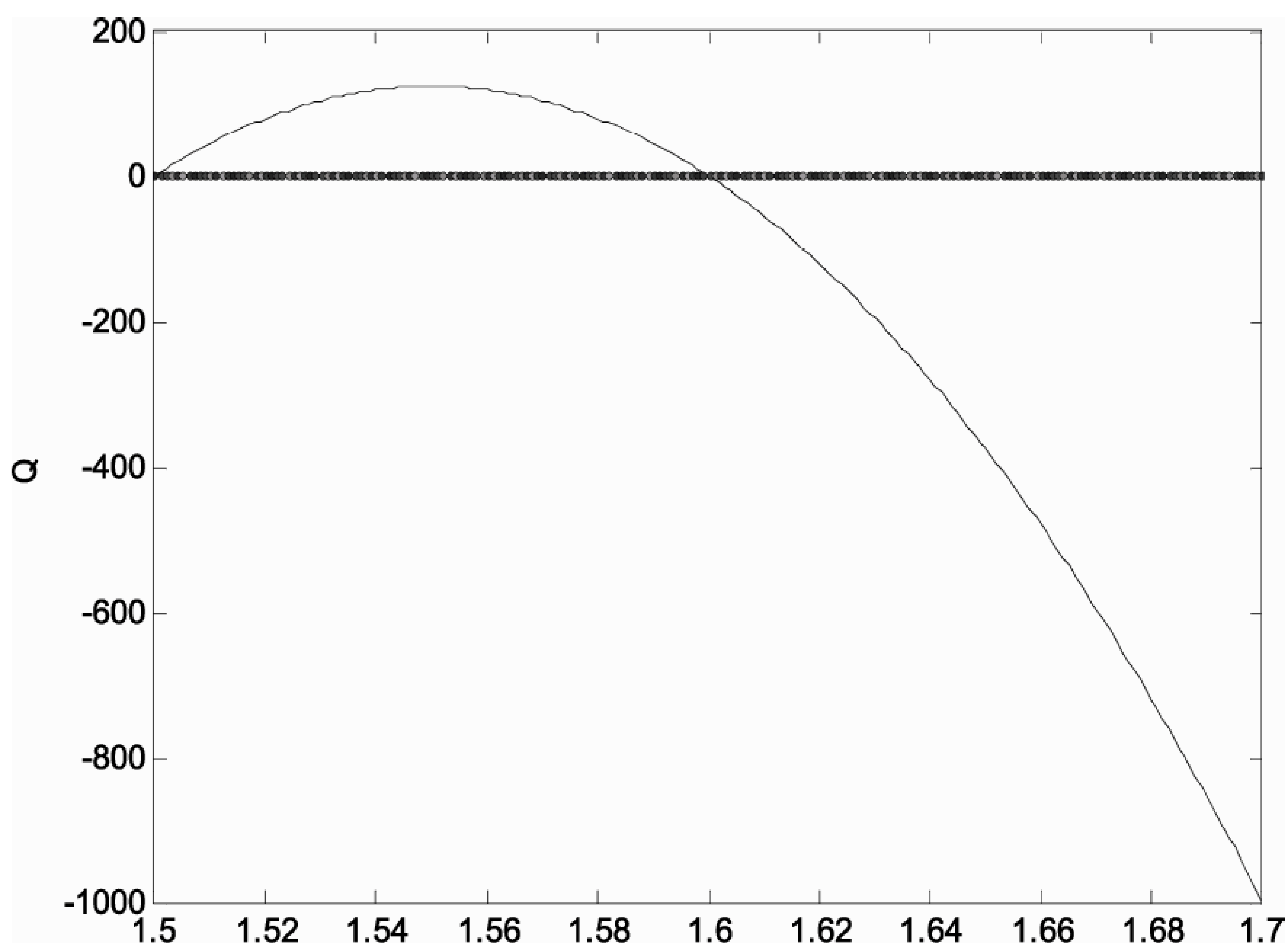


图 7-1　Q 变化函数图

如图 7-1 所示，函数存在最大值。

$Q = -\frac{100n}{r} p^2 + (c + \frac{100 \times n \times w}{r}) \times p - c \times w$是一个二次函数求最大值的情况，由$\frac{\partial Q}{\partial p} = 0$,

得到：$p = \frac{(c + \frac{100 \times n \times w}{r}) \times r}{200n} = \frac{(c \times r + 100 \times n \times w)}{200n} = \frac{c \times r}{200n} + \frac{w}{2}$

则算出 $p = 1.55$，$Q_{max} = 125$，$m = 77500$。

7.5.3　结果的分析及验证

在理论上，此结果是存在的，Q 慢慢地随 p 的增大先逐渐增大然后缩小，而 m 随 p 的增大而逐渐趋小，满足题目意思。但从实际来看，此模型存在一定的不足，原因关键是由于 n 的不确定性，而实际中，n 很难满足题目中的要求，明显具有随机性。从图 7-1 上可看出，Q 在一定的范围内随 p 值上升而上升，只要日报总编把日报的价格控制在一定的范围内即可，短期内满足自身的前提下还是符合实际、可接受的。

7.6　问　题　二

7.6.1　模型的分析

问题二中，每周日报定价提高10美分，分析损失的订户数5000的灵敏性，即当单价提高10美分时，会损失订户数5000，这个数据在实际中并不是确定值，我们可以分析其损失订户数的波动范围，大概的确定5000是其中一个相当程度上会出现的数字，再用灵敏性函数 $S(p,n)$ 分析对模型的影响程度。至于当 n 确定时，在实际中分析求出最优化 p，满足 $Q >= 0$ 的前提下分析数据，而且 p 应该具有合理性，短期内其波动范围应在人们可接受的范围内。

7.6.2　模型的建立与求解

（1）地方日报在调整价格前，是在保证 $Q >= 0$ 的前提下进行的。当日报价格上调价格 r 后，应尽可能地保证亏损率与盈利率基本持衡，约束如下：

$$\frac{\left|(c-n)\cdot(w+r/100)-(c\cdot w)\right|}{c\cdot w}\leqslant 10\%$$

得到：

$$-2500\leqslant n\leqslant 12500$$

在不确定收益的情况下，销售商选择 $n=5000$，风险率为 0%，基本满足实际情况。

由第一问中 $p=\dfrac{c\times r}{200n}+\dfrac{w}{2}$，在此用相对改变量衡量结果的敏感程度，记为 $S(p,n)$，建立数学模型得：

$$S(p,n)=\frac{\Delta p/p}{\Delta n/n}=\frac{\Delta p}{\Delta n}\times\frac{n}{p}$$

当 $n=5000$，$S(p,n)\approx\dfrac{-cr}{cr+100nw}=-0.516$。

即订户数 n 下降 1%，相应的订阅价格 p 会上升 0.516%。

（2）当 $n=3000$、$n=4000$、$n=5000$、$n=6000$ 和 $n=7000$ 时，计算 Q 的最优价格，建立模型得：

$$Q=-\frac{100n}{r}p^2+(c+\frac{100\times n\times w}{r})\times p-c\times w=(\frac{100wp}{r}-\frac{100p^2}{r})n+cp-cw\geqslant 0$$

$$n=3000、4000、5000、6000、7000$$

$$m=(c-n\times\frac{p-w}{r/100})\geqslant 0$$

绘制不同 n 取值下的函数图形，程序如下：

```
clc,clear,close all
p=1.5:0.001:2.5;
n=3000;                                  %n 不同取值
Q=-10*n.*p.^2+(80000+15*n)*p-120000;     %方程
subplot(331)
plot(p,Q);
xlabel('n=3000')                         %x 轴标记
n=4000;                                  %n 不同取值
Q=-10*n.*p.^2+(80000+15*n)*p-120000;     %方程
subplot(332)
plot(p,Q)
xlabel('n=4000')                         %x 轴标记
n=5000;                                  %n 不同取值
Q=-10*n.*p.^2+(80000+15*n)*p-120000;     %方程
subplot(333)
plot(p,Q)
xlabel('n=5000')                         %x 轴标记
n=6000;                                  %n 不同取值
Q=-10*n.*p.^2+(80000+15*n)*p-120000;     %方程
subplot(223)
plot(p,Q)
xlabel('n=6000')                         %x 轴标记
n=7000;                                  %n 不同取值
Q=-10*n.*p.^2+(80000+15*n)*p-120000;     %方程
subplot(224)
plot(p,Q)
xlabel('n=7000')                         %x 轴标记
n=3000:1000:7000;
p=(80000+15*n)./(20*n)                   %p 计算，输出显示
```

运行程序输出图形如图 7-2 所示。

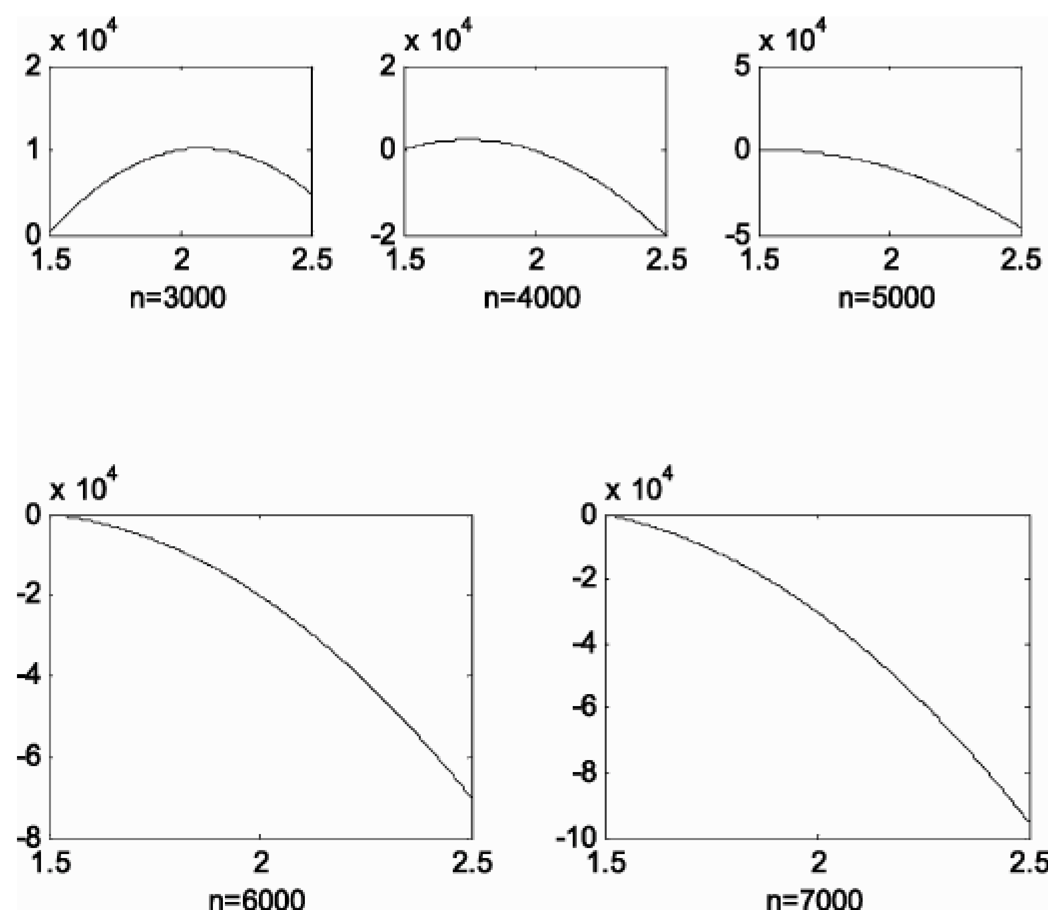


图 7-2　不同 n 取值下的函数图形

由图 7-2 可得 $n=3000$、$n=4000$、$n=5000$、$n=6000$ 和 $n=7000$，计算 Q 的最优价格：

$$\begin{cases} n=3000 & p=2.08 & Q=10208 & m=62600 \\ n=4000 & p=1.75 & Q=2500 & m=70000 \\ n=5000 & p=1.55 & Q=125 & m=77500 \\ n=6000 & p=1.42 & Q=416 & m=84800 \\ n=7000 & p=1.32 & Q=2232 & m=92600 \end{cases}$$

7.6.3　结果的分析及验证

在实际中，媒体的大量普及，当 p 上升时，消费者购买量降低，自然 m 会下降，即会出现如图 7-2 的走势。当 r 降低时，订户数会上升，同样刺激消费者的行为，Q 有增量，符合实际，其中价格波动范围在 $3.3\% \leqslant \frac{|p-w|}{w} \leqslant 38.7\%$ 内变化，基本符合。

7.7　问　题　三

7.7.1　模型的分析

问题三中，题目设定 $n=5000$ 为提高定价 10 美分而损失的订户数，由问题二中，已经求得 p 作为 n 的函数关系 $p=\frac{c\times r}{200n}+\frac{w}{2}$，以此来求灵敏性 $S(p,n)$，灵敏性 $S(p,n)$ 即是 $S(p,n)=\frac{\frac{\Delta p}{p}}{\frac{\Delta n}{n}}=\frac{\Delta p}{\Delta n}\frac{n}{p}$，以此来分析 n 对模型的影响大小。

7.7.2　模型的建立与求解

由问题二中的计算可得：

$$p=\frac{c\times r}{200n}+\frac{w}{2}$$

其中，$w=1.5, r=10, n=5000, c=80000$。

建立数学模型得到：

$$S(p,n)=\frac{\frac{\Delta p}{p}}{\frac{\Delta n}{n}}=\frac{\Delta p}{\Delta n}\frac{n}{p}=\frac{-cr}{cr+100nw}$$

由求导法则可得到：

当 $n=5000$， $S(p,n)\approx\dfrac{-cr}{cr+100nw}=-0.516$。

7.7.3　结果的分析及验证

即订户数 n 下降 1%，相应的订阅价格 p 会上升 0.516%。当价格上涨 10 美分的前提下，订户数的减少量对模型的影响大小不是很大，在与 80000 订户来比较是很小的，在 $n=5000$ 时，报社可以改变订阅价格来提升自己的利润空间。

7.8　问　题　四

这家报纸是否应该改变其订阅价格？我认为是应该的。

由以上的 1、2、3 问题中，已经给出具体的 Q，在满足 $Q\geqslant 0$ 的前提下，是可以改变价格的，而 $Q\geqslant 0$ 说明改变价格后地方日报销售上升的利润；在第 2 问中，有：

$$\begin{cases} n=3000 & p=2.08 & Q=10208 & m=62600 \\ n=4000 & p=1.75 & Q=2500 & m=70000 \\ n=5000 & p=1.55 & Q=125 & m=77500 \\ n=6000 & p=1.42 & Q=416 & m=84800 \\ n=7000 & p=1.32 & Q=2232 & m=92600 \end{cases}$$

$n=3000、4000、5000、6000和7000$， $Q\geqslant 0$， 说明 n 对模型的影响不大。在 $n=3000、4000和5000$ 时， p 值大于原价值，在达到最优价格的前提下，价格是可以有所提升的，而且利润上升的空间也很大，纵使 m 的值在下降。特别是在第 3 问中，当 $n=5000$，灵敏性函数 $S(p,n)\approx\dfrac{-cr}{cr+100nw}=-0.516$，其值说明当价格改变时，订户数的减少量 n 对模型的影响很小， p、Q、m、n 可接受；在 $n=6000、7000$， p 减小，刺激消费者购买地方日报，m 增加，同样可以满足 Q 值大于 0。而在改变价格分析销售的盈利风险率时，有 $-2500\leqslant \mathrm{n}\leqslant 12500$，故其风险率在 10% 以内，在满足相应的假设条件下，地方报社是可以改变其日报价格的。

第 8 章　钢管加工用料问题

本章以钢管加工用料为背景，钢管下料问题常常涉及到企业的效率问题，怎么以最少的钢管料，获得最多的可用钢管是本文所要求解的。本章采用 LINGO 软件对模型进行求解，综合分析钢管加工用料问题，能够较好的指导实际工作。

学习目标：

（1）掌握将实际问题转化为数学模型；

（2）掌握 LINGO 求解非线性优化问题。

8.1　摘　　要

这是个实际问题，本题将主要运用数学建模的思维来说明工厂加工钢管的最优化方案，从而解答实际问题，增强说服性。

本题直接说明了要加工 15 根 290mm 、28 根 315mm 、21 根 350mm 和 30 根 455mm 的钢管，增加了一些约束条件，因此可以直接根据条件及目标函数求解最优化解。总费用最少，即是目标函数，主要包括材料成本和题中的增加费用；约束条件主要包括，材料的余料在每种切割模式下满足低于 100、切割得到的钢管总长小于 1850 及每模式下得到的切割钢管数不能超过 5 等等，故可以根据这些条件列出一个整数规划数学模型。这是一个非线性规划问题，利用 Lingo 软件求解即可，最终得到 $x_1=11$、$x_2=7$、$x_3=5$和$x_4=0$，总费用为 27.0。

在 x_1 模式下，得到切割成 290mm、315mm、350mm、455mm 的钢管数量为 0、3、1、1；

在 x_2 模式下，切割成 290mm、315mm、350mm、455mm 的钢管数量为 3、0、0、2；

在 x_3 模式下，切割成 290mm、315mm、350mm、455mm 的钢管数量为 1、1、2、1 。

从结果中也可读出，钢管一多出 11 根，钢管二多出 10 根，在满足费用最低的前提下，是可接受的，故结果具有说服性。

关键字：整数规划数学模型、非线性规划、约束条件、目标函数。

8.2　问题的提出

某钢管零售商从钢管厂进货，将钢管按照顾客的要求切割后售出。从钢管厂进货时得到的原料钢管长度是 1850mm 。现有一客户需要 15 根 290mm 、28 根 315mm 、21 根 350mm 和 30 根 455mm 的钢管。为了简化生产过程，规定所使用的切割模式的种类不能超过 4 种，使用频率最高的一种切割模式按照一根原料钢管价值的 1/10 增加费用，使用频率次之的切割模式按照一根原料钢管价值的 2/10 增加费用，依次类推，且每次切割模式下的切割次数

不能太多（一根原料钢管最多生产 5 根产品）。此外，为了减少余料浪费，每种切割模式下的余料浪费不能超过100mm 。为了使总费用最少，应如何下料？

8.3　问题的假设

（1）一根钢管的价值成本为1；
（2）切割时无废品出现；
（3）公司生产此类产品的数量不变；
（4）公司在此段时间内无重大变革等。

8.4　符 号 说 明

S 表示总费用；
x_i 表示第 i 种切割模式切割的钢管的数量 $(i=1,2,3,4)$；
r_{1i} 表示第 i 种切割模式下，切割成 290mm 的钢管的数量 $(i=1,2,3,4)$；
r_{2i} 表示第 i 种切割模式下，切割成 315mm 的钢管的数量 $(i=1,2,3,4)$；
r_{3i} 表示第 i 种切割模式下，切割成 350mm 的钢管的数量 $(i=1,2,3,4)$；
r_{4i} 表示第 i 种切割模式下，切割成 455mm 的钢管的数量 $(i=1,2,3,4)$；
y_i 表示第 i 种切割模式 $(i=1,2,3,4)$；
$y_i=1$ 表示该模式被使用，$y_i=0$ 表示此模式未被使用。

8.5　问题的分析

根据题意，在考虑各种条件的前提下，我们需要求的是生产的最低成本。题目中给出生产成本包括固定成本和额外的附加成本，根据假设，易得：

$$S_{\min}=1.1x_1+1.2x_2+1.3x_3+1.4x_4$$

由于生产模式不明确区分类别，即排列顺序是无关紧要的，故在此设：

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4$$

在四种生产模式下，

290mm 的钢管需要 15 根，则需满足 $\sum_{i=1}^{4} x_i \times r_{1i} \geqslant 15 \qquad (i=1\cdots 4)$；

315mm 的钢管需要 28 根，则需满足 $\sum_{i=1}^{4} x_i \times r_{2i} \geqslant 28 \qquad (i=1\cdots 4)$；

350mm 的钢管需要 21 根，则需满足 $\sum_{i=1}^{4} x_i \times r_{3i} \geqslant 21 \qquad (i=1\cdots 4)$；

455mm 的钢管需要 30 根，则需满足 $\sum_{i=1}^{4} x_i \times r_{4i} \geqslant 30 \qquad (i=1\cdots 4)$；

每种模式下切割次数不能超过 5 次，故 $r_{1i}+r_{2i}+r_{3i}+r_{4i}\leqslant 5$。

每种切割模式下的余料浪费不能超过100mm：

$$1850-(290r_{1i}+315r_{2i}+350r_{3i}+455r_{4i})\leqslant 100$$

$$\Rightarrow 290r_{1i}+315r_{2i}+350r_{3i}+455r_{4i}\geqslant 1750$$

又因为四种模式并不一定都使用，故在此引入 0-1 变量，用 y_i 表示，则有：

$$\Rightarrow 290r_{1i}+315r_{2i}+350r_{3i}+455r_{4i}\geqslant 1750y_i$$

其中：

$$0\leqslant y_i\leqslant 1 \qquad (i=1\cdots 4)$$

又钢管的总长是 1850mm，故应满足：

$$290r_{1i}+315r_{2i}+350r_{3i}+455r_{4i}\leqslant 1850$$

切割的钢管的下限即最小量，应大于以下这个条件：

$$(290\times 15+315\times 28+350\times 21+455\times 30)/1850=18.47027$$

由此得到：

$$x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 18$$

要得到 15、28、21、30 根各种型号的钢管应满足：

$$x_i\leqslant 30 \qquad (i=1\cdots 4)$$

由题意可得到满足以上这些条件的不等式，下面将对这些不等式求出最优解即可。

8.6　模型的建立与求解

综合以上分析的各个条件，建立数学模型得：

$$\begin{cases}
\text{MIN} \quad S_{\min}=1.1x_1+1.2x_2+1.3x_3+1.4x_4 \\
s.t. \\
\sum_{i=1}^{4} x_i\times r_{1i}\geqslant 15 \quad (i=1\cdots 4) \\
\sum_{i=1}^{4} x_i\times r_{2i}\geqslant 28 \quad (i=1\cdots 4) \\
\sum_{i=1}^{4} x_i\times r_{3i}\geqslant 21 \quad (i=1\cdots 4) \\
\sum_{i=1}^{4} x_i\times r_{4i}\geqslant 30 \quad (i=1\cdots 4) \\
1750y_i\leqslant 290r_{1i}+315r_{2i}+350r_{3i}+455r_{4i}\leqslant 1850 \quad (i=1\cdots 4) \\
r_{1i}+r_{2i}+r_{3i}+r_{4i}\leqslant 5 \quad (i=1\cdots 4) \\
x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 18 \\
x_i\leqslant 30 \quad (i=1\cdots 4) \\
0\leqslant y_i\leqslant 1 \quad (i=1\cdots 4) \\
x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4
\end{cases}$$

运用 LINGO 软件编程如下：

```
model:
min=1.1*x1+1.2*x2+1.3*x3+1.4*x4;  !目标
x1*r11+x2*r12+x3*r13+x4*r14>=15;  !目标约束条件，依次如方程
x1*r21+x2*r22+x3*r23+x4*r24>=28;  !目标约束条件，依次如方程
x1*r31+x2*r32+x3*r33+x4*r34>=21;  !目标约束条件，依次如方程
x1*r41+x2*r42+x3*r43+x4*r44>=30;  !目标约束条件，依次如方程
290*r11+315*r21+350*r31+455*r41>=1750;     !目标约束条件，依次如方程
290*r12+315*r22+350*r32+455*r42>=1750;     !目标约束条件，依次如方程
290*r13+315*r23+350*r33+455*r43>=1750;     !目标约束条件，依次如方程
290*r14+315*r24+350*r34+455*r44>=1750;     !目标约束条件，依次如方程
290*r11+315*r21+350*r31+455*r41<=1850;     !目标约束条件，依次如方程
290*r12+315*r22+350*r32+455*r42<=1850;     !目标约束条件，依次如方程
290*r13+315*r23+350*r33+455*r43<=1850;     !目标约束条件，依次如方程
290*r14+315*r24+350*r34+455*r44<=1850;     !目标约束条件，依次如方程
r11+r12+r13+r14<=5;    !目标约束条件，依次如方程
r21+r22+r23+r24<=5;    !目标约束条件，依次如方程
r31+r32+r33+r34<=5;    !目标约束条件，依次如方程
r41+r42+r43+r44<=5;    !目标约束条件，依次如方程
x1+x2+x3+x4>=18;      !目标约束条件，依次如方程
x1+x2+x3+x4<=94;      !目标约束条件，依次如方程
x1>=x2;              !目标约束条件，依次如方程
x2>=x3;              !目标约束条件，依次如方程
x3>=x4;              !目标约束条件，依次如方程
@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);@gin(x4);    !约束变量为整数
@gin(r11);@gin(r12);@gin(r13);@gin(r14);
@gin(r21);@gin(r22);@gin(r23);@gin(r24);
@gin(r31);@gin(r32);@gin(r33);@gin(r34);
@gin(r41);@gin(r42);@gin(r43);@gin(r44);
End
```

运行程序输出结果如下：

```
  Local optimal solution found.
  Objective value:                          26.30000
  Objective bound:                          26.30000
  Infeasibilities:                          0.000000
  Extended solver steps:                        1682
  Total solver iterations:                     57109


                                  Variable          Value
                                        X1       8.000000
                                        X2       7.000000
                                        X3       7.000000
                                        X4       0.000000
                                       R11       3.000000
                                       R12       0.000000
                                       R13       1.000000
                                       R14       1.000000
                                       R21       0.000000
                                       R22       3.000000
                                       R23       1.000000
                                       R24       1.000000
                                       R31       0.000000
                                       R32       1.000000
                                       R33       2.000000
                                       R34       2.000000
```

```
                                    R41         2.000000
                                    R42         1.000000
                                    R43         1.000000
                                    R44         1.000000
```

整理输出结果如表 8-1 所示。

表 8-1　结果数据表

模式	模式下所用钢管的数量	切割成 290mm 的钢管数量	切割成 315mm 的钢管数量	切割成 350mm 的钢管根数	切割成 455mm 的钢管根数
x_1	11	0	3	1	1
x_2	7	3	0	0	2
x_3	5	1	1	2	1
x_4	0	0	0	0	0

8.7　结果的分析

根据模型求解的表 8-1 的信息数据得到，切割成 290mm 的钢管的数量为 26，切割成 315mm 的钢管的数量为 38，切割成 350mm 的钢管的数量为 21，切割成 455mm 的钢管的数量为 30，与实际的 15 根 290mm 、28 根 315mm 、21 根 350mm 和 30 根 455mm 的钢管相比，290mm 的钢管切割多出 11 根，315mm 的钢管切割后多出 10 根，350mm 和 455mm 的钢管恰好相吻合，总的生产模式可以使得 S 有最小值，且满足切割的钢管数小于 5，多出的 290mm 、315mm 钢管才是成品；易验证，当满足 15 根 290mm 、28 根 315mm 时，将达不到 350mm 和 455mm 的钢管数量，综合考虑，该模型的优化解符合题意。

第 9 章　航空运输能力问题

航空运输是一个较实际的问题，合理的规划航空公司对运输业的管理，能够提升航空公司的效率，提高企业的利润。本章以航空运输能力出发，考虑飞机货场容积问题和每天的运输量问题，最优化的分析航空公司的最大利润问题和飞机的改装问题。

学习目标：

（1）掌握 LINGO 求解最优化问题；

（2）学习掌握每个约束的影子价格的含义。

9.1　问 题 提 出

一个运输公司每天有 100 吨的航空运输能力，公司每吨收空运费 250 美元。去除了重量的限制外，由于飞机货场容积有限，公司每天只能运 50000 立方英尺的货物。每天要运送的货物数量如表 9-1 所示。

表 9-1　数据表

货物	重量（吨）	体积（立方英尺/吨）
1	30	550
2	40	800
3	50	400

（1）求使得利润最大的每天航空运输的各种货物的吨数。

（2）计算每个约束的影子价格，解释它们的含义。

（3）公司有能力对它的一些旧的飞机进行改装来增大货运区域的空间。每架飞机的改造要花费 200000 美元，可以增加 2000 立方英尺的容积。重量限制仍保持不变。假设飞机每年飞行 250 天，这些旧飞机剩余的使用寿命约为 5 年。在这种情况下，是否值得改装？有多少架飞机才值得改装？

9.2　摘　　要

这是一个实际问题，主要针对一个航空运输公司的营业模型的分析及优化处理。在此运用数学建模的相关理论知识可求解得到优化的市场营业模型，以此制定最优化营业方式。

此题中，成本是未知量，我们可以不考虑成本的影响，只求出营业额的最大值即可。由于净利润=营业额–成本，故净利润也相应地较高，也就是营业方式的最优化。

对于问题一，主要针对求该运输公司的最大利润，我们只需将三种货物在运输公司要求的体积和质量等的多重约束下，按照某个比例搭配得到最优化解，得到利润的最大值。利用线性规划模型便易得到一个数学模型，并利用 LINGO 软件求解此模型。在此模型中，求得当运输货物一为 30 吨，货物二 16.875 吨，货物三 50 吨时取得最大收益 24218.75 美元。

在问题二中，求解每个约束条件的影子价格，影子价格即是约束条件对利润的影响。在第一问中已利用 LINGO 软件求解此模型，程序中反映了每个约束条件的影子价格。从程序中可看出，公司每天运输货物的能力 100 吨无剩余，影子价格为 0 美元；每天运输货物的总体积的影子价格为 0.3125 美元，也就是运输的货物总体积增加 1 立方英尺，利润将会增加 0.3125 美元；货物一的影子价格是 78.125 美元，增加 1 吨货物一，利润将会增加 78.125 美元；货物二的影子价格为 0 美元；货物三的影子价格是 125，增加 1 吨货物三，利润将会增加 125 美元。这些约束条件产生的影子价格是潜在的，反映了每个约束条件增加 1 时带来的利润的变化。

在问题三中，针对改造飞机是否将带来公司的利润增加的问题。在此，只需再满足公司的每天货运能力即约束条件，将改造飞机后公司的收益和改造前公司的收益进行对比，如果收益增加便值得改造。得到要改造 1.25 架飞机使的收益最大。最终计算可得改造一架旧飞机、改造两架旧飞机、改造三架旧飞机、改造四架旧飞机均使公司利润提升；而改造五架旧飞机时平均每天收益为 24200 美元，和不改造飞机的 24218.75 美元收益作对比，可以得到改造五架飞机公司将在原来基础上亏损。故在假设基础上，可以改装四架旧飞机，公司将盈利。但实际中很难保证条件的实现，而且改装也耗时耗力，故公司改装两架旧飞机最好，这时满足公司的最大的运输能力。

关键词：线性规划、影子价格、约束条件、收益。

9.3　基 本 假 设

（1）假设经济平稳的发展，无地震等重大自然灾害；

（2）假设飞机无重大事故等；

（3）假设飞机的运输成本一定；

（4）假设公司的营业每年的情况均符合题意；

（5）假设市场需求各种货物的量对本题目无影响等。

9.4　符 号 说 明

x_1、x_2、x_3	分别为改造前第一、二、三类货物的运载吨数
x_4	改造的飞机数
x_5、x_6、x_7	分别为改造后第一、二、三类货物的运载吨数
Q_1	改造前每天的收益
Q_2	改造后五年的收益

9.5　问　题　一

9.5.1　问题的分析

对于问题一，求该运输公司的最大利润，我们只需将三种货物在运输公司要求的体积和质量等的多重约束下，利用线性规划模型便易得到一个数学模型，并利用 LINGO 软件求解此模型即可。

公司为进行这项运输工作，所得的 $Q_1 = 250x_1 + 250x_2 + 250x_3$，而公司每天有 100 吨的航空运输能力，可得到：

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 100$$

公司每天也只能运 50000 立方英尺的货物，可得:

$$550x_1 + 800x_2 + 400x_3 \leqslant 50000$$

而对运输的货物的吨数也有限制，列出下列不等式得：

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_1 \leqslant 30 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 40 \\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 50 \end{cases}$$

结合这些约束条件即可求解出此模型的最优化问题。

9.5.2　模型的建立与求解

根据题目给的各项数据，由此建立数学模型得：

$$\max \quad Q_1 = 250x_1 + 250x_2 + 250x_3$$

$$\text{s.t}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 100$$

$$550x_1 + 800x_2 + 400x_3 \leqslant 50000$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 30$$

$$0 \leqslant x_2 \leqslant 40$$

$$0 \leqslant x_3 \leqslant 50$$

利用 LINGO 软件求 Q_1 的最大值，编程如下：

```
max 250x1+250x2+250x3         !目标函数;
st
x1+x2+x3<100                  !目标约束条件，依次如方程
550x1+800x2+400x3<50000       !目标约束条件，依次如方程
x1<30                         !目标约束条件，依次如方程
x2<40                         !目标约束条件，依次如方程
x3<50                         !目标约束条件，依次如方程
x1>0                          !目标约束条件，依次如方程
x2>0                          !目标约束条件，依次如方程
x3>0                          !目标约束条件，依次如方程
End                           !程序结束;
```

运行程序输出结果如下：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          24218.75
Infeasibilities:                          0.000000
Total solver iterations:                         1


                   Variable           Value        Reduced Cost
                         X1        30.00000            0.000000
                         X2        16.87500            0.000000
                         X3        50.00000            0.000000

                        Row    Slack or Surplus      Dual Price
                          1        24218.75            1.000000
                          2        3.125000            0.000000
                          3        0.000000           0.3125000
                          4        0.000000            78.12500
                          5        23.12500            0.000000
                          6        0.000000            125.0000
                          7        30.00000            0.000000
                          8        16.87500            0.000000
                          9        50.00000            0.000000
```

整理程序结果得到：当 $x_1=30$、$x_2=16.875$、$x_3=50$ 时运输公司取得最大收益，最大收益为 $\max_{Q1}=24218.75$ 美元。

9.5.3　结果分析

公司在这种优化模型下，每天运输的货物吨数为 96.875 吨，接近每天的运输能力 100 吨。运输货物的总体积达到 50000 立方英尺，正好等于公司的运输体积的极限，故这个结果合理。而在公司在满足吨数刚好等于 100 吨的前提下，体积有剩余，而公司的营业额也会相应下降。故这个最优化模型在假设满足的前提下，具有一定的可靠性，最优化方案符合实际，优化的结果也符合实际。

9.6　问　题　二

9.6.1　模型的分析与求解

在这个问题中，求解每个约束条件的影子价格，可用第一问中已用 LINGO 软件求解此模型的结果来分析此问，因为程序中反映了每个约束条件的影子价格。

数据如下：

```
                   Variable           Value        Reduced Cost
                         X1        30.00000            0.000000
                         X2        16.87500            0.000000
                         X3        50.00000            0.000000

                        Row    Slack or Surplus      Dual Price
                          1        24218.75            1.000000
```

```
                 2        3.125000         0.000000
                 3        0.000000        0.3125000
                 4        0.000000         78.12500
                 5        23.12500         0.000000
                 6        0.000000         125.0000
                 7        30.00000         0.000000
                 8        16.87500         0.000000
                 9        50.00000         0.000000
```

从程序中可看出：

公司每天运输货物的能力 100 吨剩余 3.125，影子价格为 0，主要由于公司的限制，可能来自自身的限制等等；

每天运输货物的总体积无剩余，总体积的影子价格为 0.3125，也就是运输的货物总体积增加 1 立方英尺，利润将会增加 0.3125 美元；

货物一的影子价格是 78.125，增加 1 吨货物一，利润将会增加 78.125 美元；

货物二的影子价格为 0，但货物二有剩余，剩余 23.125 吨；

货物三在此运输条件下无剩余，但它的影子价格是 125，增加 1 吨货物三，利润将会增加 125 美元。

9.6.2　结果的分析

这些约束条件产生的影子价格是潜在的，反映了每个约束条件增加 1 时带来的利润的变化。这也是公司可以调整市场方案考虑的参考数据，具有一定的可行性。这些数据充分反映了各个约束条件对公司利润的影响。从结果中知道，增加托运货物的吨数和增大货物二的运输量不能提高公司收益，从而公司可以不采用增大货运总吨数能力和增加货物二的运输的方式来增大利润空间；而体积的增加也对公司的利润影响甚小；相对来说，在满足公司运输能力的前提下，适当增大货物一和货物三将对公司有好处，很大程度上增大公司的收益。

9.7　问　题　三

9.7.1　问题的分析

在问题三中，是否改造飞机只需将改造飞机后公司的收益和改造前公司的收益进行对比，如果收益增加便值得改造。改造后公司运输货物的吨数不变，体积也要有限制，求出此时约束条件下三种货物的运输吨数，由于改造后飞机的寿命为五年，计算出相应的收益即可。由于旧飞机剩余的使用寿命约为 5 年，一架飞机的改造要花费 200000 美元，故只需要计算公司改造飞机后 5 年内的总收成即可，可列下列等式：

$$Q_2 = 250\times250\times5\times(x_5+x_6+x_7)-200000\times x_4 = -200000x_4+312500x_5+312500x_6+312500x_7$$

公司的重量限制仍保持不变，在此有 $x_5+x_6+x_7\leqslant100$，而改造一架飞机，增加 2000 立方英尺的体积，在此可列 $550x_5+800x_6+400x_7-2000x_4\leqslant50000$，而仍要满足运输的货物的原始供应量吨数的限制，故可列下列不等式：

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_5 \leqslant 30 \\ 0 \leqslant x_6 \leqslant 40 \\ 0 \leqslant x_7 \leqslant 50 \\ x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

9.7.2　模型的建立与求解

根据问题的分析建立相应的数学模型，则改装后五年内的收益则应满足下列条件：

$$\max \quad Q_2 = -200000x_4 + 312500x_5 + 312500x_6 + 312500x_7$$

$$st$$

$$x_5 + x_6 + x_7 \leqslant 100$$

$$550x_5 + 800x_6 + 400x_7 - 2000x_4 \leqslant 50000$$

$$0 \leqslant x_5 \leqslant 30$$

$$0 \leqslant x_6 \leqslant 40$$

$$0 \leqslant x_7 \leqslant 50$$

$$x_4 \geqslant 0$$

运用 LINGO 软件求 Q_2 的最大值：

```
max 312500x5+312500x6+312500x7-200000x4     !目标方程
st
2)x5+x6+x7<100          !目标约束条件，依次如方程
3)-2000x4+550x5+800x6+400x7<50000     !目标约束条件，依次如方程
4)x4>0        !目标约束条件，依次如方程
5)x5<30       !目标约束条件，依次如方程
6)x6<40       !目标约束条件，依次如方程
7)x7<50       !目标约束条件，依次如方程
End          !程序结束
```

运行程序输出结果如下：

```
 Global optimal solution found.
 Objective value:                            0.3100000E+08
 Infeasibilities:                             0.000000
 Total solver iterations:                            2


                      Variable          Value        Reduced Cost
                            X5       30.00000            0.000000
                            X6       20.00000            0.000000
                            X7       50.00000            0.000000
                            X4       1.250000            0.000000

                           Row    Slack or Surplus      Dual Price
                             1       0.3100000E+08        1.000000
                             2        0.000000           232500.0
                             3        0.000000           100.0000
                             4        1.250000           0.000000
                             5        0.000000           25000.00
                             6        20.00000           0.000000
                             7        0.000000           40000.00
```

由程序输出结果得到：当 $x_5 = 30$、$x_6 = 20$、$x_7 = 50$ 时运输公司取得最大收益，最大收益为 $\max_{Q2} = 30854690 \approx 3.1 \times 10^7$ 美元。

由实际情况得，改造飞机的数量只能是整数，在此考虑当 x_4 分别取 1、2、3（架）时运输公司取得的收益，如表 9-2 所示。

表 9-2　收益

	不改造飞机	改造一架飞机	改造两架飞机	改造三架飞机	改造四架飞机	改造五架飞机
五年的年收益 Q_2（美元）	30273438	30854690	30850000	30650000	30450000	30250000
平均每天的收益(美元)	24218.75	24683.75	24680	24520	24360	24200
飞机总的货运体积（立方英尺/吨）	50000	52000	54000	56000	58000	60000
每天运输货物体积（立方英尺/吨）	50000	52000	52500	52500	52500	52500
每天运输的货物（吨）	96.875	99.375	100	100	100	100

注：其中五年的年收益 Q_2 为已减去了改装费后的收益。

从以上可看出，只改造一架飞机，营业额最多，条件都接近最大值；改造两架飞机就有空间剩余了；改造三架飞机，空间有剩余，但营业额不多；当改造四架飞机时，五年的年收益 Q_2 为 30450000 美元，平均每天的收益为 24360 美元，空间有剩余，但相对未改造时，营业额不多，几乎无收益；五架飞机时，五年的年收益 Q_2 为 30250000 美元，小于未改造时的 30273438 美元，平均每天的收益为 24200 美元，小于未改造时的 24218.75 美元。由上述结果可得，随着改造飞机的数目的增加收益是逐渐减小的，因此，有两架旧飞机时最值得改装，此时五年内平均每天的收益达到 24680 美元，公司利润接近最大利润。符合实际情况，又缩小了一定的风险率。而对于改造三、四架旧飞机，虽然总利润有所提高，但在日常实际生活中，改装也耗时耗力，也并不是零风险，其实不可取。出于最大利润考虑，应该只有两架时才改装为最好。

故综上所述，有两架时公司可以改装。

第 10 章　人员安排问题

本章以人员安排问题为背景出发，在综合数学建模基础和软件应用的基础上，进行人员安排问题的求解。人员安排问题较复杂，为 0-1 变量模型问题，针对不同的项目分工，人员安排将不同。人员安排问题为较常见的 NP 问题，模型求解的结果可能存在多个可能，可供用户选择的机会也较多。本章主要从人员安排角度出发，考虑完成项目总费用最优化问题求解等。

学习目标：

（1）采用 LINGO 求解人员安排问题等；

（2）学习掌握建立具有一定泛化能力的数学模型；

（3）学习掌握 0-1 变量的使用。

10.1　问题的提出

一位管理人员安排一些工程师完成三个项目 A、B 和 C。项目 A、B 和 C 分别需要 18、12 和 30 人一月来完成。工程师甲、乙、丙和丁都可以完成这些项目，他们的月工资分别是 3000 元、3500 元、3200 元和 3900 元。假设工程师在每 6 个月中只能被安排一个项目，所有项目要求只能在 18 个月内完成。

（1）求完成所有项目的总费用最小的分配方案（分配工程师到具体项目）。

（2）假设由于个性冲突，工程师乙和丙不能同时在一个项目中工作。他们的个人矛盾会对人员的安排带来额外损失吗？

（3）如果项目 A 能够在 6 个月内完成，公司会发 10000 元的奖金。这会改变最优解吗？

10.2　摘　　要

这是一个实际问题，好的人员安排不仅可以让工程高速高质量的完成，还可以使完成工程的费用最小。本章针对人员安排的计算展开讨论，利用规划模型求解。在求解该问题的过程中，设定了一些常量和决策变量对问题中的已知和求解结果进行表示，以方便模型的建立和求解。

问题一中，求解完成所有项目所需总费用的最小值的人员分配方案，此题没有考虑工程师本身的问题，且工程师在每 6 个月中只能被安排一个项目。先对问题进行合理的假设，建立一个具体的规划模型，然后运用 LINGO 软件对模型进行求解，求出了完成所有项目所需总费用最小为 198000 元。

问题二中，考虑了工程师之间关系的情况。由于工程师乙和丙之间存在个性冲突而不能被同时安排到同一个项目，即工程师乙和丙在同一时间内不能做同一的项目。利用 0-1 变量将其转化为数学表达式，建立适当的规划模型，然后运用 LINGO 软件对模型进行求解，得出了最小总费用为 19800 元，并讨论这种情况对总费用的影响。

问题三中，在问题一的基础上，考虑了外部的因素对完成工期的总费用的影响。即考虑由于项目 A 能够在 6 个月内完成发奖金的情况，讨论其是否会对完成工期的总费用的最优解产生影响。在求解该问题时，分别讨论项目 A 在时期一、二、三中完成，讨论项目在不同时期内完成对最优解的影响，最终得出项目的安排时期对最优解不造成影响的结论。

本文最大的特色是对原问题作出了合理假设，将问题转变成熟悉的线性规划问题。然后再逐渐考虑由于工程师空闲情况、工程师之间的关系情况及外部因素对工程影响等复杂的问题，由数学数据去分析在各种情况下的人员分配最优解。在问题的求解过程中，运用 LINGO 软件对建立的规划模型求解，其求解结果非常全面。

关键词：人员安排、LINGO、线性规划、优化求解。

10.3　问题的假设

（1）项目在整个过程中不出现大的调整；
（2）项目的各项条件均满足题设；
（3）项目过程中，不出现重大经济等变故；
（4）工程师在一定时期内完成相同的任务；
（5）工程师在面对不同的任务时，完成时间相同。

10.4　符 号 说 明

S 表示项目的总费用；t_{ji}（$j=1,2,3,4$，$i=1,2,3$）表示第 j 个人完成项目 i 的时间——月数，具体如表 10-1 所示。

表 10-1　数据表

	甲	乙	丙	丁
项目 A	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}
项目 B	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{24}
项目 C	t_{31}	t_{32}	t_{33}	t_{34}

10.5　问　题　一

10.5.1　问题一的分析

因为工程师在每 6 个月中只能被安排一个项目，而且所有项目要求只能在 18 个月内

完成，则表示图形如图 10-1 所示。

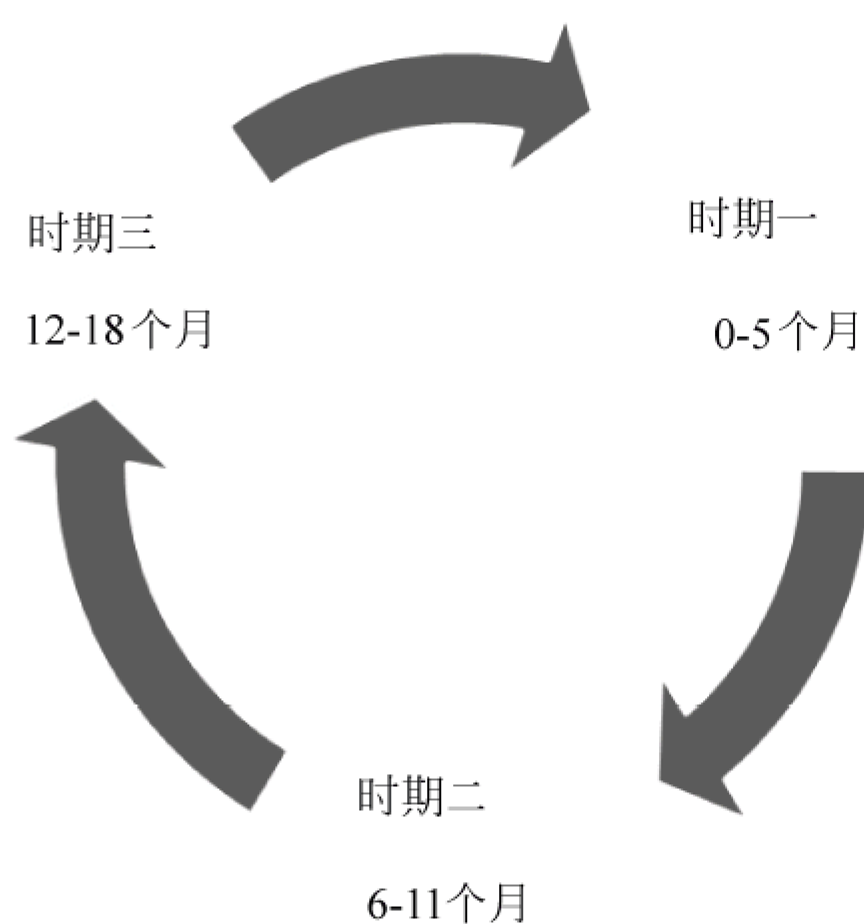


图 10-1　流程图

（1）完成所有项目的总费用，等于工程师甲、乙、丙和丁参于完成项目 A、B、C 和 D 各所用的月数与月工资的乘积之和，则可表示为：

$$\min \quad S = 3000\sum_{j=1}^{j=3} t_{j1} + 3500\sum_{j=1}^{j=3} t_{j2} + 3200\sum_{j=1}^{j=3} t_{j3} + 3900\sum_{j=1}^{j=3} t_{j4}$$

$$= 3000(t_{11} + t_{21} + t_{31}) + 3500(t_{12} + t_{22} + t_{32}) + 3200(t_{13} + t_{23} + t_{33}) + 3900(t_{14} + t_{24} + t_{34})$$

（2）工程师甲、乙、丙和丁完成项目 A、B、C 和 D 所用的总时间约束为：

$$\sum_{i=1,j=1}^{i=3,j=4} t_{ji} \geqslant 18 + 12 + 30 = 60$$

（3）项目 A 完成所需的时间约束为：

$$\sum_{j=1}^{j=4} t_{1j} \geqslant 18$$

（4）项目 B 完成所需的时间约束为：

$$\sum_{j=1}^{j=4} t_{2j} \geqslant 12$$

（5）项目 C 完成所需的时间约束为：

$$\sum_{j=1}^{j=4} t_{3j} \geqslant 30$$

（6）所有项目要求只能在 18 个月内完成：

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{i=3} t_{ij} \leqslant 18 \qquad (j = 1 \cdots 4)$$

10.5.2　问题一模型的建立与求解

综上所述，建立相应的数学模型如下：

$$
\begin{cases}
\min \quad S = 3000\sum_{j=1}^{j=3} t_{j1} + 3500\sum_{j=1}^{j=3} t_{j2} + 3200\sum_{j=1}^{j=3} t_{j3} + 3900\sum_{j=1}^{j=3} t_{j4} \\
s.t. \\
\quad \sum_{i=1,j=1}^{i=3,j=4} t_{ji} \geqslant 60 \\
\quad \sum_{j=1}^{j=4} t_{1j} \geqslant 18 \\
\quad \sum_{j=1}^{j=4} t_{2j} \geqslant 12 \\
\quad \sum_{j=1}^{j=4} t_{3j} \geqslant 30 \\
\quad 0 \leqslant \sum_{i=1}^{i=3} t_{ij} \leqslant 18 \qquad (j = 1 \cdots 4)
\end{cases}
$$

这是一个非线性优化问题，采用 LINGO 能够较容易的求解，具体的程序如下：

```
model:    !目标方程
min=3000*t11+3000*t21+3000*t31+3500*t12+3500*t22+3500*t32+3200*t13+3200*t
23+3200*t33+3900*t14+3900*t24+3900*t34;
t11+t21+t31+t12+t22+t32+t13+t23+t33+t14+t24+t34>=60;!目标约束条件，依次如方程
t11+t12+t13+t14>=18;                                   !目标约束条件，依次如方程
t21+t22+t23+t24>=12;                                   !目标约束条件，依次如方程
t31+t32+t33+t34>=30;                                   !目标约束条件，依次如方程
t11+t21+t31<=18;                                       !目标约束条件，依次如方程
t12+t22+t32<=18;                                       !目标约束条件，依次如方程
t13+t23+t33<=18;                                       !目标约束条件，依次如方程
@gin(t11);@gin(t21);@gin(t31);       %整数变量
@gin(t12);@gin(t22);@gin(t32);
@gin(t13);@gin(t23);@gin(t33);
@gin(t14);@gin(t24);@gin(t34);
end
```

运行程序输出结果如下：

```
 Global optimal solution found.
 Objective value:                              198000.0
 Objective bound:                              198000.0
 Infeasibilities:                              0.000000
 Extended solver steps:                               0
 Total solver iterations:                             9


                       Variable           Value        Reduced Cost
                            T11        0.000000            3000.000
                            T21        6.000000            3000.000
                            T31        12.00000            3000.000
                            T12        12.00000            3500.000
                            T22        6.000000            3500.000
                            T32        0.000000            3500.000
                            T13        0.000000            3200.000
                            T23        0.000000            3200.000
                            T33        18.00000            3200.000
```

```
                T14        6.000000           3900.000
                T24        0.000000           3900.000
                T34        0.000000           3900.000
```

整理相应的运行结果如表 10-2 所示。

表 10-2　结果数据表 1

	甲	乙	丙	丁
项目 A	0	6	6	6
项目 B	0	12	0	0
项目 C	18	0	12	0

总费用最小为：$S_{\min}=198000$。

根据表 10-2 的结果，得到表 10-3，其中表 10-2 中的数据为工程师工作于项目 A、B 和 C 的一种结果。

表 10-3　结果数据表 2

	时期一				时期二				时期三			
	甲	乙	丙	丁	甲	乙	丙	丁	甲	乙	丙	丁
项目 A	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
项目 B	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
项目 C	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

绘制相应的不同时期人员安排图如图 10-2 所示。

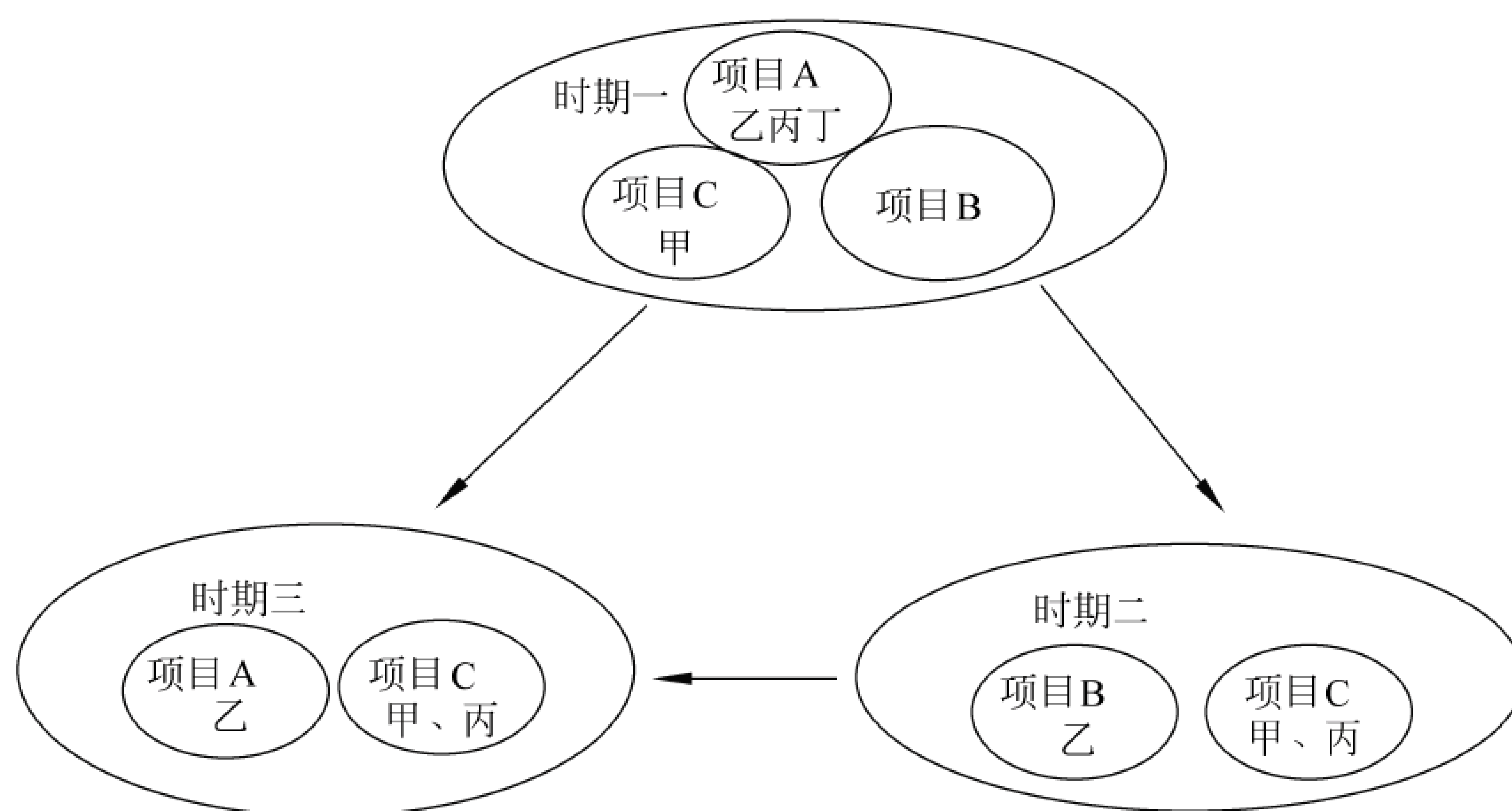


图 10-2　不同时期人员安排图

10.6　问题一模型的优化

10.6.1　符号说明

$a_{ij}=1$，$i=j=1\cdots3$：表示甲工程师在时期j被安排于第i个项目；

$a_{ij}=0$，$i=j=1\cdots3$：表示甲工程师在时期j不被安排第i个项目；

$b_{ij}=1$，$i=j=1\cdots3$：表示乙工程师在时期j被安排于第i个项目；

$b_{ij}=0$，$i=j=1\cdots3$：表示乙工程师在时期j不被安排第i个项目；

$c_{ij}=1$，$i=j=1\cdots3$：表示丙工程师在时期j被安排于第i个项目；

$c_{ij}=0$，$i=j=1\cdots3$：表示丙工程师在时期j不被安排第i个项目；

$d_{ij}=1$，$i=j=1\cdots3$：表示丁工程师在时期j被安排于第i个项目；

$d_{ij}=0$，$i=j=1\cdots3$：表示丁工程师在时期j不被安排第i个项目。

相应的具体到每一个时期的表示方式如表 10-4 所示。

表 10-4　数据表

	时期一				时期二				时期三			
	甲	乙	丙	丁	甲	乙	丙	丁	甲	乙	丙	丁
项目 A	a_{11}	b_{11}	c_{11}	d_{11}	a_{12}	b_{12}	c_{12}	d_{12}	a_{13}	b_{13}	c_{13}	d_{13}
项目 B	a_{21}	b_{21}	c_{21}	d_{21}	a_{22}	b_{22}	c_{22}	d_{22}	a_{23}	b_{23}	c_{23}	d_{23}
项目 C	a_{31}	b_{31}	c_{31}	d_{31}	a_{32}	b_{32}	c_{32}	d_{32}	a_{33}	b_{33}	c_{33}	d_{33}

10.6.2　改进模型的分析

（1）工程师甲在时期一、时期二、时期三，各阶段都有可能被安排参与项目，则：

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{i=3}a_{ij}\leqslant1\quad(j=1\cdots3)$$

（2）工程师乙在时期一、时期二、时期三，各阶段都有可能被安排参与项目，则：

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{i=3}b_{ij}\leqslant1\quad(j=1\cdots3)$$

（3）工程师丙在时期一、时期二、时期三，各阶段都有可能被安排参与项目，则：

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{i=3}c_{ij}\leqslant1\quad(j=1\cdots3)$$

（4）工程师丁在时期一、时期二、时期三，各阶段都有可能被安排参与项目，则：

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{i=3}d_{ij}\leqslant1\quad(j=1\cdots3)$$

（5）工程师们在一个时期内参与一个项目，工资应按 6 个月来计算，则工程师甲工作于这几个项目所用的总时间为时期一、时期二、时期三的所用时间之和，有：

$$6\sum_{j=1}^{j=3}a_{ij}=t_{i1}\quad(i=1\cdots3)$$

（6）则工程师乙工作于这几个项目所用的总时间为时期一、时期二、时期三的所用时间之和，有：

$$6\sum_{j=1}^{j=3}b_{ij}=t_{i2}\quad(i=1\cdots3)$$

（7）则工程师丙工作于这几个项目所用的总时间为时期一、时期二、时期三的所用时间之和，有：

$$6\sum_{j=1}^{j=3}c_{ij}=t_{i3}\quad(i=1\cdots3)$$

（8）则工程师丁工作于这几个项目所用的总时间为时期一、时期二、时期三的所用时间之和，有：

$$6\sum_{j=1}^{j=3} d_{ij} = t_{i4} \qquad (i = 1\cdots3)$$

10.6.3　改进模型的建立与求解

综上所述，建立相应的数学模型如下：

$$\begin{cases}
\min \quad S = 3000\sum_{j=1}^{j=3} t_{j1} + 3500\sum_{j=1}^{j=3} t_{j2} + 3200\sum_{j=1}^{j=3} t_{j3} + 3900\sum_{j=1}^{j=3} t_{j4} \\
s.t. \\
0 \leqslant \sum_{i=1}^{i=3} a_{ij} \leqslant 1 \quad (j = 1\cdots3) \\
0 \leqslant \sum_{i=1}^{i=3} b_{ij} \leqslant 1 \quad (j = 1\cdots3) \\
0 \leqslant \sum_{i=1}^{i=3} c_{ij} \leqslant 1 \quad (j = 1\cdots3) \\
0 \leqslant \sum_{i=1}^{i=3} d_{ij} \leqslant 1 \quad (j = 1\cdots3) \\
\sum_{i=1,j=1}^{i=3,j=4} t_{ji} \geqslant 60 \\
\sum_{j=1}^{j=4} t_{1j} \geqslant 18 \\
\sum_{j=1}^{j=4} t_{2j} \geqslant 12 \\
\sum_{j=1}^{j=4} t_{3j} \geqslant 30 \\
0 \leqslant \sum_{i=1}^{i=3} t_{ij} \leqslant 18 \qquad (j = 1\cdots4) \\
6\sum_{j=1}^{j=3} a_{ij} = t_{i1} \qquad (i = 1\cdots3) \\
6\sum_{j=1}^{j=3} b_{ij} = t_{i2} \qquad (i = 1\cdots3) \\
6\sum_{j=1}^{j=3} c_{ij} = t_{i3} \qquad (i = 1\cdots3) \\
6\sum_{j=1}^{j=3} d_{ij} = t_{i4} \qquad (i = 1\cdots3)
\end{cases}$$

编写 LINGO 程序求解如下：

```
model:
min=3000*t11+3000*t21+3000*t31+3500*t12+3500*t22+3500*t32+3200*t13+3200*t
23+3200*t33+3900*t14+3900*t24+3900*t34;
a11+a21+a31<=1;    !目标约束条件，依次如方程
a12+a22+a32<=1;    !目标约束条件，依次如方程
a13+a23+a33<=1;    !目标约束条件，依次如方程
b11+b21+b31<=1;    !目标约束条件，依次如方程
b12+b22+b32<=1;    !目标约束条件，依次如方程
b13+b23+b33<=1;    !目标约束条件，依次如方程
c11+c21+c31<=1;    !目标约束条件，依次如方程
c12+c22+c32<=1;    !目标约束条件，依次如方程
c13+c23+c33<=1;    !目标约束条件，依次如方程
d11+d21+d31<=1;    !目标约束条件，依次如方程
d12+d22+d32<=1;    !目标约束条件，依次如方程
d13+d23+d33<=1;    !目标约束条件，依次如方程
t11+t21+t31+t12+t22+t32+t13+t23+t33+t14+t24+t34>=60;!目标约束条件，依次如方程
t11+t12+t13+t14>=18;                             !目标约束条件，依次如方程
t21+t22+t23+t24>=12;                             !目标约束条件，依次如方程
t31+t32+t33+t34>=30;                             !目标约束条件，依次如方程
t11+t21+t31<=18;     !目标约束条件，依次如方程
t12+t22+t32<=18;     !目标约束条件，依次如方程
t13+t23+t33<=18;     !目标约束条件，依次如方程
6*a11+6*a21+6*a31+6*a12+6*a22+6*a32+6*a13+6*a23+6*a33-t11-t21
-t31=0;    !目标约束条件，依次如方程
6*b11+6*b21+6*b31+6*b12+6*b22+6*b32+6*b13+6*b23+6*b33-t12-t22
-t32=0;    !目标约束条件，依次如方程
6*c11+6*c21+6*c31+6*c12+6*c22+6*c32+6*c13+6*c23+6*c33-t13-t23
-t33=0;    !目标约束条件，依次如方程
6*d11+6*d21+6*d31+6*d12+6*d22+6*d32+6*d13+6*d23+6*d33-t14-t24
-t34=0;    !目标约束条件，依次如方程
@gin(t11);@gin(t21);@gin(t31);    !方程变量为整数
@gin(t12);@gin(t22);@gin(t32);
@gin(t13);@gin(t23);@gin(t33);
@gin(t14);@gin(t24);@gin(t34);
end
```

运行程序输出结果如下：

```
 Global optimal solution found.
 Objective value:                          198000.0
 Objective bound:                          198000.0
 Infeasibilities:                          0.000000
 Extended solver steps:                           0
 Total solver iterations:                         9


                  Variable           Value        Reduced Cost
                       T11        0.000000            3000.000
                       T21        6.000000            3000.000
                       T31        12.00000            3000.000
                       T12        12.00000            3500.000
                       T22        6.000000            3500.000
                       T32        0.000000            3500.000
                       T13        0.000000            3200.000
                       T23        0.000000            3200.000
                       T33        18.00000            3200.000
                       T14        6.000000            3900.000
```

```
T24        0.000000        3900.000
T34        0.000000        3900.000
A11        0.000000        0.000000
A21        0.000000        0.000000
A31        1.000000        0.000000
A12        0.000000        0.000000
A22        0.000000        0.000000
A32        1.000000        0.000000
A13        0.000000        0.000000
A23        0.000000        0.000000
A33        1.000000        0.000000
B11        0.000000        0.000000
B21        0.000000        0.000000
B31        1.000000        0.000000
B12        0.000000        0.000000
B22        0.000000        0.000000
B32        1.000000        0.000000
B13        0.000000        0.000000
B23        0.000000        0.000000
B33        1.000000        0.000000
C11        0.000000        0.000000
C21        0.000000        0.000000
C31        1.000000        0.000000
C12        0.000000        0.000000
C22        0.000000        0.000000
C32        1.000000        0.000000
C13        0.000000        0.000000
C23        0.000000        0.000000
C33        1.000000        0.000000
D11        0.000000        0.000000
D21        0.000000        0.000000
D31        0.000000        0.000000
D12        0.000000        0.000000
D22        0.000000        0.000000
D32        0.000000        0.000000
D13        0.000000        0.000000
D23        0.000000        0.000000
D33        1.000000        0.000000
```

整理输出结果如表 10-5 所示。

表 10-5　数据表

	时期一				时期二				时期三			
	甲	乙	丙	丁	甲	乙	丙	丁	甲	乙	丙	丁
项目 A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
项目 B	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
项目 C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

10.7　问　题　二

假设由于个性冲突，工程师乙和丙不能同时在一个项目中工作。他们的个人矛盾会对人员的安排带来额外损失吗？即使工程师乙和丙在时期一、二、三不能同时出现，即增加

这些约束条件：

$$\begin{cases} b_{11}+c_{11}<=1 \\ b_{21}+c_{21}<=1 \\ b_{31}+c_{31}<=1 \\ b_{12}+c_{12}<=1 \\ b_{22}+c_{22}<=1 \\ b_{13}+c_{13}<=1 \\ b_{23}+c_{23}<=1 \\ b_{33}+c_{33}<=1 \end{cases}$$

则编写 LINGO 程序如下：

```
model:
min=3000*t11+3000*t21+3000*t31+3500*t12+3500*t22+3500*t32+3200*t13+3200*t
23+3200*t33+3900*t14+3900*t24+3900*t34;     !目标方程
a11+a21+a31<=1;   !目标约束条件，依次如方程
a12+a22+a32<=1;   !目标约束条件，依次如方程
a13+a23+a33<=1;   !目标约束条件，依次如方程
b11+b21+b31<=1;   !目标约束条件，依次如方程
b12+b22+b32<=1;   !目标约束条件，依次如方程
b13+b23+b33<=1;   !目标约束条件，依次如方程
c11+c21+c31<=1;   !目标约束条件，依次如方程
c12+c22+c32<=1;   !目标约束条件，依次如方程
c13+c23+c33<=1;   !目标约束条件，依次如方程
d11+d21+d31<=1;   !目标约束条件，依次如方程
d12+d22+d32<=1;   !目标约束条件，依次如方程
d13+d23+d33<=1;   !目标约束条件，依次如方程
b11+c11<=1;       !目标约束条件，增加的约束条件
b21+c21<=1;       !目标约束条件，增加的约束条件
b31+c31<=1;       !目标约束条件，增加的约束条件
b12+c12<=1;       !目标约束条件，增加的约束条件
b22+c22<=1;       !目标约束条件，增加的约束条件
b32+c32<=1;       !目标约束条件，增加的约束条件
b13+c13<=1;       !目标约束条件，增加的约束条件
b23+c23<=1;       !目标约束条件，增加的约束条件
b33+c33<=1;       !目标约束条件，增加的约束条件
t11+t21+t31+t12+t22+t32+t13+t23+t33+t14+t24+t34>=60;!目标约束条件，依次如方程
t11+t12+t13+t14>=18;                       !目标约束条件，依次如方程
t21+t22+t23+t24>=12;                       !目标约束条件，依次如方程
t31+t32+t33+t34>=30;                       !目标约束条件，依次如方程
t11+t21+t31<=18;                           !目标约束条件，依次如方程
t12+t22+t32<=18;                           !目标约束条件，依次如方程
t13+t23+t33<=18;                           !目标约束条件，依次如方程
6*a11+6*a21+6*a31+6*a12+6*a22+6*a32+6*a13+6*a23+6*a33-t11-t21
-t31=0;  !目标约束条件，依次如方程
6*b11+6*b21+6*b31+6*b12+6*b22+6*b32+6*b13+6*b23+6*b33-t12-t22
-t32=0;  !目标约束条件，依次如方程
6*c11+6*c21+6*c31+6*c12+6*c22+6*c32+6*c13+6*c23+6*c33-t13-t23
-t33=0;  !目标约束条件，依次如方程
6*d11+6*d21+6*d31+6*d12+6*d22+6*d32+6*d13+6*d23+6*d33-t14-t24
-t34=0;  !目标约束条件，依次如方程
```

```
@gin(t11);@gin(t21);@gin(t31);  !约束变量为整型变量
@gin(t12);@gin(t22);@gin(t32);
@gin(t13);@gin(t23);@gin(t33);
@gin(t14);@gin(t24);@gin(t34);
end
```

运行程序输出结果如下：

```
 Global optimal solution found.
 Objective value:                            198000.0
 Objective bound:                            198000.0
 Infeasibilities:                            0.000000
 Extended solver steps:                             0
 Total solver iterations:                          20


                       Variable           Value        Reduced Cost
                            T11        0.000000            3000.000
                            T21        0.000000            3000.000
                            T31        18.00000            3000.000
                            T12        6.000000            3500.000
                            T22        12.00000            3500.000
                            T32        0.000000            3500.000
                            T13        6.000000            3200.000
                            T23        0.000000            3200.000
                            T33        12.00000            3200.000
                            T14        6.000000            3900.000
                            T24        0.000000            3900.000
                            T34        0.000000            3900.000
                            A11        0.000000            0.000000
                            A21        0.000000            0.000000
                            A31        1.000000            0.000000
                            A12        0.000000            0.000000
                            A22        0.000000            0.000000
                            A32        1.000000            0.000000
                            A13        0.000000            0.000000
                            A23        0.000000            0.000000
                            A33        1.000000            0.000000
                            B11        0.000000            0.000000
                            B21        1.000000            0.000000
                            B31        0.000000            0.000000
                            B12        0.000000            0.000000
                            B22        1.000000            0.000000
                            B32        0.000000            0.000000
                            B13        1.000000            0.000000
                            B23        0.000000            0.000000
                            B33        0.000000            0.000000
                            C11        1.000000            0.000000
                            C21        0.000000            0.000000
                            C31        0.000000            0.000000
                            C12        1.000000            0.000000
                            C22        0.000000            0.000000
                            C32        0.000000            0.000000
                            C13        0.000000            0.000000
                            C23        0.000000            0.000000
                            C33        1.000000            0.000000
                            D11        0.000000            0.000000
                            D21        0.000000            0.000000
                            D31        0.000000            0.000000
                            D12        0.000000            0.000000
                            D22        0.000000            0.000000
```

```
            D32          0.000000              0.000000
            D13          0.000000              0.000000
            D23          0.000000              0.000000
            D33          1.000000              0.000000
```

由程序运行结果可得，$S_{\min}=198000$。他们的个人矛盾不会对人员的安排带来额外损失。

10.8 问　题　三

如果项目 A 能够在 6 个月内完成，即增加这个约束条件：

$$a_{11}+a_{21}+a_{31}+b_{11}+b_{21}+b_{31}+c_{11}+c_{21}+c_{31}+d_{11}+d_{21}+d_{31}=3$$

则编写 LINGO 程序如下：

```
model:
min=3000*t11+3000*t21+3000*t31+3500*t12+3500*t22+3500*t32+3200*t13+3200*t
23+3200*t33+3900*t14+3900*t24+3900*t34;
a11+a21+a31<=1;     !目标约束条件，依次如方程
a12+a22+a32<=1;     !目标约束条件，依次如方程
a13+a23+a33<=1;     !目标约束条件，依次如方程
b11+b21+b31<=1;     !目标约束条件，依次如方程
b12+b22+b32<=1;     !目标约束条件，依次如方程
b13+b23+b33<=1;     !目标约束条件，依次如方程
c11+c21+c31<=1;     !目标约束条件，依次如方程
c12+c22+c32<=1;     !目标约束条件，依次如方程
c13+c23+c33<=1;     !目标约束条件，依次如方程
d11+d21+d31<=1;     !目标约束条件，依次如方程
d12+d22+d32<=1;     !目标约束条件，依次如方程
d13+d23+d33<=1;     !目标约束条件，依次如方程
a11+a21+a31+b11+b21+b31+c11+c21+c31+d11+d21+d31=3;!目标约束条件,增加约束条件
t11+t21+t31+t12+t22+t32+t13+t23+t33+t14+t24+t34>=60;!目标约束条件，依次如方程
t11+t12+t13+t14>=18;    !目标约束条件，依次如方程
t21+t22+t23+t24>=12;    !目标约束条件，依次如方程
t31+t32+t33+t34>=30;  !目标约束条件，依次如方程
t11+t21+t31<=18;      !目标约束条件，依次如方程
t12+t22+t32<=18;      !目标约束条件，依次如方程
t13+t23+t33<=18;      !目标约束条件，依次如方程
6*a11+6*a21+6*a31+6*a12+6*a22+6*a32+6*a13+6*a23+6*a33-t11-t21
-t31=0;  !目标约束条件，依次如方程
6*b11+6*b21+6*b31+6*b12+6*b22+6*b32+6*b13+6*b23+6*b33-t12-t22
-t32=0;  !目标约束条件，依次如方程
6*c11+6*c21+6*c31+6*c12+6*c22+6*c32+6*c13+6*c23+6*c33-t13-t23
-t33=0;  !目标约束条件，依次如方程
6*d11+6*d21+6*d31+6*d12+6*d22+6*d32+6*d13+6*d23+6*d33-t14-t24
-t34=0;  !目标约束条件，依次如方程
@gin(t11);@gin(t21);@gin(t31);  !约束变量为整型变量
@gin(t12);@gin(t22);@gin(t32);
@gin(t13);@gin(t23);@gin(t33);
@gin(t14);@gin(t24);@gin(t34);
end
```

运行程序输出结果如下：

```
 Global optimal solution found.
```

```
Objective value:                          198000.0
Objective bound:                          198000.0
Infeasibilities:                          0.000000
Extended solver steps:                           0
Total solver iterations:                        19


                Variable           Value        Reduced Cost
                     T11        0.000000            3000.000
                     T21        6.000000            3000.000
                     T31        12.00000            3000.000
                     T12        12.00000            3500.000
                     T22        6.000000            3500.000
                     T32        0.000000            3500.000
                     T13        0.000000            3200.000
                     T23        0.000000            3200.000
                     T33        18.00000            3200.000
                     T14        6.000000            3900.000
                     T24        0.000000            3900.000
                     T34        0.000000            3900.000
                     A11        0.000000            0.000000
                     A21        0.000000            0.000000
                     A31        1.000000            0.000000
                     A12        0.000000            0.000000
                     A22        0.000000            0.000000
                     A32        1.000000            0.000000
                     A13        0.000000            0.000000
                     A23        0.000000            0.000000
                     A33        1.000000            0.000000
                     B11        0.000000            0.000000
                     B21        0.000000            0.000000
                     B31        1.000000            0.000000
                     B12        0.000000            0.000000
                     B22        0.000000            0.000000
                     B32        1.000000            0.000000
                     B13        0.000000            0.000000
                     B23        0.000000            0.000000
                     B33        1.000000            0.000000
                     C11        0.000000            0.000000
                     C21        0.000000            0.000000
                     C31        1.000000            0.000000
                     C12        0.000000            0.000000
                     C22        0.000000            0.000000
                     C32        1.000000            0.000000
                     C13        0.000000            0.000000
                     C23        0.000000            0.000000
                     C33        1.000000            0.000000
                     D11        0.000000            0.000000
                     D21        0.000000            0.000000
                     D31        0.000000            0.000000
                     D12        0.000000            0.000000
                     D22        0.000000            0.000000
                     D32        0.000000            0.000000
                     D13        0.000000            0.000000
                     D23        0.000000            0.000000
                     D33        1.000000            0.000000
```

由程序运行结果可得，$S_{\min}=198000$。如果项目 A 能够在 6 个月内完成，公司会发 10000 元的奖金，也不会改变最优解。

第 11 章　食堂用餐满意度问题

长期以来，供餐者和就餐者之间存在供需的矛盾问题。食堂饭菜供应问题、服务员和用餐人员之间的协调处理、师生吃饭走路的距离等等均影响食堂用餐质量的综合评价，然而合理的评价食堂服务满意度又显得至关重要。本章采用层次分析方法对食堂满意度问题进行综合评价，将定性的问题定量化，从而很好的解决该问题，供食堂后期合理调整服务模式作有利参考。

学习目标：

（1）学习和掌握层次分析评价方法；

（2）学习掌握评价公平度问题等；

（3）学习掌握 AHP 方法在实际评价中的应用。

11.1　摘　　要

“食堂就餐问题”数学模型是通过建立就餐满意度指标来分析各食堂的就餐比例从而分析各食堂学生比例，并给出食堂服务质量评价，给食堂能够提出可行性建议。

食堂管理者和广大用餐者双方都十分关注食堂供求关系的不平衡，建立合理的就餐满意度指标，并按此指标，对学校现有食堂做出综合评价。综合考虑多方面因素，分别以餐饮价格、教学楼与食堂的距离、宿舍与食堂的距离、食堂的服务态度、餐饮卫生程度、餐饮口味、食堂餐厅的容量等作为准则层，以食堂服务质量量度指标作为目标层，以不同食堂的服务质量作为方案层。通过分析计算，最终得到食堂一的服务质量最好，食堂二的服务质量其次，食堂三的服务质量最差，且食堂三的服务质量权重为负值，可以预见，食堂三如果不改变现有的服务制度，有可能因师生的心理选择，而导致其关闭。

本章最后，针对师生公平评价满意度问题，定义服务质量的相对不公平标准公式，建立师生在食堂就餐的服务质量的满意度模型，该模型使用不公平值尽量小的方案来减少不公平性，能够更加好的知道食堂服务质量问题。

关键词：满意度指标、相对不公平、食堂服务质量、层次分析法。

11.2　问题的提出

某校目前有多个学生食堂，每天供约 15000 人（学生和教职员工）就餐。学生分布在东西两个宿舍区，在两个教学区上课。长期以来，供餐者和就餐者之间存在供需的矛盾问题。例如，某食堂管理员反映：在饭菜准备方面，有时有巨大的浪费，米饭做了许多，有

时因为没有学生来吃饭，不得不倒掉。然而，学生却说，中午第四节课下课后，因为餐厅人多，排队长，等轮到自己时，可口的饭菜已卖光，新菜还没有上来，不愿意再等，只好随便吃。教师就餐有时也会遇到一些问题，比如，5 月 8 日和 9 日期中考试期间，老师来食堂吃早饭，因为是周末，饭菜准备就有些不足，师傅们讲，没有接到通知，依然按照通常的状态准备的饭菜。

这种供求关系的不平衡，食堂管理者和广大用餐者双方都十分关注。目前还没有找到一种行之有效、快捷的就餐者量化预测方法，能够比较准确地预测不同时间段，不同的日期的就餐人数，以减少材料的浪费，提高餐厅的服务质量和广大师生的满意度。

运用数学建模的方法评价这些食堂的服务质量，建立师生在食堂就餐的服务质量的满意度模型。

11.3　基 本 假 设

（1）学生食堂无重大变故等，而导致食堂无法正常运转；
（2）师生随机选择地方餐饮；
（3）食堂提供的数据真实可靠；
（4）物价变化等因素对师生、食堂无抵触作用；
（5）每天早餐、午餐和晚餐时间固定；
（6）两个教学楼大致位于同一位置；
（7）两栋宿舍楼亦大致位于同一位置；
（8）排除天气的影响。

11.4　符 号 说 明

C_1：餐饮价格；
C_2：教学楼与食堂的位置关系；
C_3：宿舍与食堂的距离；
C_4：食堂的服务态度；
C_5：餐饮卫生程度；
C_6：餐饮口味；
C_7：食堂餐厅的容量；
P_1：食堂 1 的服务质量；
P_2：食堂 2 的服务质量；
P_3：食堂 3 的服务质量；
A：描述准则层 7 元素间关系的成对比较矩阵；
B_i：描述准则层 C_i 元素对食堂 P_1、P_2、P_3 服务质量的影响情况的成对比较矩阵；
λ_0：矩阵 A 的最大特征根；

λ_i：矩阵 B_i 的最大特征根；
w：矩阵 A 的权向量；
w_i：矩阵 B_i 的权向量。

11.5　模 型 分 析

针对该校食堂服务质量评价，这是一个定性问题，由于影响食堂服务质量的变量不一，一般采取的措施是通过调查问卷来了解学生个人对食堂的评价。针对食堂服务评价值，学生需要一个长期的过程来综合，即一个经验数值给定问题。在本问题中，综合考虑三个学生食堂用餐质量评价，针对三个食堂，学生都会从餐饮价格、教学楼与食堂的距离、宿舍与食堂的距离、食堂的服务态度、餐饮卫生程度、餐饮口味及食堂餐厅的容量等方面去考虑，从而最终得到食堂的服务质量水平。层次分析模型能够将定性的问题定量化，对于评价食堂服务质量能较好的表征学生对食堂的评价得分。食堂服务质量评价问题恰恰适合层次分析模型，其中，食堂服务质量满意度作为目标层，餐饮价格、教学楼与食堂的距离、宿舍与食堂的距离、食堂的服务态度、餐饮卫生程度、餐饮口味、食堂餐厅的容量作为准则层，三个食堂作为方案层。

11.6　模型的建立与求解

针对食堂的综合性评价，利用层次分析法求解。

层次分析法（The Analytic Hierarchy Process，简称 AHP）是将与决策总是有关的元素分解成目标、准则和方案等层次，在此基础上进行定性和定量分析的决策方法。该方法是美国运筹学家匹兹堡大学教授萨蒂于上世纪 70 年代初，为美国国防部研究“根据各个工业部门对国家福利的贡献大小而进行电力分配”课题时，应用网络系统理论和多目标综合评价方法，提出的一种层次权重决策分析方法。这种方法的特点是在对复杂的决策问题的本质、影响因素及其内在关系等进行深入分析的基础上，利用较少的定量信息使决策的思维过程数学化，从而为多目标、多准则或无结构特性的复杂决策问题提供简便的决策方法，尤其适合于对决策结果难于直接准确计量的场合。

11.6.1　建立层次分析模型

对于食堂服务质量的综合评价，建立了一个层次分析模型。该模型的层次包括：

目标层——食堂服务质量量度指标；

准则层——餐饮价格、教学楼与食堂的距离、宿舍与食堂的距离、食堂的服务态度、餐饮卫生程度、餐饮口味及食堂餐厅的容量；

方案层——P_1 的服务质量、P_2 的服务质量、P_3 的服务质量。

其层次结构如图 11-1 所示。

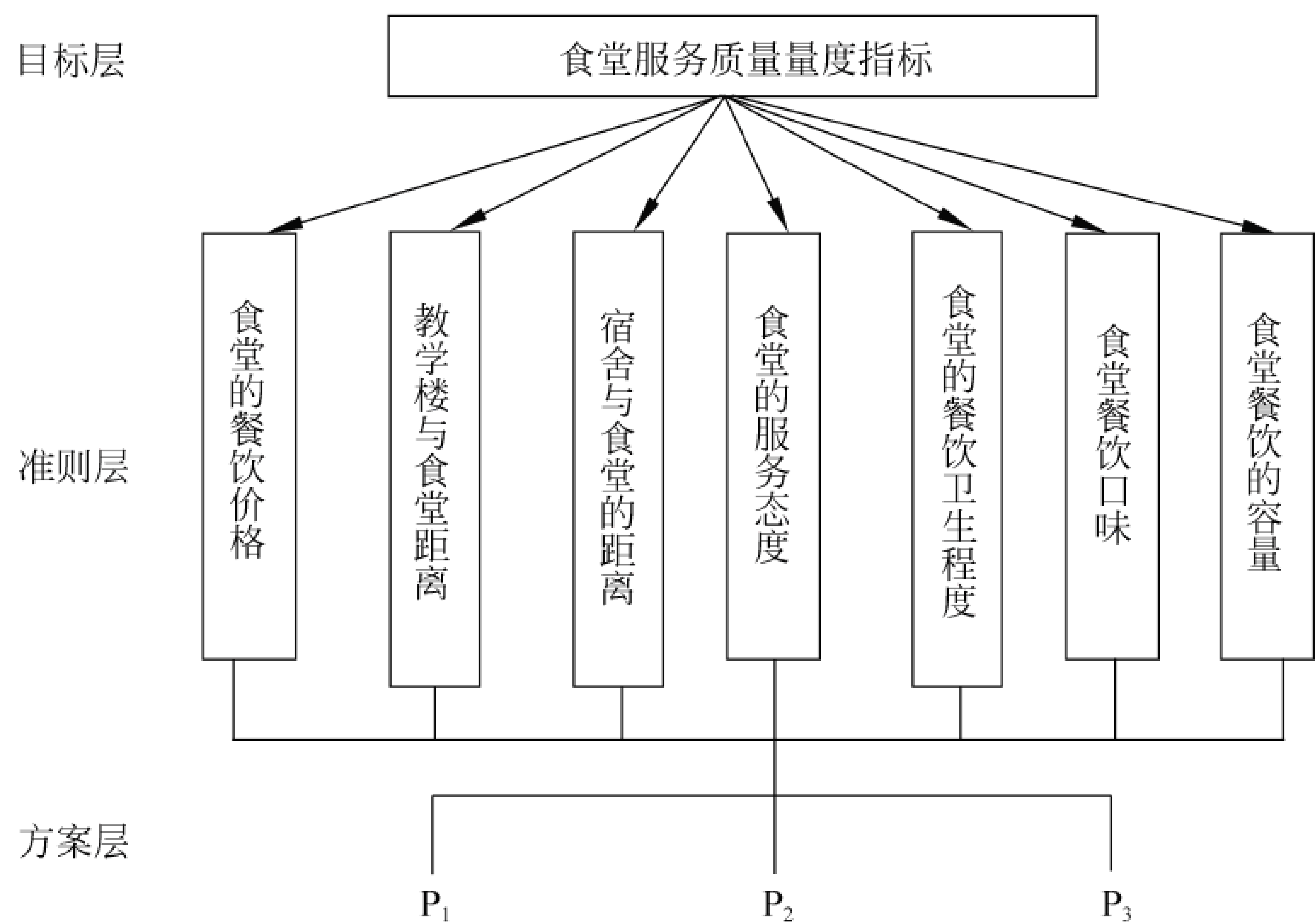


图 11-1　层次结构

11.6.2　构造成对比较矩阵

利用层次分析法（The Analytic Hierarchy Process），以 1～9 比较法为依据，构造标准如表 11-1 所示。

表 11-1　1~9 尺度 a_{ij} 的含义

尺度 a_{ij}	含义
1	C_i 与 C_j 的影响相同
3	C_i 比 C_j 的影响稍强
5	C_i 比 C_j 的影响强
7	C_i 比 C_j 的影响明显的强
9	C_i 比 C_j 的影响绝对的强
2,4,6,8	C_i 与 C_j 的影响之比在上述两个相邻的等级之间
$1,1/2,\cdots,1/9$	C_i 与 C_j 的影响之比为上面 a_{ij} 的互反数

构造准则层各元素之间、方案层对于准则层各元素的成对比较矩阵共 6 个。

餐饮价格占另外六个因素的权重，如下。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 8 \\ 1/3 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 1/5 & 1/3 & 1/2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1/5 & 1/3 & 1/2 & 1 & 2 & 3 \\ 1/7 & 1/6 & 1/5 & 1/3 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/8 & 1/7 & 1/5 & 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

餐饮价格在三个食堂所占比重：

$$B_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 2\\ 1/3 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

学校教学楼与三个食堂的相对距离如下：

$$B_2=\begin{bmatrix}1 & 5 & 1/2\\ 1/5 & 1 & 1/5\\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

学生宿舍与三个食堂的相对距离远近如下：

$$B_3=\begin{bmatrix}1 & 1/8 & 1/6\\ 8 & 1 & 2\\ 6 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

三个食堂的相对服务态度如下：

$$B_4=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1/4\\ 1/3 & 1 & 2\\ 4 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

三个食堂餐饮相对卫生程度分布关系为：

$$B_5=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 2 & 1 & 1/2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

三个食堂餐饮口味相对比例关系如下：

$$B_6=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ 1/5 & 1 & 1/2\\ 1/3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

三个食堂餐厅的容量大致相对比例如下：

$$B_7=\begin{bmatrix}1 & 4 & 8\\ 1/4 & 1 & 5\\ 1/8 & 1/5 & 1\end{bmatrix}$$

对于每一个成对比较矩阵计算最大特征根及对应的权向量，利用 MATLAB 依次求得矩阵 $A,B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7$ 的最大特征根和特征向量如下所示。

求矩阵的最大特征根和特征向量 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
%餐饮价格占另外六个因素的权重 A
A=[1    3    2    5    4    7    8
0.33333 1    2    3    5    6    7
0.5 0.5 1    2    3    5    5
0.2 0.33333 0.5 1    2    3    4
0.25    0.2 0.33333 0.5 1    2    3
0.14286 0.16667 0.2 0.33333 0.5 1    2
0.125   0.14286 0.2 0.25    0.33333 0.5 1];
[v,d]=eig(A);          %求特征值和特征向量
d(1,1)                 %特征值
```

```
v(:,1)                  %特征向量

ans =
    7.2531

ans =
   -0.7565
   -0.4951
   -0.3398
   -0.1974
   -0.1343
   -0.0814
   -0.0589
```

可得 A 的最大特征根 $\lambda_0 = 7.253$，对应的特征向量为：

$$w = [-0.757 \quad -0.495 \quad -0.340 \quad -0.197 \quad -0.134 \quad -0.0814 \quad -0.059]^T$$

求矩阵 B_1 的最大特征根和特征向量 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
%餐饮价格在三个食堂所占比重
B1=[1   2   3
0.5 1   2
0.33333 0.5 1];
[v,d]=eig(B1) ;         %求特征值和特征向量
d(1,1)                  %特征值
v(:,1)                  %特征向量

ans =
    3.0092

ans =
    0.8468
    0.4660
    0.2565
```

B_1 的最大特征根 $\lambda_1 = 3.009$，对应的特征向量为：

$$w_1 = [-0.847 \quad -0.466 \quad -0.257]^T$$

求矩阵 B_2 的最大特征根和特征向量 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
%学校教学楼与三个食堂的相对距离 B2 矩阵
B2=[1   5   0.5
0.2 1   0.2
2   5   1];
[v,d]=eig(B2) ;             %求特征值和特征向量
d(1,1)                      %特征值
v(:,1)                      %特征向量

ans =
    3.0536

ans =
    0.5283
    0.1331
    0.8386
```

B_2 的最大特征根 $\lambda_2 = 3.054$，对应的特征向量为：

$$w_2 = \begin{bmatrix}0.528 & 0.133 & 0.839\end{bmatrix}^T$$

求矩阵 B_3 的最大特征根和特征向量 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
%学生宿舍与三个食堂的相对距离远近
B3=[1   0.125   0.16667
8   1   2
6   0.5 1];
[v,d]=eig(B3) ;      %求特征值和特征向量
d(1,1)               %特征值
v(:,1)               %特征向量

ans =
    3.0183

ans =
    0.0943
    0.8640
    0.4945
```

B_3 的最大特征根 $\lambda_3 = 3.018$，对应的特征向量为：

$$w_3 = \begin{bmatrix}0.094 & 0.864 & 0.495\end{bmatrix}^T$$

B_4 的最大特征根 $\lambda_4 = 4.231$，对应的特征向量为：

$$w_4 = \begin{bmatrix}-0.510 & -0.490 & -0.707\end{bmatrix}^T$$

求矩阵 B_4 的最大特征根和特征向量 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
%三个食堂的相对服务态度
B4=[1   3   0.25
0.33333 1   2
4   0.5 1];
[v,d]=eig(B4) ;      %求特征值和特征向量
d(1,1)               %特征值
v(:,1)               %特征向量

ans =
    4.2312

ans =
   -0.5098
   -0.4902
   -0.7070
```

B_5 的最大特征根 $\lambda_5 = 3.009$，对应的特征向量为：

$$w_5 = \begin{bmatrix}-0.257 & -0.466 & -0.847\end{bmatrix}^T$$

求矩阵 B_5 的最大特征根和特征向量 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
%三个食堂餐饮相对卫生程度分布关系
B5=[1   0.5 0.33333
2   1   0.5
3   2   1];
[v,d]=eig(B5) ;
d(1,1)        %特征值
```

```
v(:,1)      %特征向量

ans =
   3.0092

ans =
   0.2565
   0.4660
   0.8468
```

B_6 的最大特征根 $\lambda_6 = 3.004$，对应的特征向量为：

$$w_6 = \left[-0.928 \quad -0.175 \quad -0.329\right]^T$$

求矩阵 B_6 的最大特征根和特征向量 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
%三个食堂餐饮口味相对比例关系
B6=[1   5   3
0.2 1   0.5
0.33333 2   1];
[v,d]=eig(B6) ;          %求特征值和特征向量
d(1,1)                   %特征值
v(:,1)                   %特征向量

ans =
   3.0037

ans =
   0.9281
   0.1747
   0.3288
```

B_7 的最大特征根 $\lambda_7 = 3.094$，对应的特征向量为：

$$w_7 = \left[0.943 \quad 0.320 \quad 0.087\right]^T$$

求矩阵 B_7 的最大特征根和特征向量 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
%三个食堂餐厅的容量大致相对比例
B7=[1   4   8
0.25    1   5
0.125   0.2 1];
[v,d]=eig(B7) ;      %求特征值和特征向量
d(1,1)               %特征值
v(:,1)               %特征向量

ans =
   3.0940

ans =
   0.9434
   0.3201
   0.0869
```

其中 $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7$ 由于已被归一化，所以均可作为准则层各项对目标层的权向量。

11.6.3　一致性检验

一致性指标 $C_I=\dfrac{\lambda-n}{n-1}$（其中 λ 为待检验一致性矩阵的最大特征值，n 为该矩阵的阶数）。当 $C_I=0$ 时，该矩阵为一致阵。然而，在实际情况下，$C_I=0$ 是很难实现的，于是，Saaty 又引入随机一致性指标 R_I，对于不同的 n，R_I 不同，如表 11-2 所示。

表 11-2　随机一致性指标 R_I 的数值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R_I	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

对于 $n\geqslant 3$ 的成对比较矩阵，将它的一致性指标 C_I 与同阶的随机一致性指标 R_I 之比称为一致性比例 C_R。当 $C_R=\dfrac{C_I}{R_I}<0.1$ 时，认为矩阵的不一致程度在允许的范围内，可用其特征向量作为权向量。

利用上述方法，求得 $A,B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7$ 的 C_I 值依次为 0.042167、-0.66517、-0.65767、-0.66367、-0.4615、-0.66517、-0.666、-0.651。

查表计算得它们的 C_R 值依次为 0.031944、-0.50391、-0.49823、-0.50278、-0.34962、-0.50391、-0.50455、-0.49318，显然，C_R 值均小于 0.1，那么 $A,B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7$ 的不一致程度都在允许的范围内。

11.6.4　计算组合权向量并做组合一致性检验

由准则层各项对目标层（即食堂综合评价）的权向量 $w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6,w_7$ 已求出，那么构造出矩阵：

$$W=\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \end{bmatrix}$$

则所求决策层（即食堂层）组合权向量为 $w^{(3)}=Ww$，那么：

$$W=\begin{bmatrix} -0.847 & 0.528 & 0.093 & -0.510 & -0.257 & -0.928 & 0.943 \\ -0.466 & 0.133 & 0.864 & -0.490 & -0.466 & -0.175 & 0.320 \\ -0.257 & 0.839 & 0.495 & -0.707 & -0.847 & -0.329 & 0.087 \end{bmatrix}$$

$$w=\begin{bmatrix} -0.757 & -0.495 & -0.340 & -0.197 & -0.134 & -0.0814 & -0.059 \end{bmatrix}^T$$

W 通过了一致性检验。MATLAB 程序如下：

```
n=7;   %矩阵的阶数
Y=[7.2531,3.0092,3.0536,3.0183,4.2312,3.0092,3.0037,3.0940];
CI=(Y-n)/(n-1);    %一致性指标
CR=(CI/1.32);    %一致性比例
%组合权向量
W=[-0.847  0.528  0.093  -0.51  -0.257 -0.928 0.943
-0.466  0.133  0.864  -0.49  -0.466 -0.175 0.32
-0.257  0.839  0.495  -0.707  -0.847 0.329  0.087];
w=[-0.757
-0.495
```

```
-0.34
-0.197
-0.134
-0.0814
-0.059];
w3=W*w     %综合打分
w3 =

   0.5030
   0.1475
  -0.1682
```

整理结果如下：

$$w^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.503 \\ 0.148 \\ -0.168 \end{bmatrix}$$

11.7 结果分析

由 $P_1 = 0.503$ 、 $P_2 = 0.148$ 和 $P_3 = -0.168$ 可知，食堂一的服务质量最好，食堂二的服务质量其次，食堂三的服务质量最差且食堂三的服务质量权重为负值，可以预见，食堂三如果不改变现有的服务制度，有可能因师生的心理选择，而导致其关闭。

因为顾客满意是顾客对某项服务的消费经验的情感反应，服务质量是企业提供的服务满足目标顾客需求的程度，二者之间存在密切关系。对于服务营销中的顾客满意与服务质量之间存在的关系，许多营销专家部进行了深入研究。但由于研究角度的不同（有的是从研究顾客满意的角度出发，有的是从研究服务的角度出发），得出的研究结果往往不同。

美国学者科洛宁和泰勒认为，在服务质量和顾客满意之间的因果关系中，感知的服务质量好坏导致了顾客满意度的高低，顾客满意对购买动机存在重大影响，比服务质量对于购买动机影响更强烈、更持久。

派拉锁拉曼等三人则认为顾客满意是对服务中特定事物的评价，而感知服务质量是对整个服务的全面评价。由于全面评价是由一个个特定事物的评价累积而成，因此，顾客满意的高低导致了服务质量好坏。

如果我们从服务过程的各个特定事物角度对服务质量和顾客满意的关系进行分析，不难发现上述截然不同的两个观点实际上描述的恰恰是一个问题的两部分。我们将一个服务过程看作是由不同的特定事物组成，每一特定事物都是服务过程中的一个环节。顾客在被服务的过程中，每一特定事物给他的感知服务质量与顾客对价格的评价一起决定了它对这一环节的满意程度，即克罗宁所说的感知服务质量好坏导致了顾客满意度的高低。当服务结束，顾客对服务过程中的每一个特定事物都有了满意度方面的判断之后，就形成了顾客对整个服务质量的评价，这就是派拉锁拉曼等三人所说的顾客满意度的高低导致服务质量的好坏。前者的服务质量好坏是指特定事物的感知服务质量，后者是指整个服务的感知质量。而且全面服务质量最终导致全面顾客满意。

在经历了几次满意的购买和消费之后，顾客的忠诚度就会随之提高。施乐公司等对其顾客进行过一次调查，使用的是 5 分制，从“非常不满意”到“非常满意”。调查发现“非

常满意”的顾客再次购买可能性是“满意”顾客的六倍。而顾客忠诚度增加 5%，利润可以增长 25%～85%。顾客满意与顾客忠诚度之间存在以下关系，如图 11-2 所示。

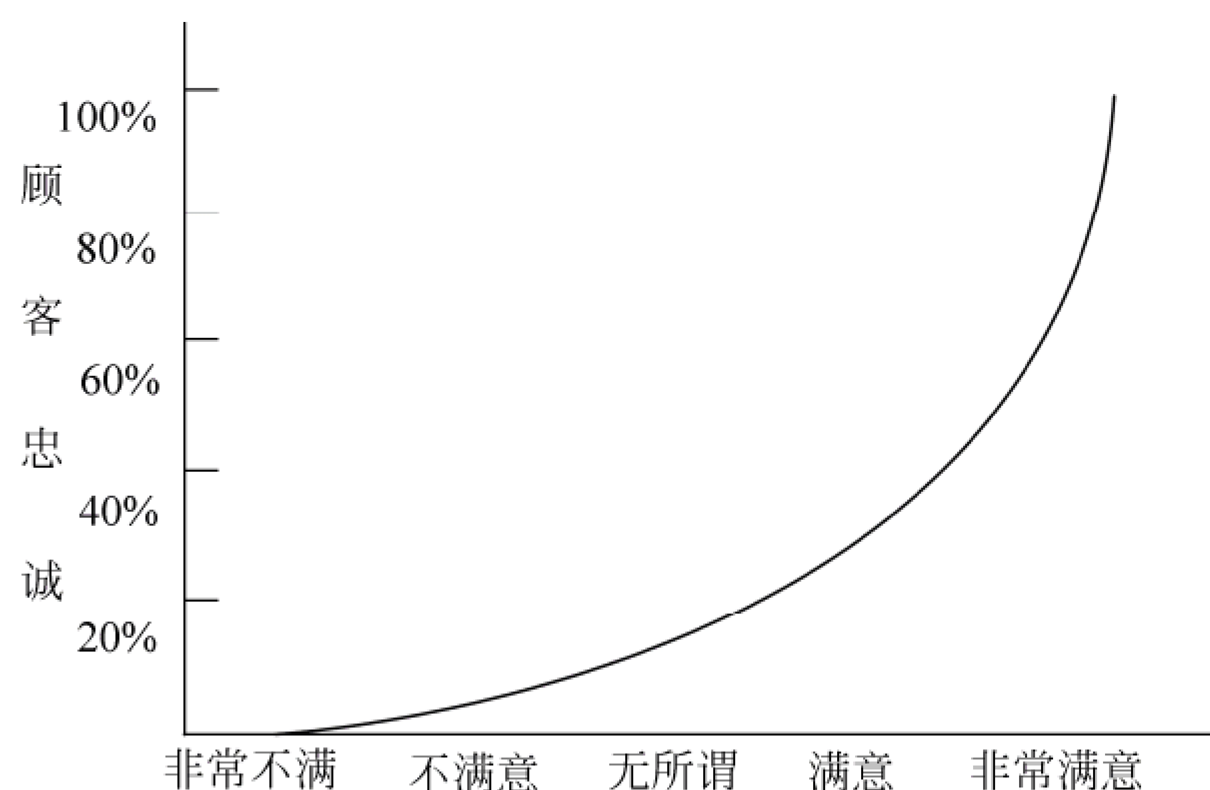


图 11-2　顾客满意与顾客忠诚的关系

由以上的数据分析可知，师生在食堂就餐的服务质量的满意度依次为食堂一、食堂二、食堂三。

11.8　模型改进推广

在先不考虑节假日的前提下，设：

（1）同一天内早餐、午餐和晚餐时间分别为 t_1 和 t_2 和 t_3；

（2）学校每天供需就餐的 15000 人，其总人数设为 N_0；

（3）每天早餐、午餐和晚餐食堂分别提前准备了 N_1、N_2、N_3 人的餐饮；

（4）每天早餐、午餐和晚餐在食堂就餐的人数分别为 m_1、m_2、m_3；

（5）每天早餐、午餐和晚餐，因不愿等候、饭菜不合口等原因而离开食堂的人数分别为 n_1、n_2、n_3；

（6）师生在食堂就餐的服务质量的满意度为 T_1；

（7）食堂出于对自身营业利润的考虑，其对就餐的服务质量的满意度为 T_2。

就学校学生食堂而言，易知：

$$\begin{cases} t_1 = 7:00 - -8:00 \\ t_2 = 11:00 - -13:00 \\ t_3 = 17:00 - -18:30 \end{cases}$$

学校学生食堂，每天供约 15000 人餐饮，可知：

$$N_1 + N_2 + N_3 \leqslant N_0$$

为了保证每个到食堂的师生就餐，应满足：

$$m_i + n_i \leqslant N_i \quad (i = 1 \cdots 3)$$

师生在食堂就餐的服务质量的满意度 T_1，可表示为在一天内的 t_1、t_2、t_3 就餐人数所占比例的乘积，表示为：

$$T_1=\prod_{i=1}^{3}\frac{m_i}{m_i+n_i}=\frac{m_1}{m_1+n_1}\cdot\frac{m_2}{m_2+n_2}\cdot\frac{m_3}{m_3+n_3}$$

食堂在饭菜准备方面，食堂出于对师生浪费现象、自身营业利润的考虑，则其服务质量的满意度 T_2 亦可表示为就餐人数占食堂预计人数的比例的乘积，故为：

$$T_2=\prod_{i=1}^{3}\frac{m_i}{N_i}=\frac{m_1}{N_1}\cdot\frac{m_2}{N_2}\cdot\frac{m_3}{N_3}$$

就师生在食堂就餐的服务质量的满意度而言：

$$T_1>T_2$$

且 T_2 应保证在一定的范围内变化，以抑制浪费现象。

下面采用相对标准，定义服务质量的相对不公平标准公式：

若 $T_1>T_2$，则称 $\frac{T_1-T_2}{T_2}=\frac{T_1}{T_2}-1$ 为对食堂自身服务质量的相对不公平值，记为 ξ_{ST}；

若 $T_1<T_2$，则称 $\frac{T_2-T_1}{T_1}=\frac{T_2}{T_1}-1$ 为对师生的满意度的相对不公平值，记为 ξ_{SS}。

由定义有，对某方的不公平值越小，某方在食堂餐饮中越满意，因此可以使用不公平值尽量小的方案来减少不公平性。

若满足师生在食堂就餐的服务质量的满意度，则：

$$\xi_{SS}<\xi_{ST}$$

若满足食堂自身在就餐的服务质量的满意度，则：

$$\xi_{SS}>\xi_{ST}$$

建立师生在食堂就餐的服务质量的满意度模型：

$$\begin{cases}\max\quad T=\alpha T_1+\beta T_2=\alpha\prod_{i=1}^{3}\frac{m_i}{m_i+n_i}+\beta\prod_{I=1}^{3}\frac{m_i}{N_i}\quad(i=1\cdots3)\\ s.t\\ T_1>T_2\\ \alpha+\beta=1\\ N_1+N_2+N_3\leqslant N_0\\ m_i+n_i\leqslant N_i\quad(i=1\cdots3)\\ \alpha、\beta、T_1、T_2\geqslant 0\\ m_i、n_i、N_i\in Z^+\quad(i=1\cdots3)\end{cases}$$

第12章　城市居民食品分类及零售价格预测

城市居民食品分类及零售价格预测问题，分为数据分类和预测问题。对于分类而言，包括传统的分类和算法分类，其中基于欧式距离的分类，为较常见算法；对于数据预测，考虑到食品数据变化情况为经济性问题，数据变化无规律，常规的算法很难进行数据预测。本章采用马尔可夫链模型和时间序列预测模型对食品未来两个月进行分类和零售价格的预测。其中马尔可夫链模型较好的适应经济型问题，将数据变化趋势进行分类统计，从而得出相应下一阶段数据可能出现的上升或者下降趋势。

学习目标：

（1）学习掌握聚类分析方法；

（2）学习掌握马尔可夫链方法；

（3）学习掌握时间序列预测数据处理方法等。

12.1　问题的提出

消费者物价指数（Consumer Price Index，CPI）也称消费价格指数，是反映与居民生活有关的产品及劳务价格统计出来的物价变动指标。通常作为观察通货膨胀水平的重要指标，是与人民生活密切相关的参考指标。

城市居民食品零售价格是消费者物价指数的重要组成部分。权威机构研究认为粮食生产、流通成本上涨一定会带动农产品价格总体上涨，特别是2011年异常的气候情况，导致生产成本大量增加，国际粮价对国内供需的影响，食品价格未来可能发生上涨。刚公布 3月份的CPI增幅达5.4%，创32个月来的新高，这使得年内的通货膨胀压力正在增强。附录1（见程序文档）是2010-3-5～2011-3-25的城市居民食品零售价格数据。

试解决下面两个问题：

（1）根据附录1建立数学模型，将所涉及食品适当分类，并分析每类食品的特点；

（2）根据附录1建立数学模型，预测2011年4、5月的城市居民食品零售价格走势。

（注：附录1见书中程序文档。）

12.2　摘　　要

俗话说：衣食住行，食品是城市居民生活的重要元素，食品的零售价格与居民的生活

是息息相关的，同时通货膨胀也是食品价格波动的主要原因。本文针对一、二两问题分别根据聚类分析模型、马尔可夫链模型和时间序列预测模型对食品进行分类和零售价格的预测。

问题一中，要求根据附录 1 建立数学模型，将所涉及食品适当分类，由此分析每类食品的特点。分析了两种方法，分别是根据聚类分析法用 SPSS 分类分析和根据食品的属性分类，再用 MATLAB 软件画出了价格-时间图和增长率-时间图，并将其增长率划分为快速上涨、上涨、基本稳定、下降、快速下降 5 类。对两种方法的图形进行了观察，发现属性分类更符合实际，即将食品分为食用油类、肉类、鱼类、蔬菜类、水果类、调味品类和奶类 7 大类。最后给出了一个关于食品价格增长率特征的表，该表即为每类食品的特点。

问题二中，要求根据附录 1 建立数学模型，预测 2011 年 4、5 月的城市居民食品零售价格走势。文中使用灰色关联分析方法分析城市食品零售价格指数对 CPI 的影响，并给出了社会八大产业消费价格指数之间的关联度，对城市居民消费价格指数影响的大小分析，得出食品价格的周期波动性导致关联度偏低，并且在CPI指标体系中，食品不属于核心CPI。再者，分析了粮食、肉类及其制品、鲜菜类、鲜果类、流通中现金、储蓄存款、农业生产资料价格指数对食品消费价格指数的影响，可知，近年来我国食品消费价格指数主要与当年粮食、肉禽及其制品和水产品的价格有关，关联系数均超过了 0.9，粮食的关联系数更是超过了 1。但考虑到食品的零售价格指数受市场上众多不确定因素共同影响，因而其变化也有不确定性，故不能采用一般的曲线拟合的方法来预测 4、5 月份的食品价格。此题亦采用了三种模型进行了求解，分别是马尔可夫链模型、时间序列指数平滑预测法和时间序列线性二次移动平均法预测法模型，同时用 MATLAB 软件进行了数据分析，得出了 42 种食品 2011-4-5～2011-5-25 的价格增幅的数据和 42 种食品在 2011-4-5～2011-5-25 的价格。

关键字：SPSS 聚类分析、食品属性、价格增长率、灰色关联分析、时间序列、指数平滑预测法、线性二次移动平均法和马尔可夫链。

12.3　问题的分析

本章主要讨论的核心问题为价格变动情况，对于问题一，就价格变动的特点来看有两种方法对其价格变化的特性进行描述。

（1）数值描述法：直接用价格增长为描述对象，绘制价格-时间曲线；

（2）增长率描述法：计算同种食品相邻时间点的价格增长率，绘制不同食品的增长率-时间曲线。

数值描述法可以直观地描述价格的变动趋势，但是由于各种食品的价格相差较大且数据量很大，致使无法体现食品价格的变化的整体规律。

增长率描述法依次计算相邻时期各食品价格的增长率，虽不能直观地反映价格值的变化，但可以直观地反映价格水平的变化。

对于问题二，由于近年来，我国食品的零售价格指数受自然因素和市场因素的影响逐年变大，不过在国家宏观调控和市场的自动调控下，其价格指数也在一定范围内稳定变化，但是由于市场的随机变化性，商品的零售价格指数变化受市场上众多不确定因素共同影响，

因而其变化也有不确定性，所以简单地根据其价格变化趋势对其价格进行拟合或者对其增长率进行拟合，以此来预测后面两个月的价格变化趋势，就不能正确反映市场随机性和影响因素的不确定性。因而必须建立一个适当的模型来根据现在的状态，对未来状态的随机性概率进行预测。此题我们采用了两种模型进行了求解，分别是马尔可夫链模型、时间序列指数平滑预测法和时间序列线性二次移动平均法预测法模型，同时用 MATLAB 软件进行了数据分析，得出了 42 种食品 2011-4-5～2011-5-25 的价格增幅的数据和 42 种食品在 2011-4-5～2011-5-25 的价格。

12.4　问　题　一

12.4.1　基本假设

（1）附录 1 中的 2010-3-5～2011-3-25 的城市居民食品零售价格数据基本属实；

（2）增长率在$(\geqslant 0.03)$区间内，食品价格快速上升；增长率在$(0,0.03)$区间内，为价格缓慢上升；增长率为 0，食品价格相对不变；增长率在$(-0.03,0)$区间内，价格变动为缓慢下降；增长率在$(\leqslant -0.03)$内，食品价格变动为快速下降。

12.4.2　符号说明

x_i　$(i=1\cdots 42)$，表示题中依次相对应的食品。

（注：下文中有时直接用 1…42 依次表示题中给定的 42 种食品。）

12.4.3　问题的分析与求解

对题目中 42 种食品进行分类，x_i　$(i=1\cdots 42)$依次表示题中相应的食品，选择了聚类分析的办法。

SPSS 聚类分析的主要步骤如下。

Step 1：首先对数据进行分析，由于题中的 42 种食品中有三种量纲，在此，先不考虑花生油、大豆调和油和酱油、醋，从而横向保证了单位的统一，无需无量纲标准化，可直接对样品进行聚类分析；

Step 2：计算不同变量之间的距离d_{ij}，根据需要选用欧氏(Euclidean)距离公式，如下所示。

$$d_{ij}=\left[\sum_{k=1}^{38}\left(x_{ik}-x_{jk}\right)^2\right]^{1/2}$$

得到的该距离矩阵是实对称矩阵，其主对角线元素为零。

Step 3：根据需要选用 Ward 最小方差法的逐步归类方法进行聚类。

经过 SPSS 聚类分析后得到图如图 12-1 所示。

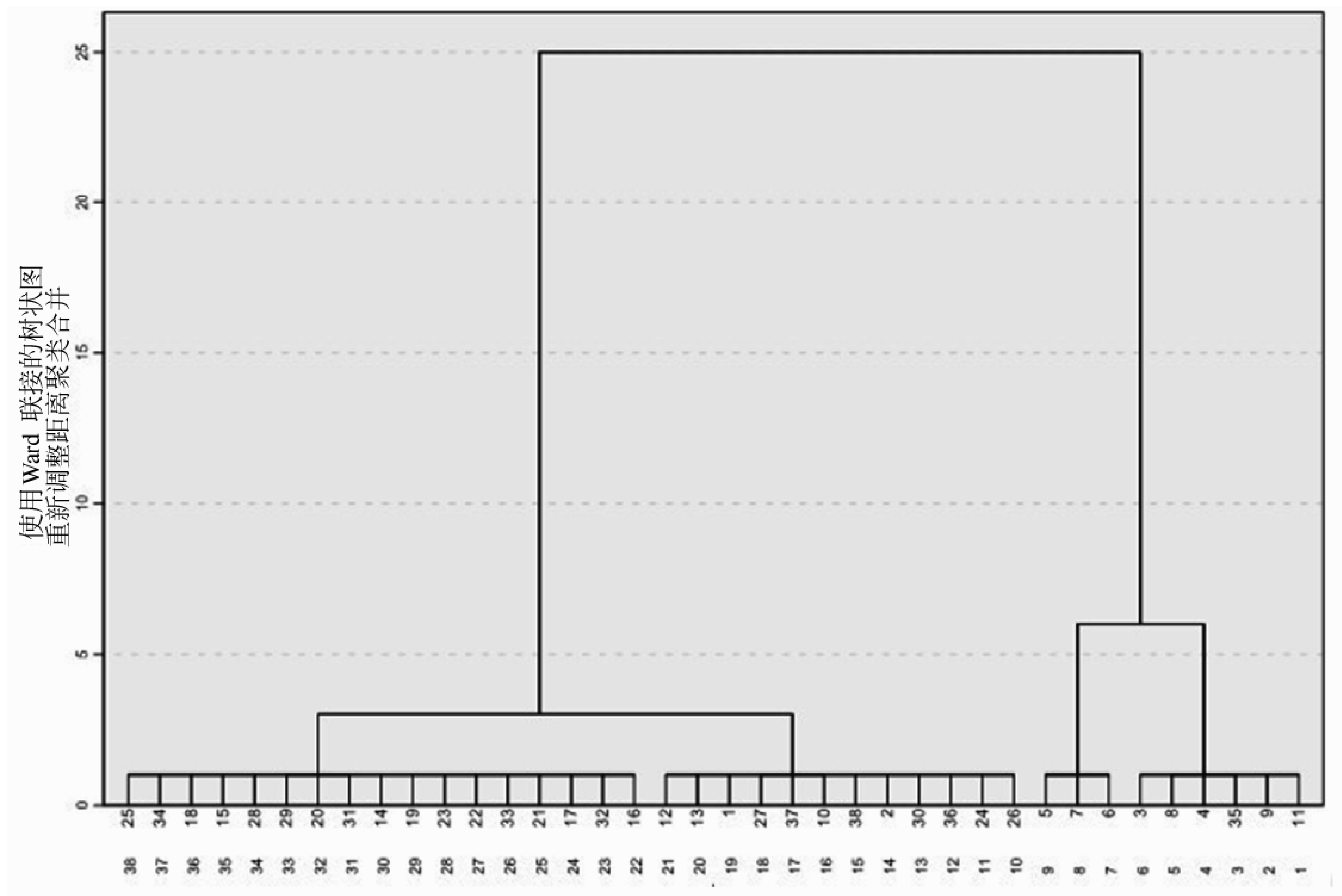


图 12-1　SPSS 聚类图

从图 12-1 中得到，聚类分析的 38 种食品可分为四类，再加上未聚类的两类，总共可分为如下的六类，具体的食品种类如图 12-2 所示。

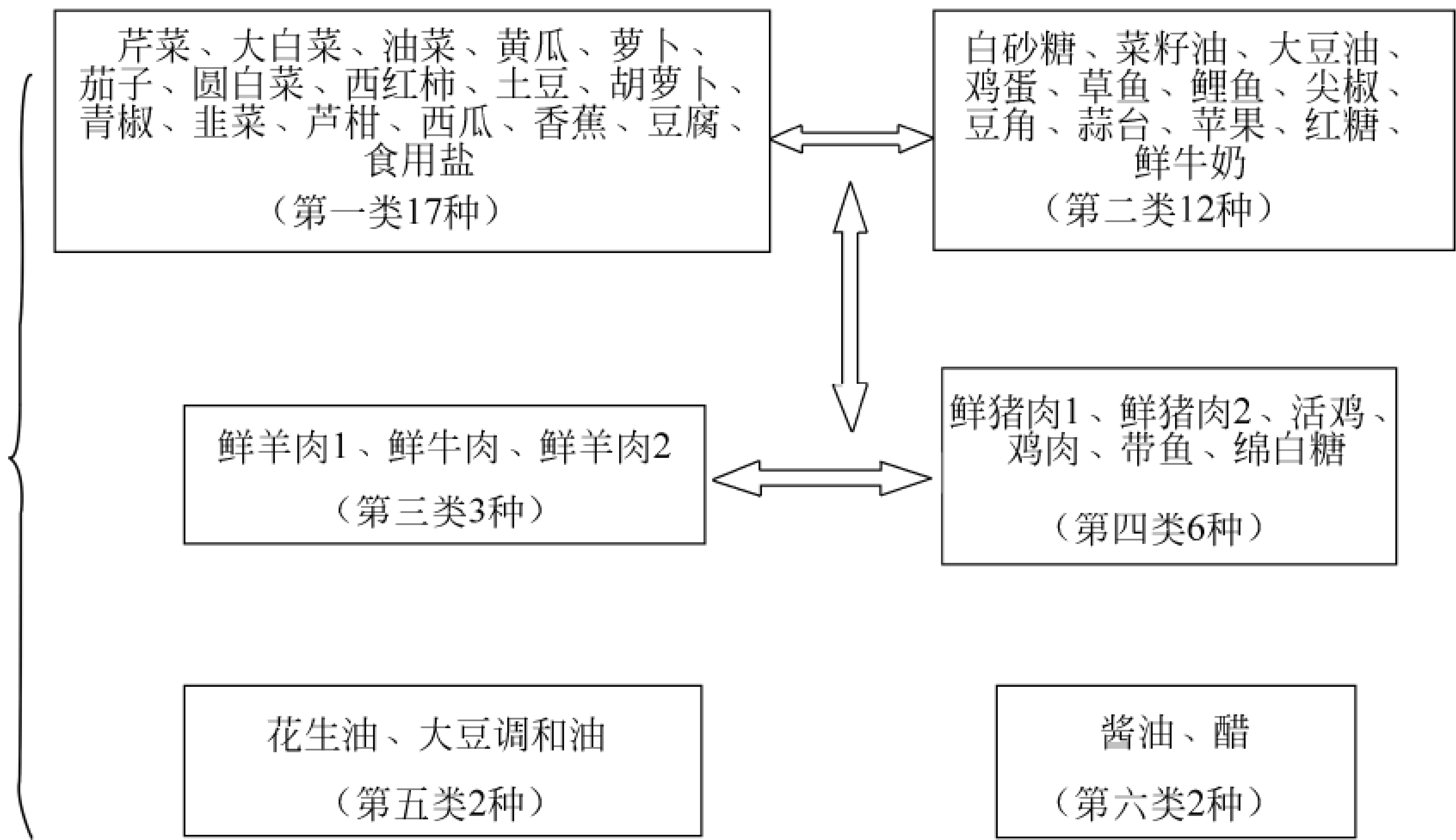


图 12-2　分类示意图

如图 12-2 所示，聚类分析的 38 种食品可分为四类，再加上未聚类的两类，总共可分为如下的六类，具体的食品种类如下：

第一类共 17 种，芹菜、大白菜、油菜、黄瓜、萝卜、茄子、圆白菜、西红柿、土豆、胡萝卜、青椒、韭菜、芦柑、西瓜、香蕉、豆腐、食用盐；

第二类共 12 种，白砂糖、菜籽油、大豆油、鸡蛋、草鱼、鲤鱼、尖椒、豆角、蒜苔、苹果、红糖、鲜牛奶；

第三类共 3 种，鲜羊肉 1、鲜羊肉 2、鲜牛肉；

第四类共 6 种，鲜猪肉 1、鲜猪肉 2、活鸡、鸡肉、带鱼、绵白糖；

第五类共 2 种，花生油、大豆调和油；

第六类共 2 种，酱油、醋。

采用系统聚类的算法进行食品数据聚类，聚类效果较好，基本符合实际情况。

12.4.4　食品的特点分析

上述运用 SPSS 的聚类分析，只是对各类食品的价格进行欧氏（Euclidean）距离的聚类，即各类食品价格之间的波动距离最小值的聚合。例如，第一类食品的价格变动范围为 1～3 元，第二类食品的价格变动范围为 3～6 元，第三类食品的价格变动范围为 15～17 元，第四类食品的价格变动范围为 7～12 元，第五类食品的价格变化范围为 50～120 元，第六类食品的价格变动范围为 3.5～5.5 元。该六类食品的价格变化范围虽然在一定的范围内，但是仍不能形象直观的反应各类食品的价格和价格增长率的变化情况，故接下来，我们对该六类进行图示分析，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
load('data.mat')              %加载数据
figure,
for i=1:17
    plot(x1,y4(:,i));         %画图
    hold on                   %图像保持句柄，在同一图形中画图
end
plot(x1,y4(:,7),'r','linewidth',2);
```

运行程序输出图形如图 12-3 所示。

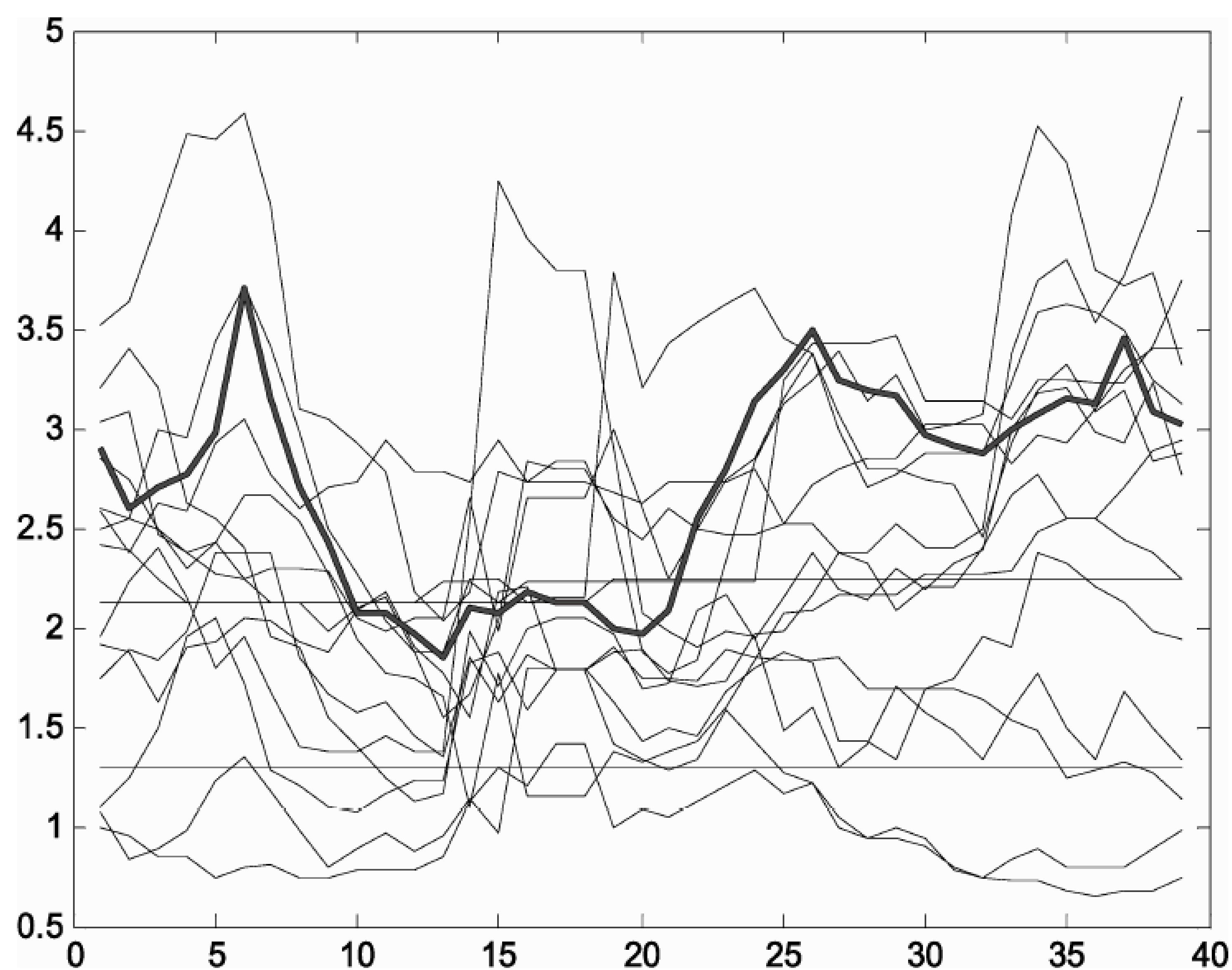


图 12-3　第一类价格变化图

相应的增长率 MATLAB 求解程序如下：

```
%求出各食品每两个相邻时间的价格的增长率
for j=1:42
     for i=1:38
         a(j,i)=(x(j,i+1)-x(j,i))/x(j,i);       %价格增长率
     end
end
%第一类的增长率
for i=2:39
     y44((i-1) ,:)=y4(i,:)-y4((i-1) ,:);        %增长差值
end
for i=1:38
     for j=1:17
         y444(i,j)=y44(i,j)/y4(i,j);            %增长率
     end
end
%第一类食品的增长率--时间曲线
figure
for i=1:17
     subplot(4,5,i);
     plot(x1(1:38,:),y444(:,i));
end
```

运行程序输出变化图如图 12-4 所示。

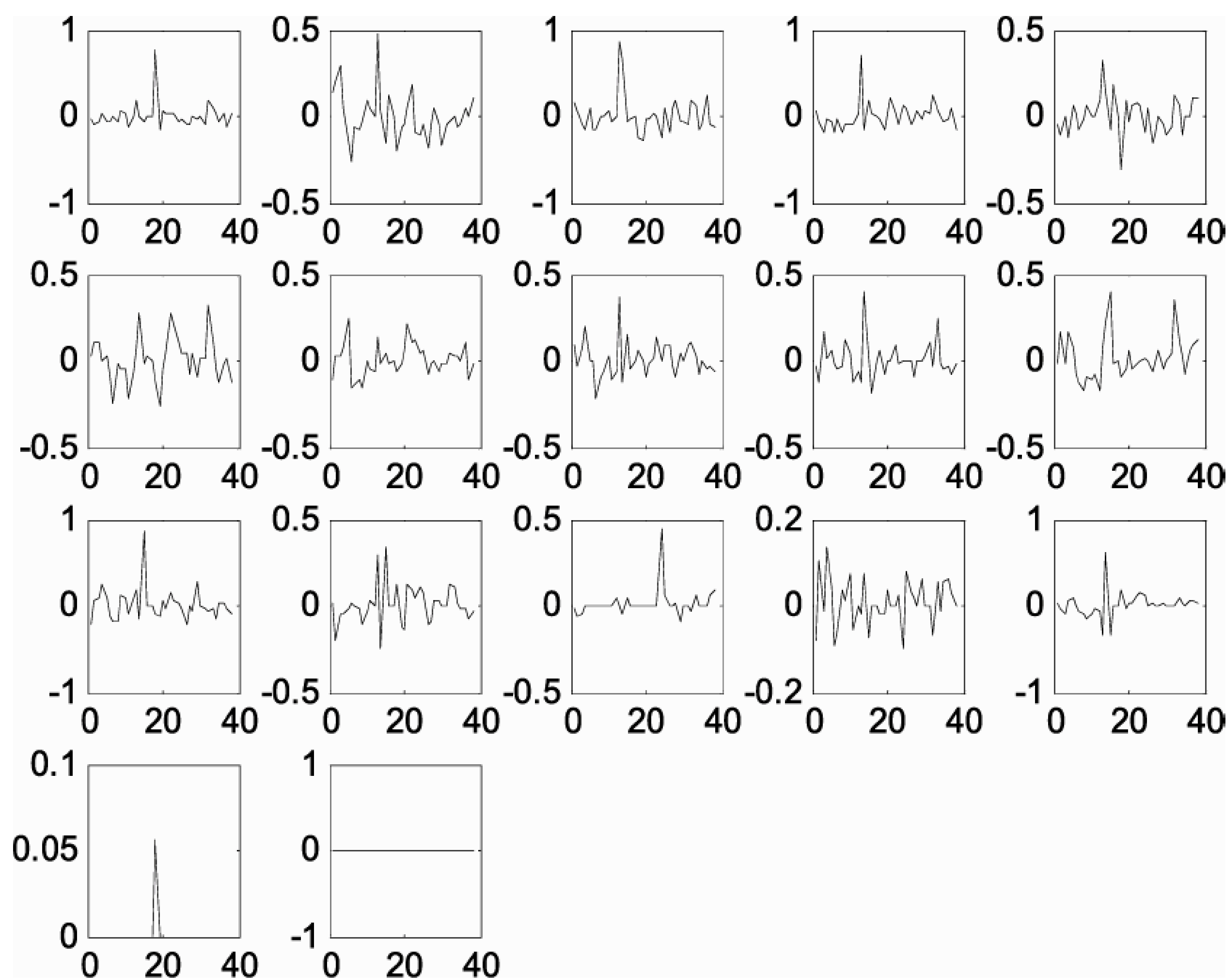


图 12-4　第一类食品增长率图

如图 12-3 和图 12-4 可知，该类食品以西红柿为中心代表，即该类其他食品价格紧靠西红柿的价格变化所得的欧氏（Euclidean）距离总和最小，西红柿的价格变动情况如图 12-3 中的粗线所示，价格按先增长后降低趋势变化。从价格增长率中可看出，芹菜、大白菜、油菜、黄瓜、萝卜、茄子、圆白菜、西红柿、土豆、胡萝卜、青椒、韭菜等（图 12-4 前

1-12 个小窗口）的价格增幅变化同步，随时间的变化而呈现明显的变化，芦柑、西瓜、豆腐、食用盐的增幅变化不明显，先保持稳定后增长，特别是食盐基本无任何变化。

分析第二类食品，MATLAB 程序如下：

```
%%第二类食品
close all
figure,
for i=1:12
    plot(x1,y3(:,i));  %画图
    hold on            %同一图形句柄下画图
end
plot(x1,y3(:,1),'r','linewidth',2);
```

运行程序输出图形如图 12-5 所示。

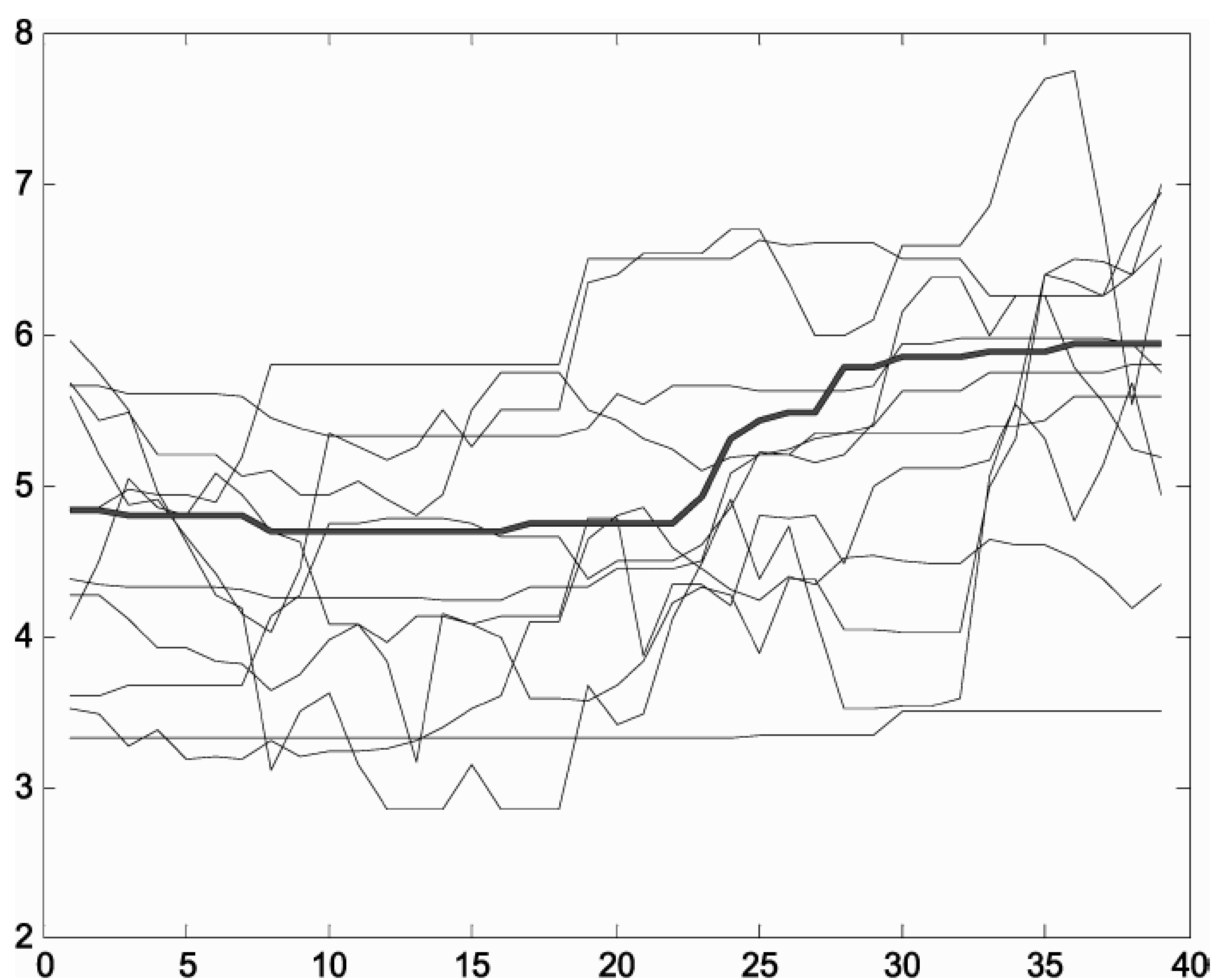


图 12-5　第二类食品价格趋势图

相应的增长率 MATLAB 求解程序如下：

```
%第二类的增长率
for i=2:39
     y33((i-1),:)=y3(i,:)-y3((i-1),:);      %增长差值
end
for i=1:38
     for j=1:12
          y333(i,j)=y33(i,j)/y3(i,j);       %增长率
     end
end
%第二类食品的增长率--时间曲线
figure,
for i=1:12
     subplot(3,4,i);                        %新建小窗口画图
     plot(x1(1:38,:),y333(:,i));            %画图
end
```

运行程序输出变化图如图 12-6 所示。

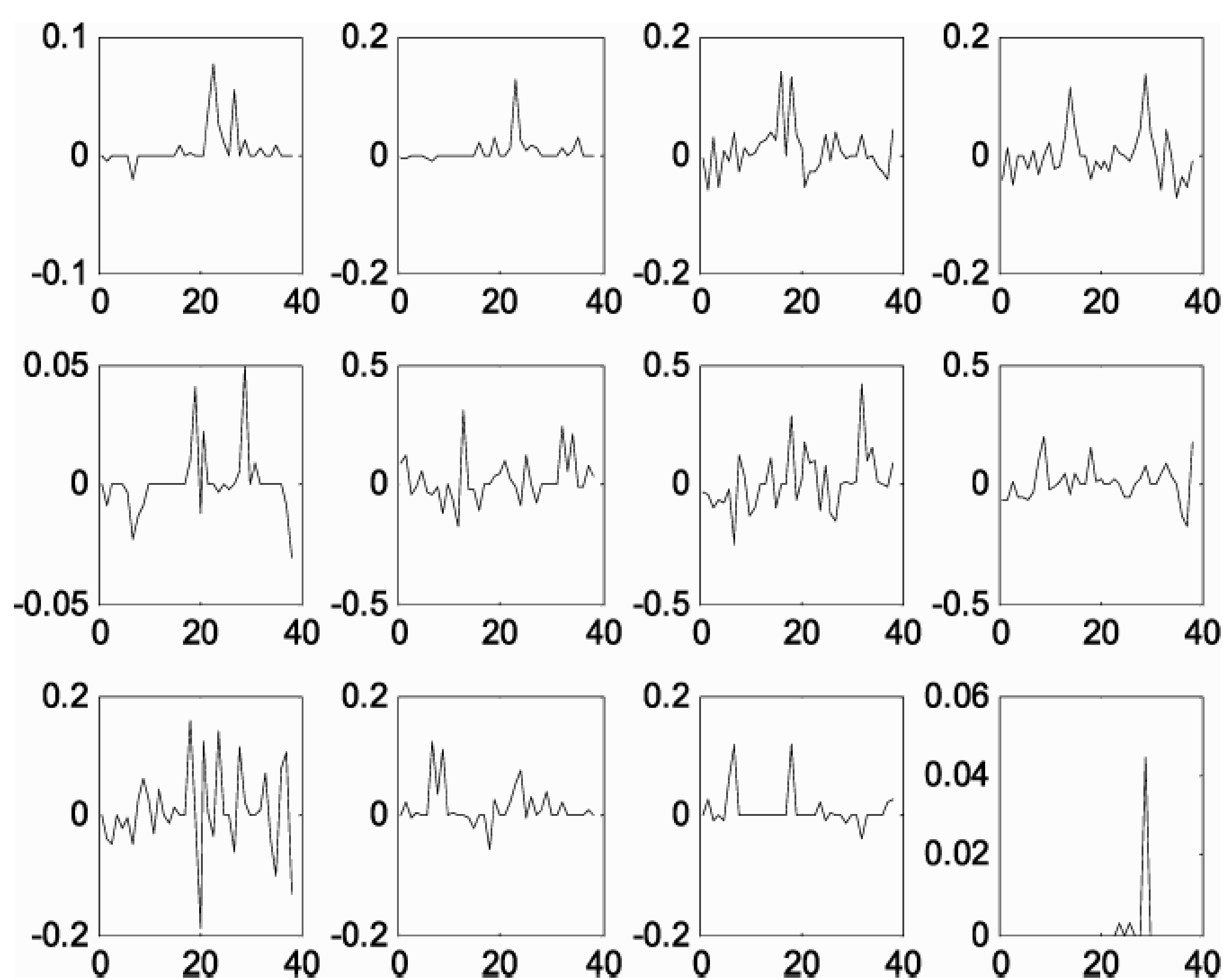


图 12-6　第二类食品增长率曲线

如图 12-6 所示，该类食品以红糖为代表。各食品的价格变化仍无规律，但从价格增长率图中看出，菜籽油、大豆油价格增幅情况相当，红糖、白砂糖价格变化仍相似，从该大类的价格增幅图得出，各种食品的价格增长率变化迥异。

分析第三类食品，MATLAB 程序如下：

```
%%第三类食品
close all
figure,
for i=1:3
     plot(x1,y2(:,i));  %画图
     hold on        %同一画图句柄下画图
end
plot(x1,y2(:,3),'r','linewidth',2);
```

运行程序输出图形如图 12-7 所示。

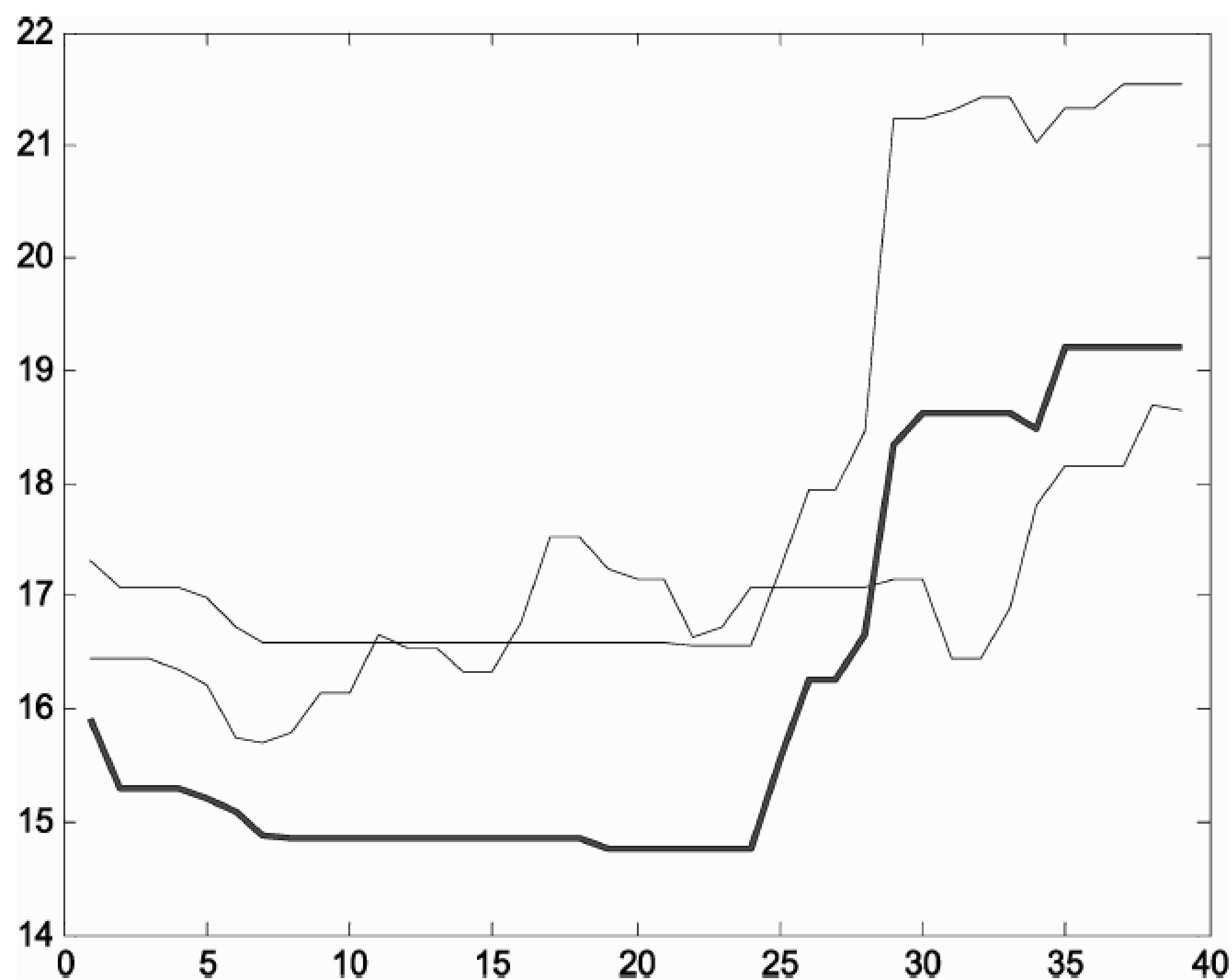


图 12-7　第三类食品价格趋势图

相应的增长率求解 MATLAB 程序如下：

```
%第三类的增长率
for i=2:39
    y22((i-1) ,:)=y2(i,:)-y2((i-1),:);    %增长差值
end
for i=1:38
    for j=1:3
        y222(i,j)=y22(i,j)/y2(i,j);       %增长率
    end
end
%第三类食品的增长率--时间曲线
for i=1:3
    subplot(1,3,i);                       %小窗口画图
    plot(x1(1:38,:),y222(:,i));           %画图
end
```

运行程序输出图形如图 12-8 所示。

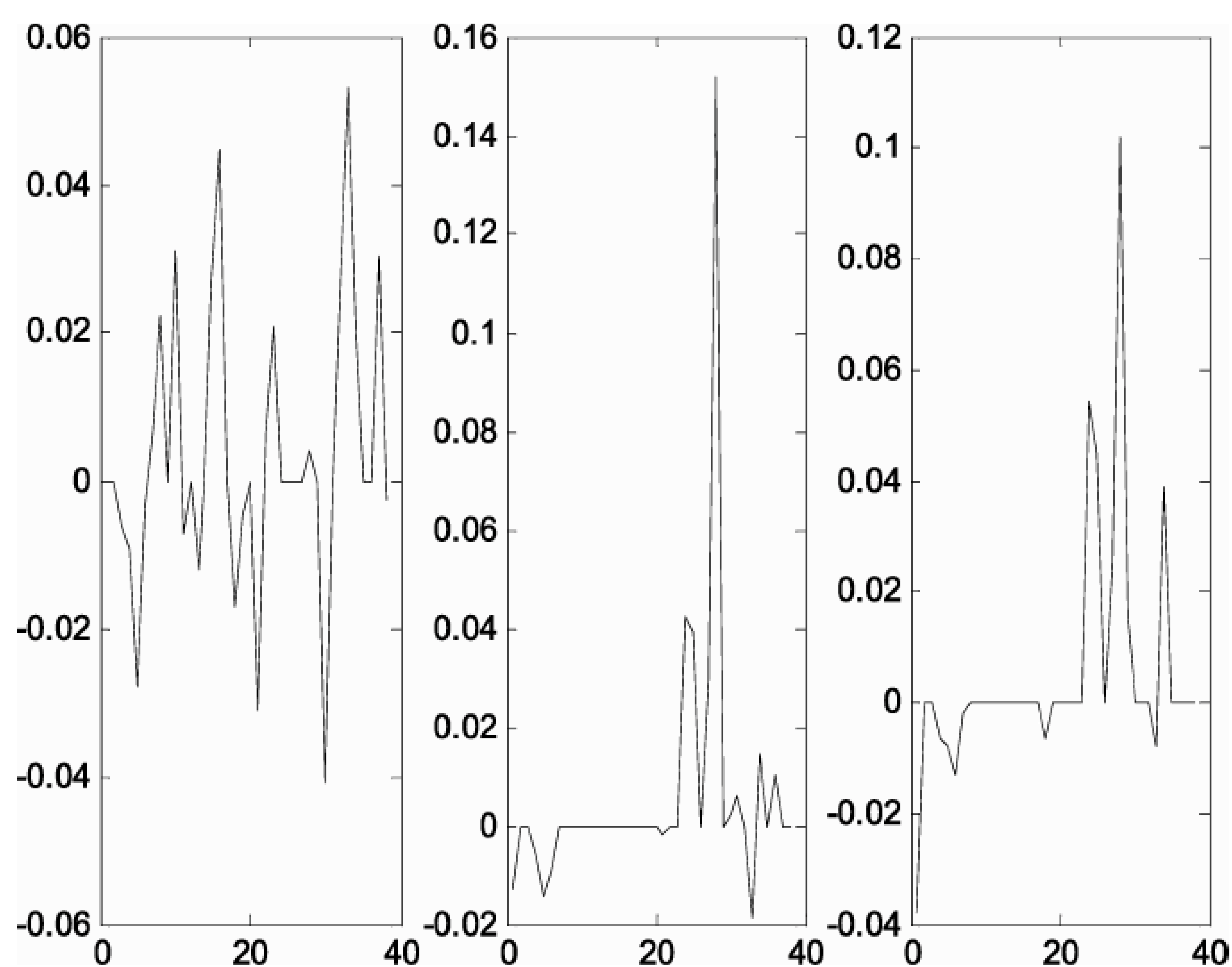


图 12-8　第三类增长率图

如图 12-8 所示，该类食品为鲜羊肉去骨、鲜牛肉、鲜羊肉带骨，价格变化情况大概一致。在 2011 年 1～3 月肉价格上涨加快，且价格变化以鲜牛肉为中心所得的欧氏距离值最小。在图 12-8 中，肉类价格增幅也较明显，先保持稳定后快速上涨再下降保持稳定，这也符合市场肉类的规律。

分析第四类食品，其程序如下：

```
%%第四类
close all
figure,
for i=1:6
    plot(x1,y1(:,i));    %画图
    hold on          %同一图形句柄下画图
end
plot(x1,y1(:,5),'r','linewidth',2);
```

运行程序输出图形如图 12-9 所示。

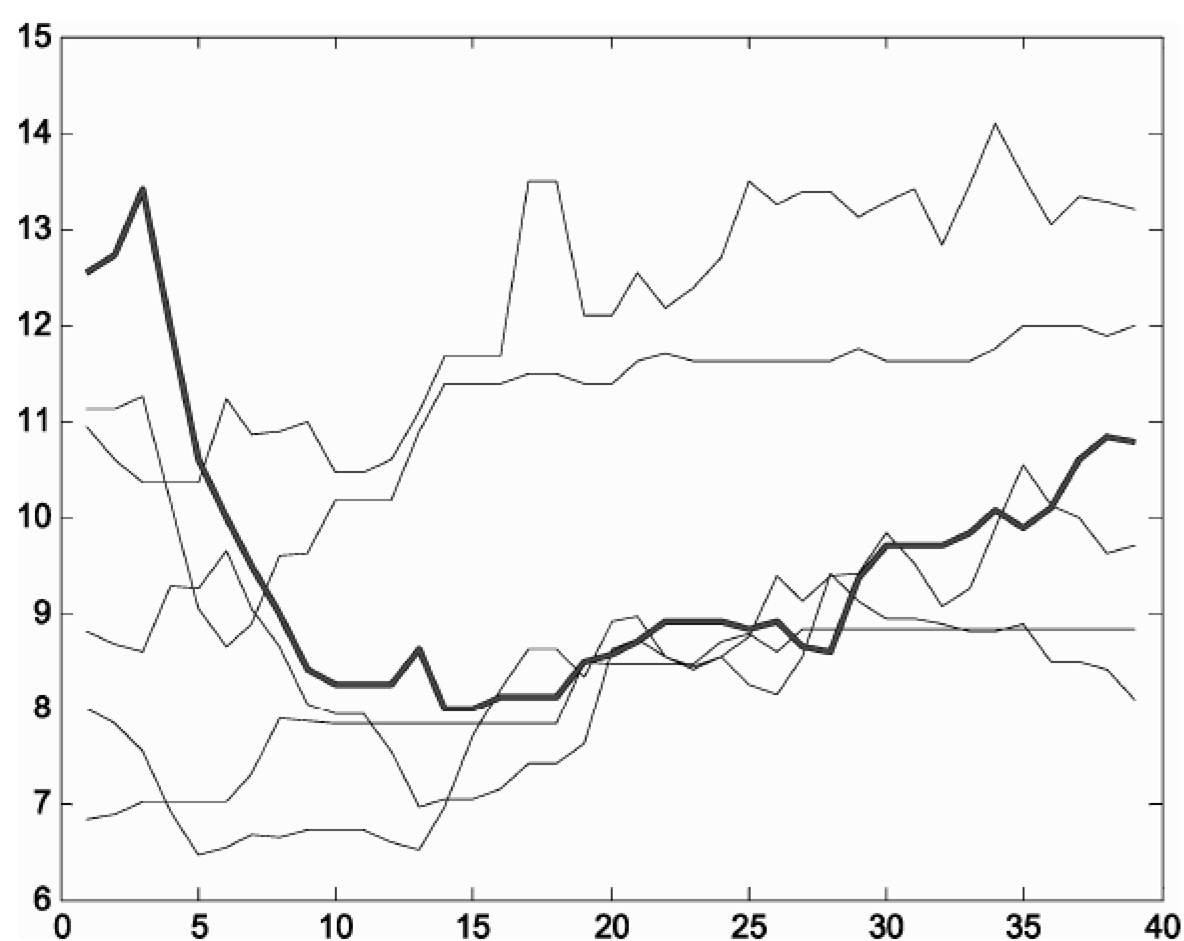


图 12-9　第四类食品价格趋势图

相应的增长率求解程序如下：

```
%第四类的增长率
for i=1:38
      x1(i)=i;    %赋值
end
for i=2:39
     y11((i-1),:)=y1(i,:)-y1((i-1),:);      %增长差值
end
for i=1:38
     for j=1:6
          y111(i,j)=y11(i,j)/y1(i,j);       %增长率
     end
end
%第四类食品的增长率--时间曲线
figure,
for i=1:6
     subplot(3,2,i);                        %3x4 小窗口画图
     plot(x1(1:38,:),y111(:,i));            %画图
end
```

运行程序输出图形如图 12-10 所示。

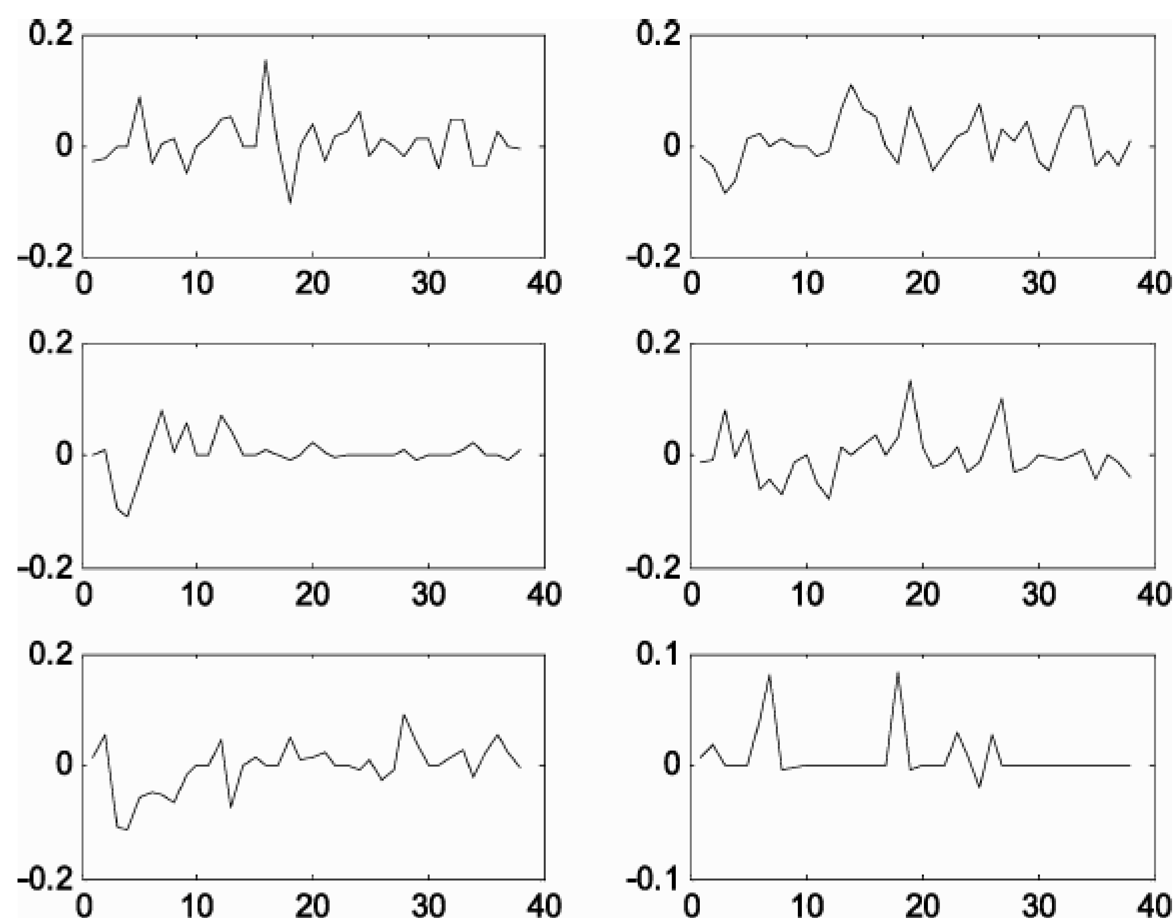


图 12-10　第四类增长率图

如图 12-10 所示，该类食品为鲜猪肉精瘦肉、鲜猪肉肋条肉、活鸡、鸡肉、带鱼、绵白糖，其中欧式距离值最小以鲜猪肉肋条肉为中心。右图中，绵白糖的价格变化规律与鲜猪肉精瘦肉、鲜猪肉肋条肉、活鸡、鸡肉、带鱼的变化步调有明显区别，先保持稳定后快速增长，且保持稳定的时间很长。

分析第五类食品，MATLAB 程序如下：

```
%%第五类
close all
figure,
for i=1:2
       plot(x1,y5(:,i));  %画图
       hold on       %同一图形句柄下画图显示
end
```

运行程序输出图形如图 12-11 所示。

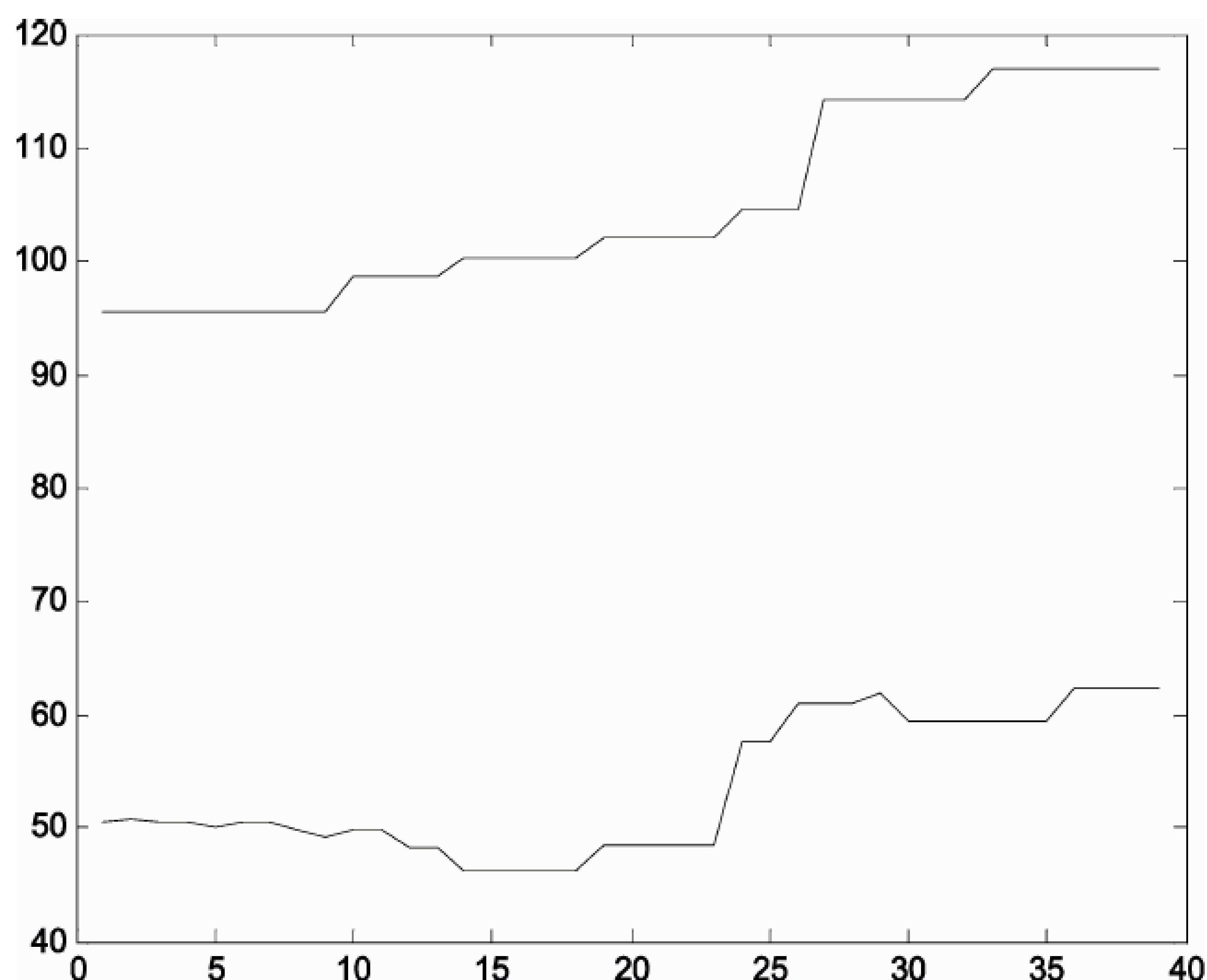


图 12-11　第五类价格趋势图

相应的增长率 MATLAB 求解程序如下：

```
%第五类的增长率
for i=2:39
     y55((i-1) ,:)=y5(i,:)-y5((i-1) ,:);   %增长差值
end
for i=1:38
     for j=1:2
          y555(i,j)=y55(i,j)/y5(i,j);      %增长率
     end
end
%第五类食品的增长率--时间曲线
figure,
for i=1:2
     subplot(1,2,i);                       %小窗口下画图
     plot(x1(1:38,:),y555(:,i));           %画图
end
```

运行程序输出图形如图 12-12 所示。

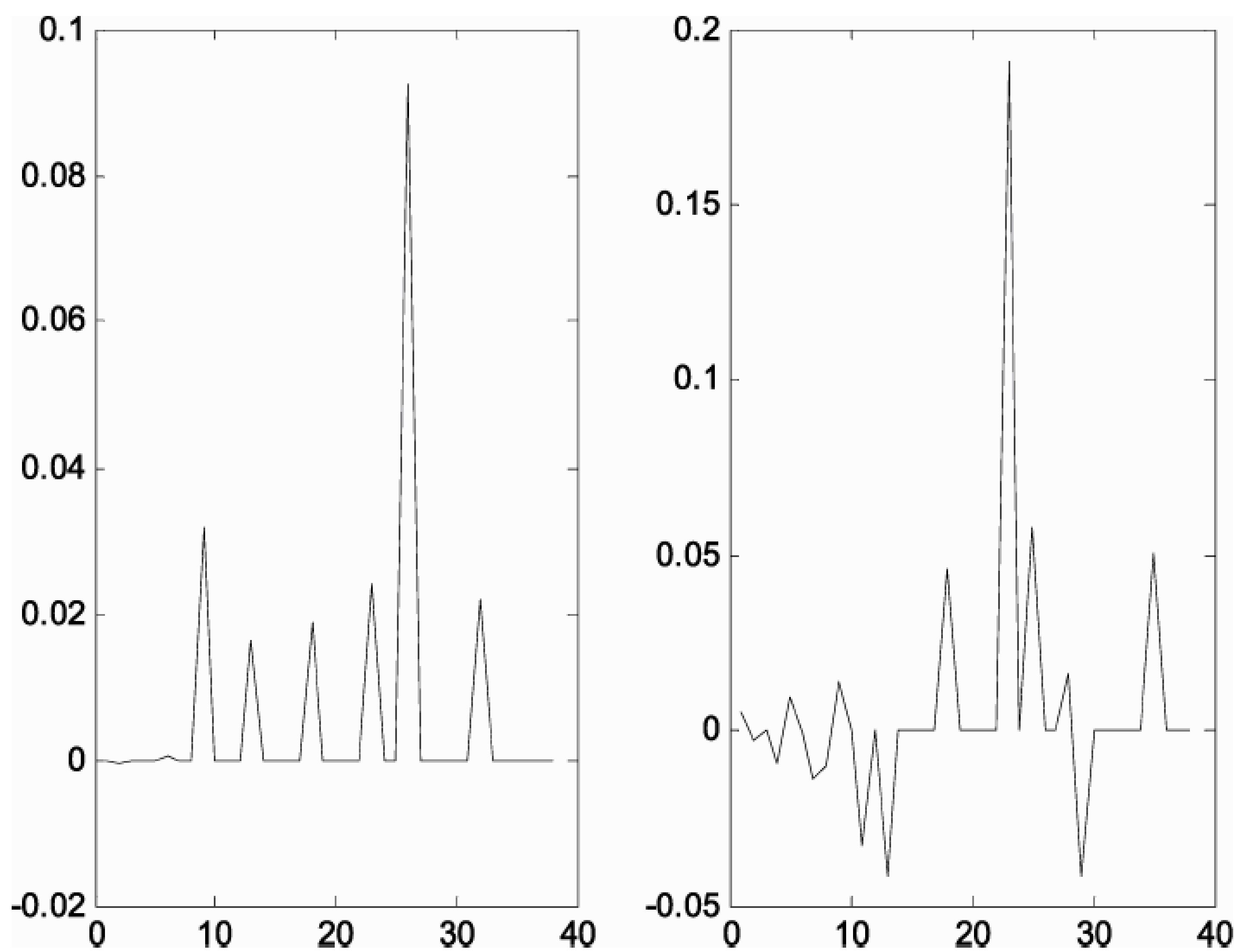


图 12-12　第五类价格增长率图

如图 12-12 所示，该类食品以花生油、大豆调和油为一类，其中花生油的价格变化范围为 95～120 元，居高不下，价格增长幅度先保持稳定后上涨。大豆调和油的价格 46～65 元之间变化，价格走势与花生油大致相当，增长率变化先保持稳定后快速增长。

分析第六类食品，MATLAB 程序如下：

```
%%第六类
close all
figure,
for i=1:2
       plot(x1,y6(:,i));   %画图
       hold on             %在同一图形句柄下画图
end
```

运行程序输出图形如图 12-13 所示。

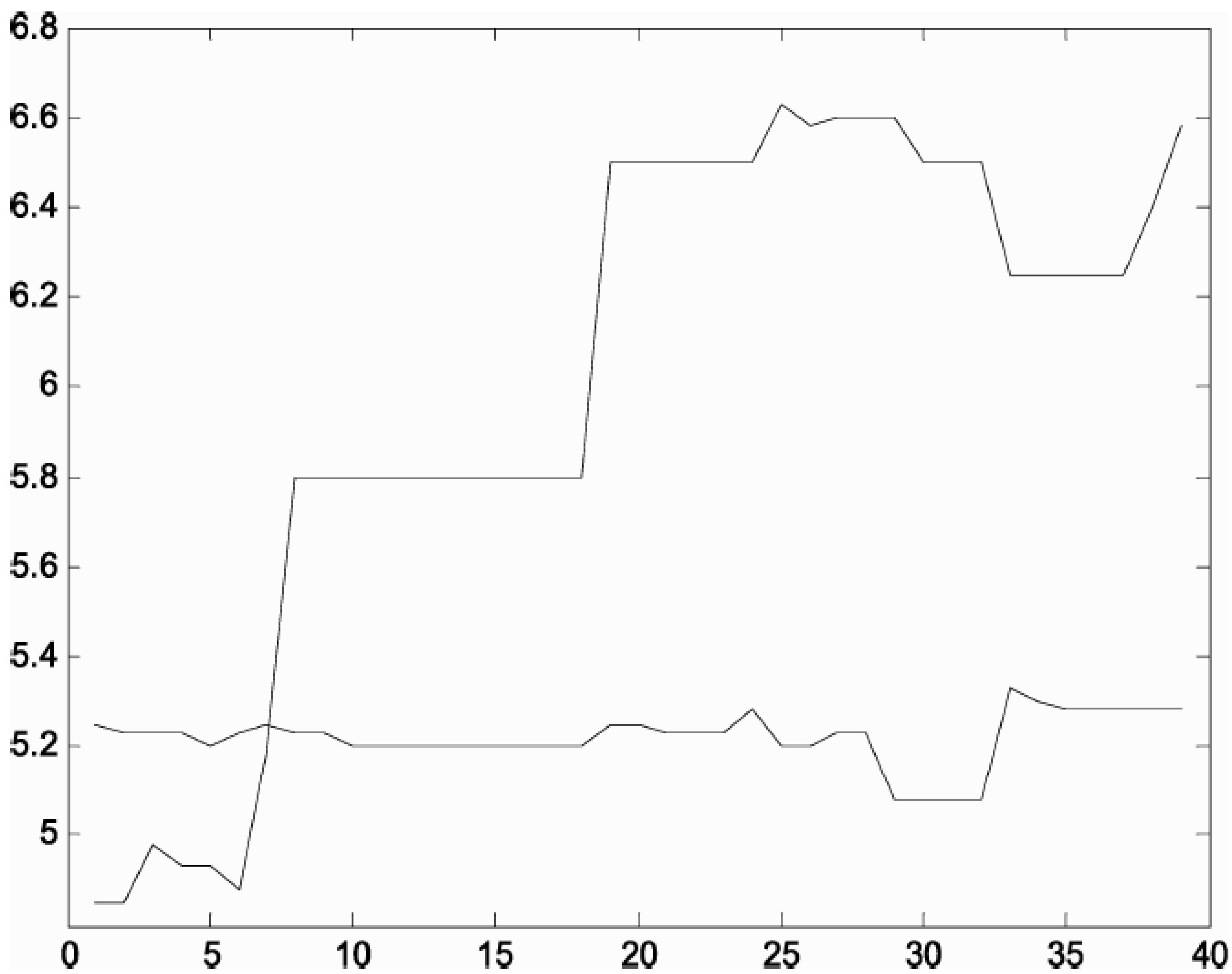


图 12-13　第六类价格趋势图

相应的增长率 MATLAB 求解程序如下：

```
%第六类的增长率
for i=2:39
     y66((i-1) ,:)=y6(i,:)-y6((i-1) ,:);   %增长差值
end
for i=1:38
     for j=1:2
          y666(i,j)=y66(i,j)/y6(i,j);      %增长率
     end
end
%第六类食品的增长率--时间曲线
figure,
for i=1:2
     subplot(1,2,i);                        %1x2 小窗口画图
     plot(x1(1:38,:),y666(:,i));            %画图
end
```

运行程序输出图形如图 12-14 所示。

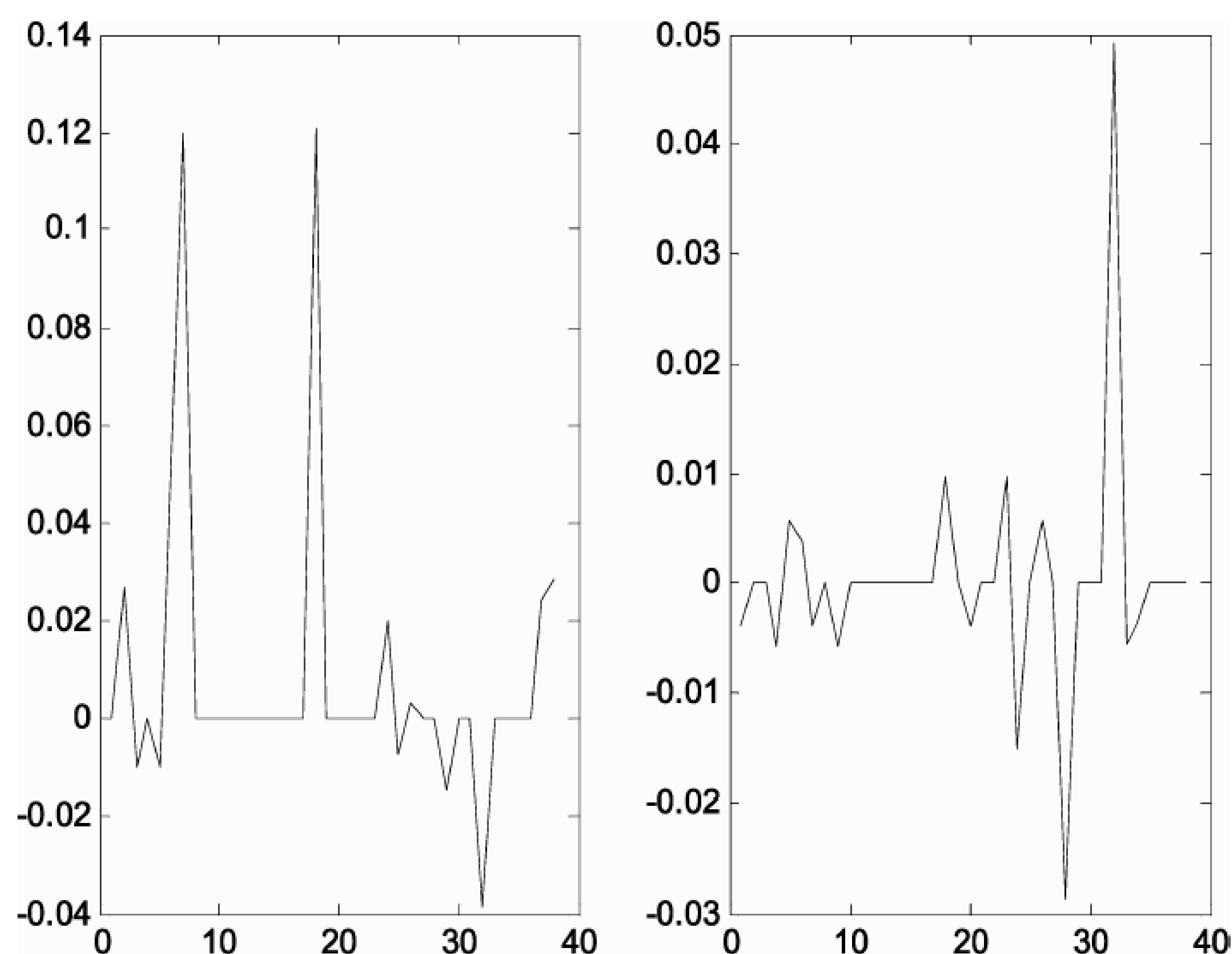


图 12-14　第六类价格增长率图

如图 12-14 所示，该类食品由酱油、醋组成，酱油、醋的价格变化趋势相当，价格先保持稳定后有所下降再上升保持稳定。在价格增长率图中，两者价格增幅在时间序列上呈现延迟性的变化相当情形，此类聚合在一起符合实际情况。

综合上述的分析可知，采用简单的按照欧氏（Euclidean）距离来对各食品进行价格上的聚合分类，从而划分食品种类，在一定程度上不能反映客观规律。国家对食品价格进行宏观上的调控，主要针对食品大类进行调控，如肉类及其制品、鲜菜类、鲜果类和鱼类等等，而不是按照笼统的价格分类。

12.4.5　模型一的改进

根据“食品分类系统”、附录 1 中的数据及中国国家统计年鉴等资料，把题中的 42

种食品分为食用油类（1～4）、肉类及其制品（5～12）、鱼类（13～15）、蔬菜类（16～30）、水果类（31～35）、调味品类（36～41）和奶类（42）7 大类，如图 12-15 所示。

具体如下所示。

第一类：油类共 4 种，菜籽油、大豆油、花生油、大豆调和油；

第二类：肉类及蛋类共 8 种，鲜猪肉 1、鲜猪肉 2、活鸡、鸡肉、鲜羊肉 1、鲜羊肉 2、鲜牛肉、鸡蛋；

第三类：水产品类共 3 种，草鱼、鲤鱼、带鱼；

第四类：鲜菜类共 15 种，芹菜、大白菜、油菜、黄瓜、萝卜、茄子、圆白菜、西红柿、土豆、胡萝卜、青椒、尖椒、韭菜、豆角、蒜苔；

第五类：鲜果类共 4 种，香蕉、苹果、西瓜、芦柑；

第六类：调味品类共 7 种，食用盐、红糖、白砂糖、绵白糖、酱油、醋、豆腐；

第七类：奶类共 1 种：鲜牛奶。

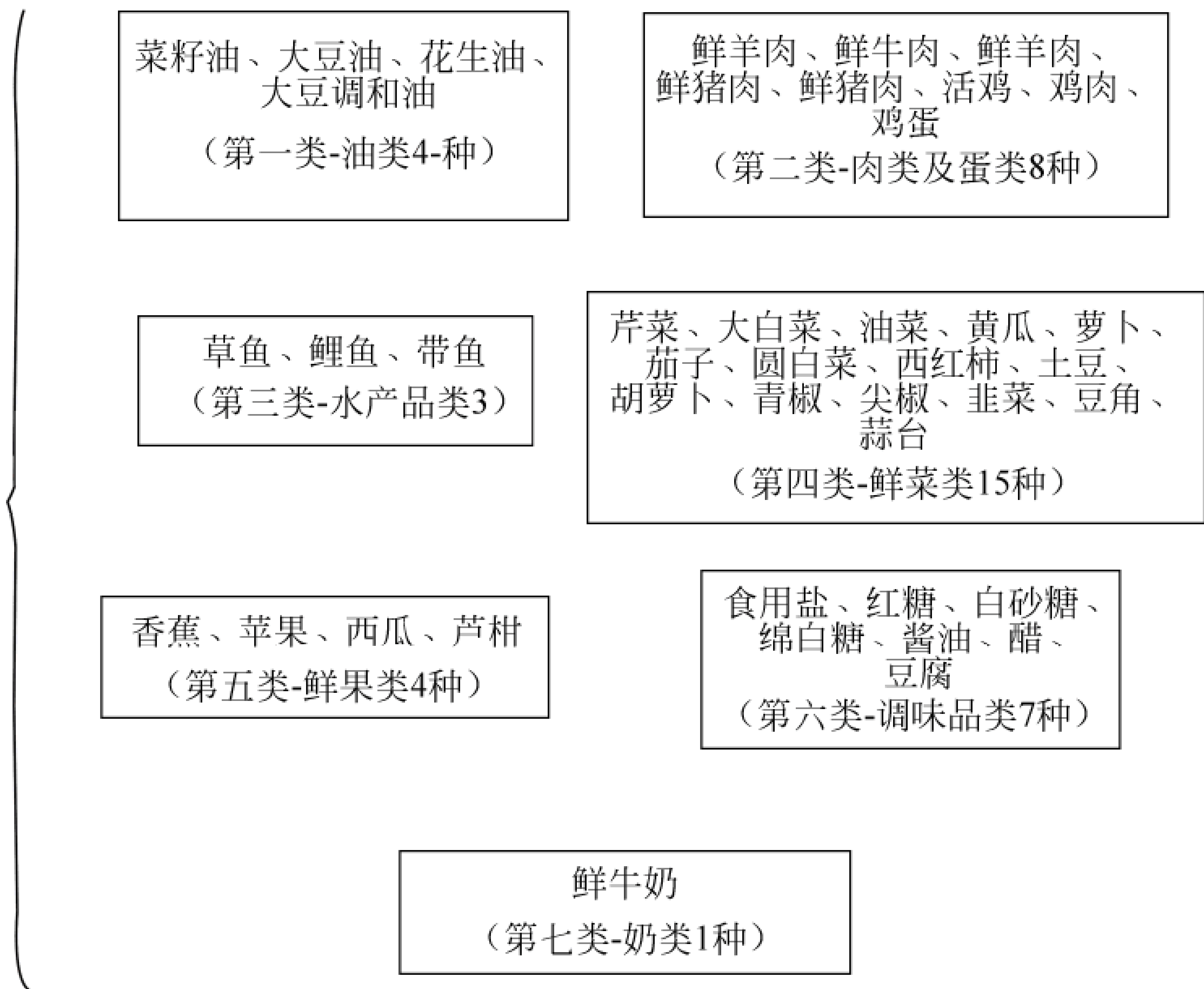


图 12-15　食品属性分类

根据第二次分类的食品绘制，绘制每类食品的价格增长率图-时间图如图 12-16 所示（里面对称的两条虚线的价格增长率为 ±0.03，外面对称的两条虚线的价格增长率为 ±0.05）。

对于第一类图形绘制相应的增长率图像，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
load('data.mat')  %加载数据
figure,
%第一类食品的增长率图
for i=1:39
     x2(i)=i;
end
for i=1:38
    for j=1:4
         z111(i,j)=z11(i,j)/z1(i,j);  %增长率
```

```
     end
end
x1 = x1(1:38);   %提取 1 到 38 序列
x2 = x2(1:38);
for i=1:4
     subplot(2,2,i);  %2x2 小窗口
     plot(x1,z111(:,i),x2,0.03*ones(1,38),'r--',...
          x2,-0.03*ones(1,38),'r--',x2,0.05*ones(1,38),'r--',x2,-0.05
          *ones(1,38),'r--');hold on  %画图显示
end
```

运行程序输出图形如图 12-16 所示。

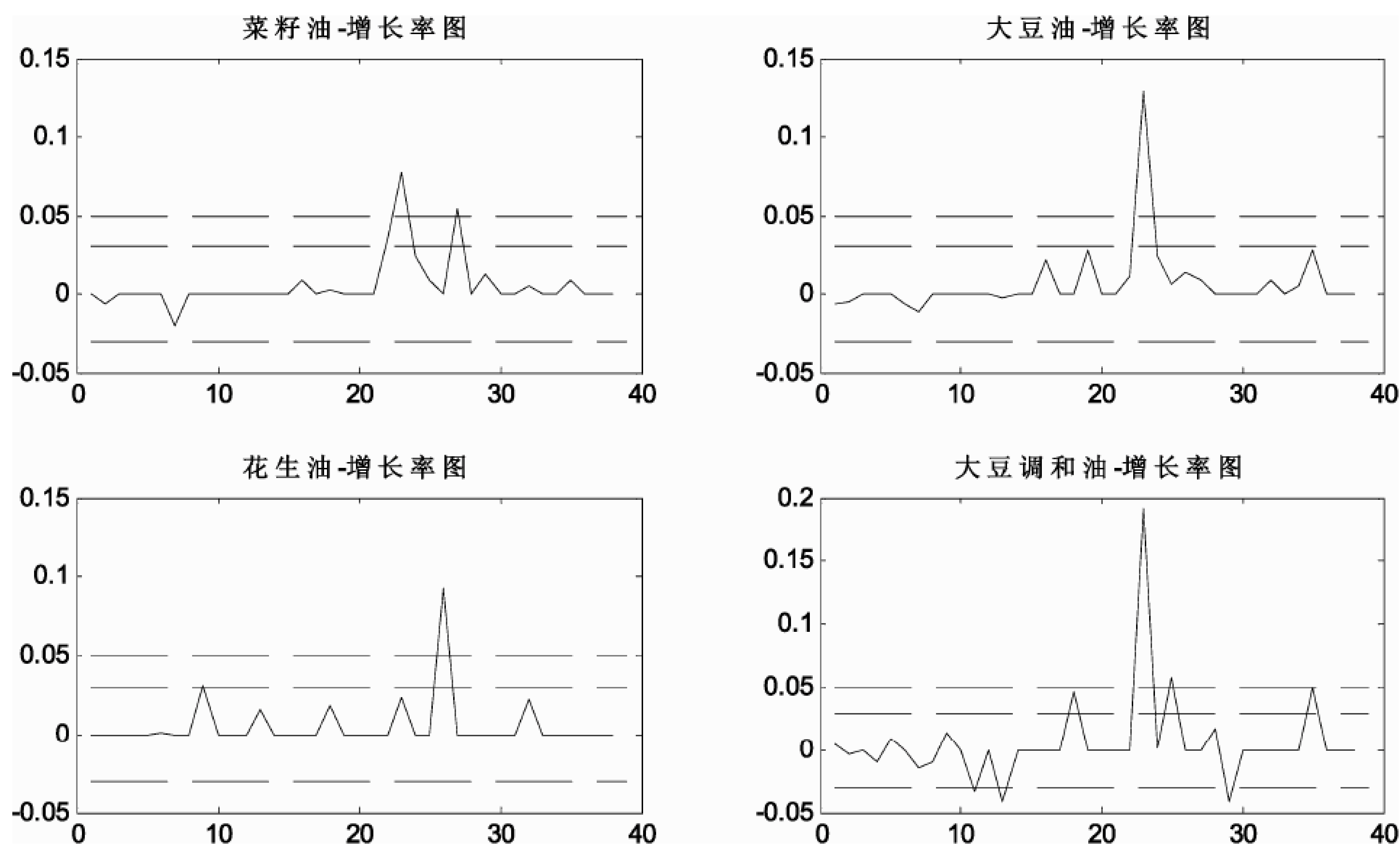


图 12-16　第一类——油类食品增长率曲线图

如图 12-16 可知，这四种油类的变化趋势相当，都是先保持不变后上涨，由油类食品的价格趋势图我们可以看到，这四种食品价格都是平稳或者缓慢增长的，不过菜籽油、大豆油、花生油、大豆调和油价格都是在 2010 年 10 月 25 号到 11 月 25 号左右有个增幅较大的变化。

对于第二类图形绘制相应的增长率图像，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
load('data.mat')  %加载数据
figure,
%第二类食品的增长率图
for i=1:38
    for j=1:8
         z222 (i,j)=z22(i,j)/z2(i,j);  %增长率
    end
end
x1 = x1(1:38);
x2 = x1;
for i=1:8
     subplot(3,3,i);   %新建画图小窗口
     plot(x1,z222(:,i),x2,0.03*ones(1,38),'r--',x2,-0.03*ones(1,38),...
          'r--',x2,0.05*ones(1,38) ,'r--',x2,-0.05*ones(1,38) ,'r--');
```

```
%画图
    hold on  %同一图形句柄下画图显示
end
```

运行程序输出图形如图 12-17 所示。

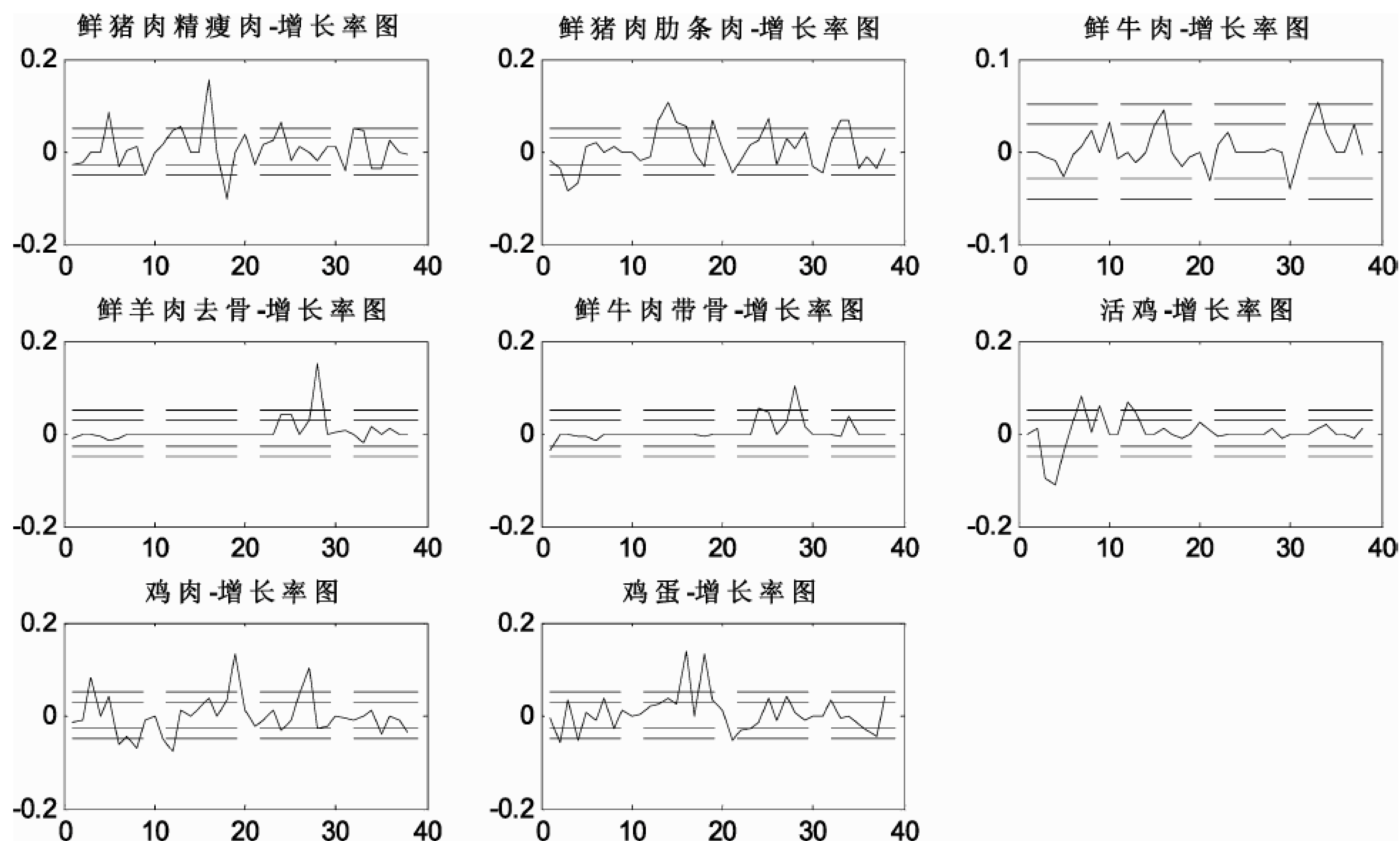


图 12-17　第二类——肉类及蛋类食品增长率曲线图

如图 12-17 可知，发现猪肉和牛肉的价格是上下波动变化的，而羊肉的价格只是在 2010 年 11 月和 12 月的时候有较大幅度的增加，鸡肉和鸡蛋的价格变化基本是在平稳变化的，而在 2010 年，还是有显著的价格上升，但持续的时间不长。

对于第三类图形绘制相应的增长率图像，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
load('data.mat')  %加载数据
figure,
%第三类食品的增长率图
for i=1:38
    for j=1:3
        z333 (i,j)=z33(i,j)/z3(i,j);
    end
end
x1 = x1(1:38);
x2 = x1;
for i=1:3
    subplot(1,3,i);                                  %新建 1x3 小窗口画图
    plot(x1,z333(:,i),x2,0.03*ones(1,38),'r--',x2,-0.03*ones(1,38),...
        'r--',x2,0.05*ones(1,38),'r--',x2,-0.05*ones(1,38),'r--');
%画图
    hold on                                          %同一图形句柄下画图显示
end
```

运行程序输出图形如图 12-18 所示。

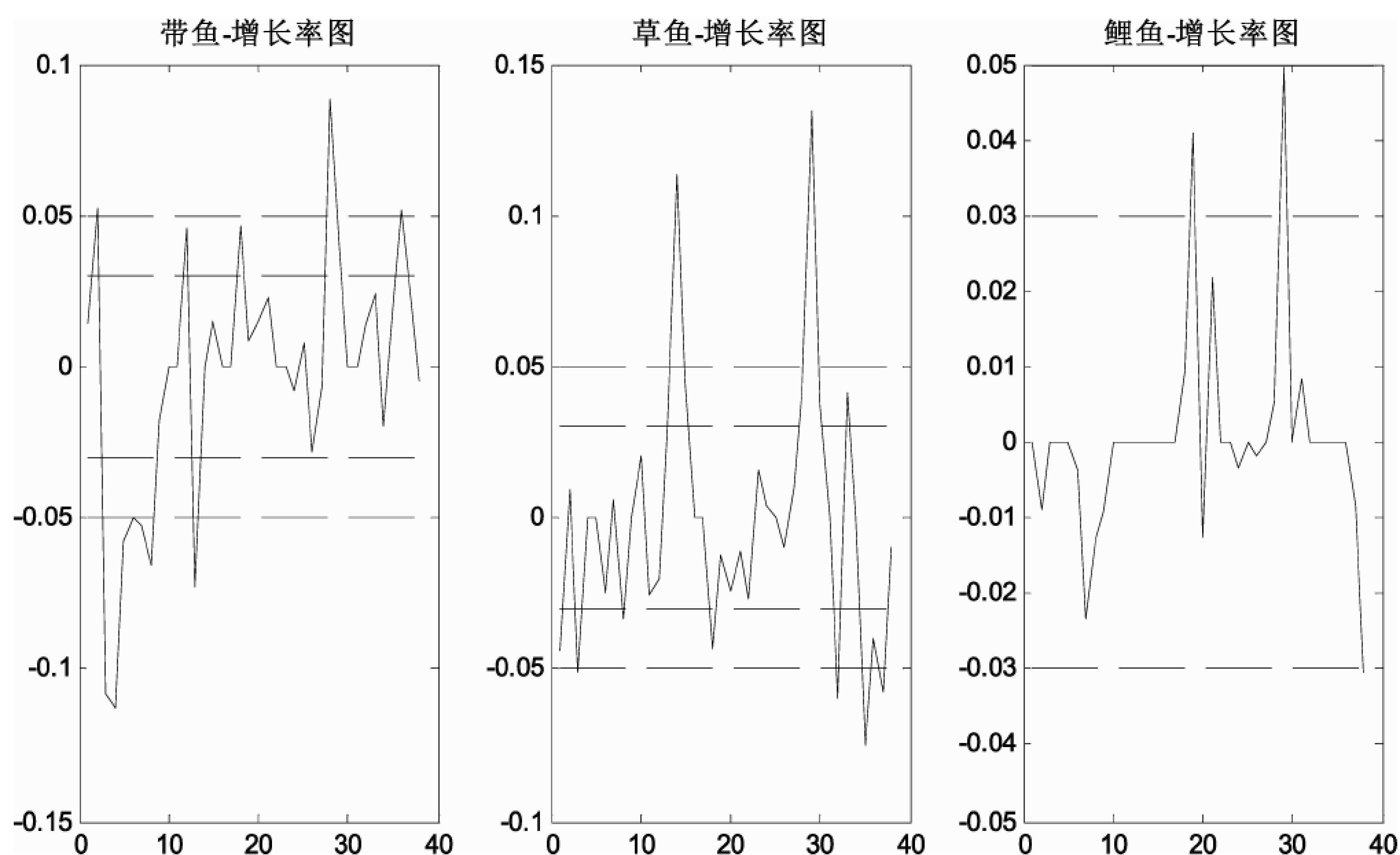


图 12-18 第三类——水产品类食品增长率曲线图

如图 12-18 所示，对于水产品，鱼的价格很没有方向性，可能下降也可能上升，不同的鱼的变化情况步调不一致，鱼类产品的价格随季节性变化很大。例如，夏天鱼的价格相对便宜，而冬季就相对贵了，还有，它和该地方的经济水平、人们的喜好和其生产成本及流通成本都有很明显的联系。

对于第四类图形绘制相应的增长率图像，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
load('data.mat')  %加载数据
figure,
%第四类食品的增长率图
for i=1:38
    for j=1:15
         z444 (i,j)=z44(i,j)/z4(i,j);    %增长率
     end
end
x1 = x1(1:38);
x2 = x1;
for i=1:15
     subplot(4,4,i);                  %新建 4x4 小窗口画图
     plot(x1,z444(:,i) ,x2,0.03*ones(1,38),'r--',x2,-0.03*ones(1,38),...
         'r--',x2,0.05*ones(1,38) ,'r--',x2,-0.05*ones(1,38) ,'r--');
%画图
     hold on  %同一图形句柄下画图显示
end
```

运行程序输出图形如图 12-19 所示。

如图 12-19 所示，蔬菜类食品里，可以发现它们的快速增长和快速下降的概率是很大的，这就说明蔬菜的价格上下波动的幅度特别大。因为蔬菜类的食品受天气、自然灾害、季节、生产成本、流通成本、国家物价部门的宏观调控、全国的蔬菜价格及国际蔬菜价格

的影响非常大，所以才会造成蔬菜价格的这样一种变化。

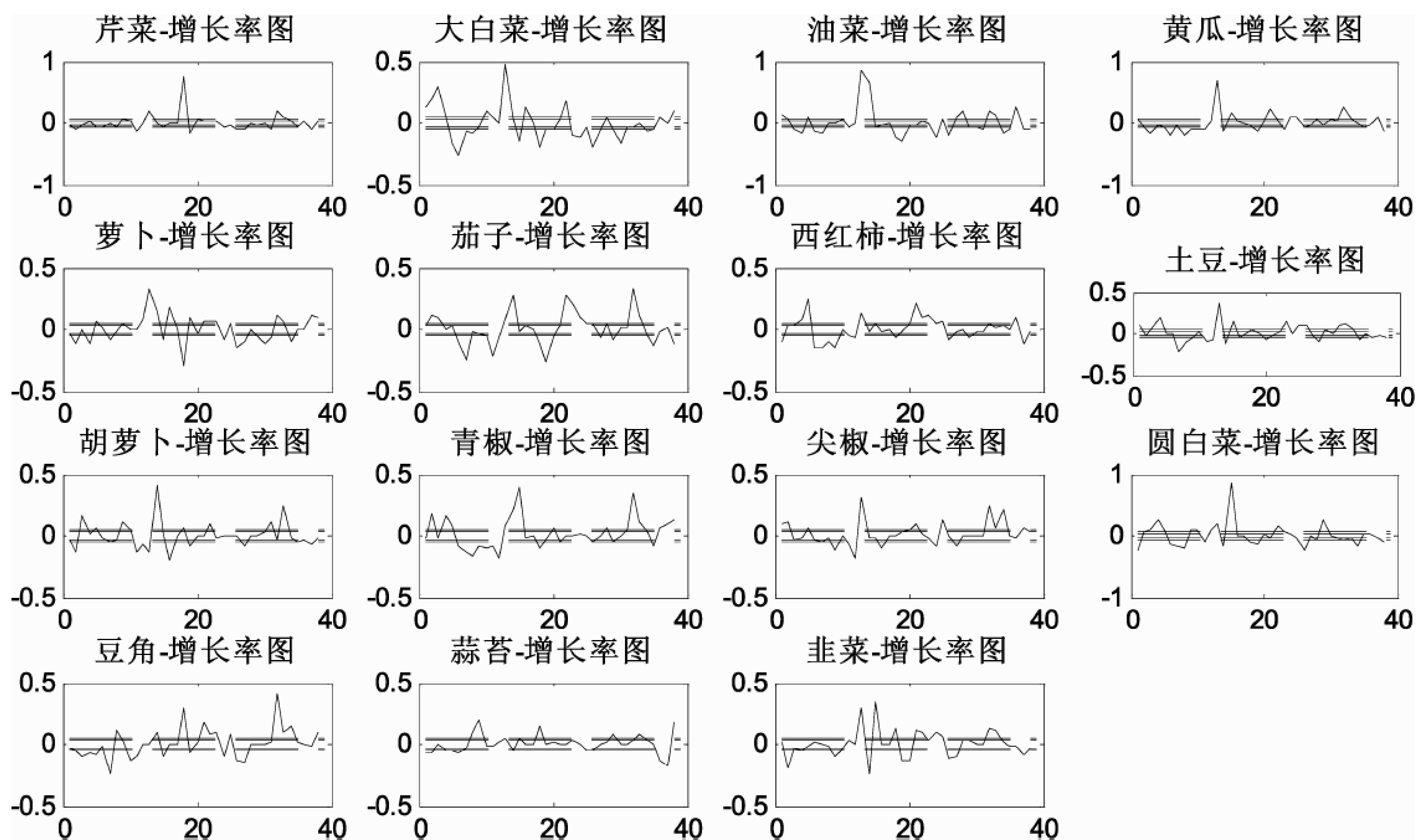


图 12-19　第四类——鲜菜类食品增长率曲线图

对于第五类图形绘制相应的增长率图像，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
load('data.mat')  %加载数据
figure,
%第五类食品的增长率图
for i=1:38
     for j=1:4
          z555 (i,j)=z55(i,j)/z5(i,j);  %增长率
     end
end
x1 = x1(1:38);
x2 = x1;
for i=1:4
      subplot(2,2,i);  %新建 2x2 小窗口画图
      plot(x1,z555(:,i),x2,0.03*ones(1,38),'r--',x2,-0.03*ones(1,38),
      'r--'...
          ,x2,0.05*ones(1,38),'r--',x2,-0.05*ones(1,38),'r--');  %画图
     hold on   %同一图形句柄下画图显示
end
```

运行程序输出图形如图 12-20 所示。

如图 12-20 所示，在鲜果类食品价格增长率图里，我们发现它们的价格变化也非常大，说明瓜果类食品的价格上下波动的幅度也特别大。从上面的分析中也可以知道鲜果类的食品受天气、季节、生产成本、流通成本、国家物价部门的宏观调控、全国的鲜果类价格及国际鲜果类价格影响非常大，所以才会造成鲜果价格的快速下降和快速增长。而且鲜果类

的食品不宜长时间的贮藏，所以有关的生产部门要控制水果的生产量，广泛推广生态瓜果，以减少蔬菜对气候和季节的依赖，而且国家物价部门也在适当的控制水果类价格使之相对稳定的变化。

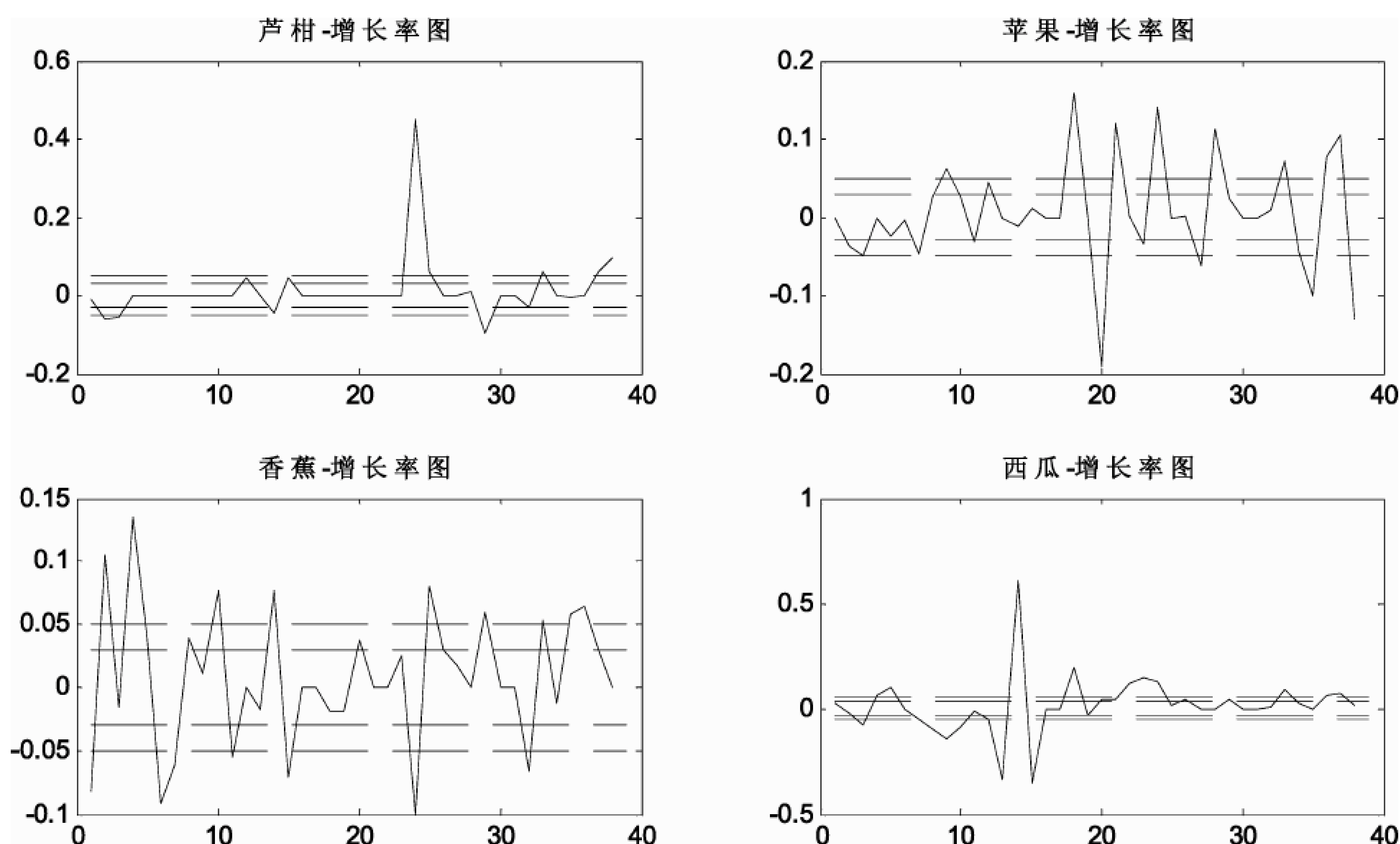


图 12-20　第五类——鲜果类食品增长率曲线图

对于第六类图形绘制相应的增长率图像，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
load('data.mat')  %加载数据
figure,
%第六类食品的增长率图
for i=1:38
     for j=1:7
          z666(i,j)=z66 (i,j)/z6(i,j);
     end
end
x1 = x1(1:38);
x2 = x1;
for i=1:7
     subplot(2,4,i);   %新建 2x4 小窗口画图
     plot(x1,z666(:,i),x2,0.03*ones(1,38),'r--',x2,-0.03*ones(1,38),
     'r--',...
          x2,0.05*ones(1,38),'r--',x2,-0.05*ones(1,38),'r--');  %画图
     hold on       %同一图形句柄下画图显示
end
```

运行程序输出图形如图 12-21 所示。

如图 12-21 所示的生活调味品的增长率变化图中可以得到生活调味品的价格是相对稳定的，增长幅度不大，如豆腐价格上涨后，后期价格一直保持不变。其他几种调味品价格变化也是先保持相对不变后有一定的增幅。

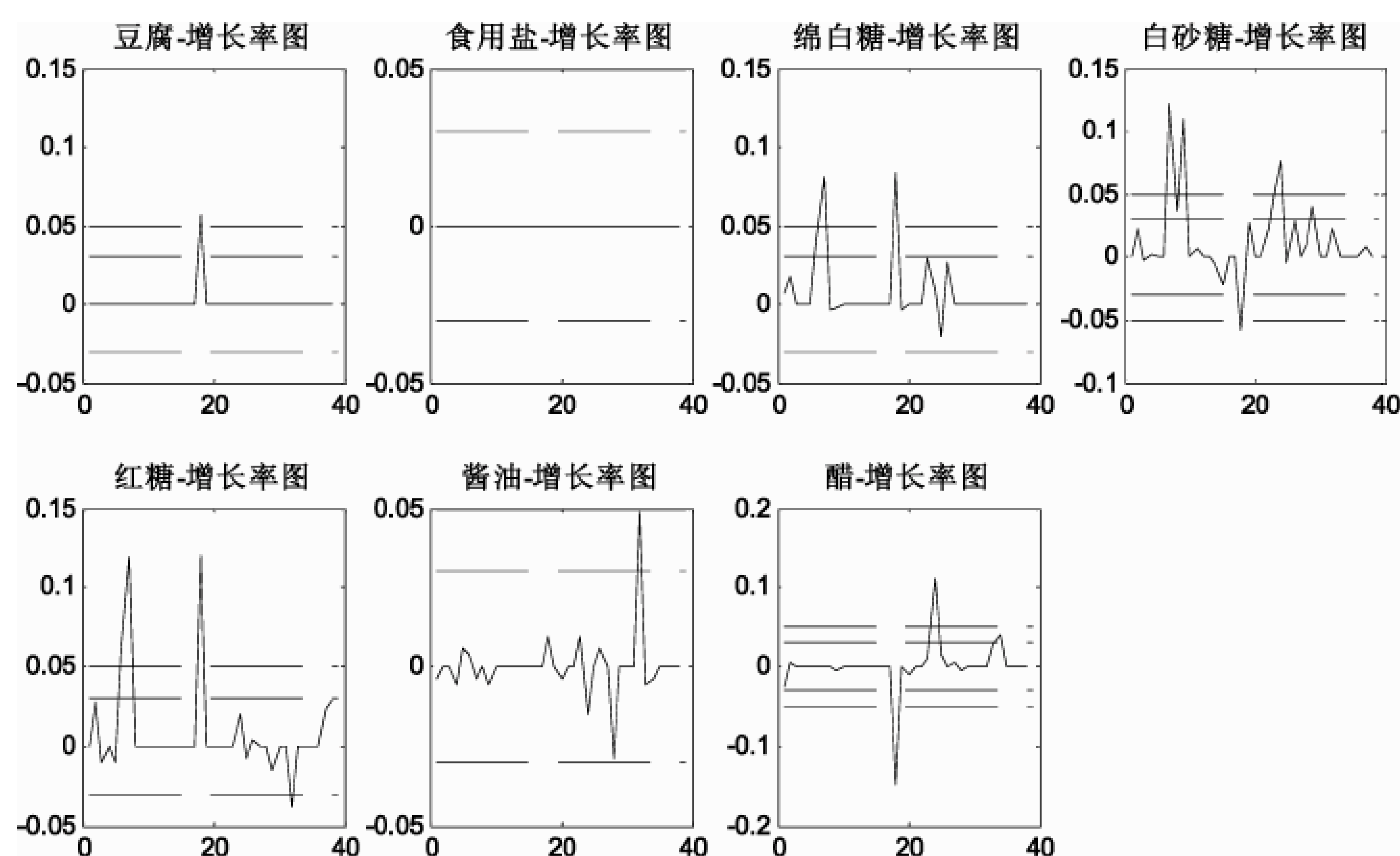


图 12-21　第六类——调味品类食品增长率曲线图

对于第七类图形绘制相应的增长率图像，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
load('data.mat')  %加载数据
figure,
%第七类食品的增长率图
for i=1:38
    for j=1
        z777(i,j)=z77 (i,j)/z7(i,j);   %增长率
    end
end
x1 = x1(1:38);
x2 = x1;
for i=1
    plot(x1,z777(:,i) ,x2,0.03*ones(1,38),'r--',x2,-0.03*ones(1,38),
    'r--',...
        x2,0.05*ones(1,38),'r--',x2,-0.05*ones(1,38) ,'r--');  %画图
    hold on                                            %同一图形句柄下画图显示
end
```

运行程序输出图形如图 12-22 所示。

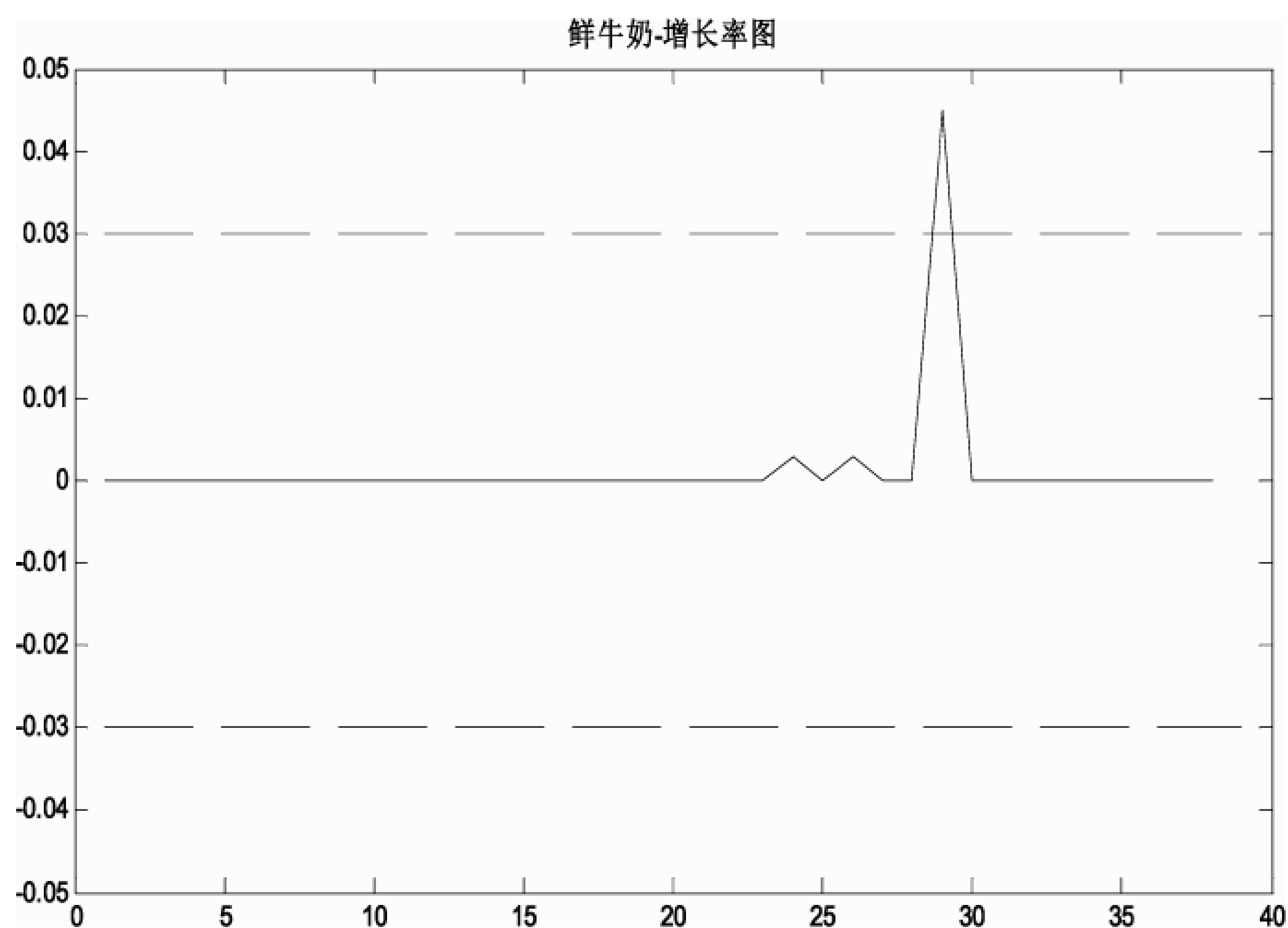


图 12-22　第七类——牛奶类食品增长率曲线图

如图 12-22 所示，牛奶类食品的价格增长率先上涨后保持稳定，价格变化不很明显，主要依赖奶牛的产奶量，而国内牛奶的价格在很大程度上依赖于国际牛奶价格，由于国外金融危机的影响，国外农业生产加强，国外牛奶的供给量保持了国内市场的稳定，故鲜牛奶价格表现为先上涨后保持稳定，总体表现为价格是相对稳定的。

综合上述分析可知，汇总各类食品的特点如表 12-1 所示。

表 12-1　各食品特点——价格波动情况

各食品特点——价格波动情况					
菜籽油 1	保持稳定、上涨	鲤鱼 15	保持稳定、下降	蒜苔 29	较快上涨、较快下降
大豆油 2	保持稳定、上涨	芹菜 16	下降、较快上涨	韭菜 30	较快上涨、较快下降
花生油 3	保持稳定、上涨	大白菜 17	较快下降、下降	芦柑 31	上涨、较快上涨
大豆调和油 4	保持稳定、上涨	油菜 18	较快下降、较快上涨	苹果 32	较快上涨、较快下降
鲜精瘦猪肉 5	上涨较快、上涨	黄瓜 19	较快下降、较快上涨	香蕉 33	较快上涨、保持稳定
鲜肋条猪肉 6	上涨、下降	萝卜 20	较快下降、较快上涨	西瓜 34	较快上涨、较快下降
鲜牛肉 7	保持稳定、上涨	茄子 21	较快上涨、较快下降	豆腐 35	上涨
鲜羊肉去骨 8	保持稳定、下降	西红柿 22	较快上涨、较快下降	食用盐 36	上涨
鲜羊肉带骨 9	保持稳定、下降	土豆 23	较快上涨、较快下降	绵白糖 37	上涨、保持稳定
活鸡 10	保持稳定、上涨	胡萝卜 24	较快下降、较快上涨	白砂糖 38	上涨、保持稳定
鸡肉 11	下降、较快上涨	青椒 25	较快下降、较快上涨	红糖 39	上涨
鸡蛋 12	下降、较快上涨	尖椒 26	较快上涨、下降	酱油 40	上涨、保持稳定
带鱼 13	保持稳定、上涨	圆白菜 27	较快上涨、较快下降	醋 41	上涨、保持稳定
草鱼 14	上涨、下降	豆角 28	较快下降、较快上涨	鲜牛奶 42	上涨、保持稳定

（注：各类食品的特点由根据 2010-3-5～2011-3-25 相邻增长率出现情况一致的次数总计得到，总计和越大，越能代表该种食品的特点。）

12.5　问　题　二

12.5.1　基本假设

（1）假设图表所提供的数据基本可靠；

（2）假设食品价格的变化客观反映了 CPI、食品消费价格指数产品、流通成本、生产资料及通货膨胀的变化；

（3）假设 2011 年 4、5 月份无自然灾害等突发事件的影响，环境因素的影响基本如前期一致；

（4）在预测的 6 组数据中，前一组数据对其后的数据预测没有影响。

12.5.2　符号说明

$(E_1, E_2 \cdots\cdots E_i)$：为状态向量，用来表示状态变量$(i=1,2,3,4,5)$，即对应的问题一中的快速上升、缓慢上升、相对不变、缓慢下降、快速下降五种状态。

B_i：为将价格增长率划分为 5 个段，分别用 B_i 表示$(i=1,2,3,4,5)$，即快速上升$(\geqslant 0.03)$、

缓慢上升$(0,0.03)$、相对不变为 0 、缓慢下降$(-0.03,0)$、快速下降$(\leqslant -0.03)$。具体如下：

B_1—快速上升，在程序中用“2”表示；

B_2—缓慢上升，在程序中用“1”表示；

B_3—相对不变，在程序中用“0”表示；

B_4—缓慢下降，在程序中用“-1”表示；

B_5—快速下降，在程序中用“-2”表示；

$E_i(0)$：初始状态向量；

E：一步转移概率矩阵；

E_{ij}：从状态 i 到状态 j 的一步转移概率；

C_{ij}：42 种食品空间中从状态 i 一步转移到状态 j 的食品个数；

D_i：为各种食品价格系统中处于状态 i 时的样本个数。

12.5.3　问题分析

近期我国出现了食品类商品价格的持续性上涨，导致了居民消费价格指数（CPI）的不断上涨和居民生活成本的提高。新一轮的通货膨胀预期在不断加重，我们知道，一般说来当 CPI 的增幅大于 3%时我们称为 Inflation，就是通货膨胀；而当 CPI 的增幅大于 5%时，我们把它称为 Serious Inflation，就是严重的通货膨胀。本章将运用灰色关联分析法，深入分析我国的食品价格指数与哪些商品价格有关联，而又在多大程度上影响了 CPI 的上涨，从而说明影响物价的因素是来自多方面的，有粮食生产、流通成本上涨、自然因素及国家调控作用等等，进而说明食品价格是一个动态的经济模型，对预测食品价格变化有一定的作用。

表 12-2　消费价格指数

年份	CPI	食品	烟酒及用品	衣着	家庭设备用品及服务	医疗保健及个人用品	交通和通信	娱乐教育文化用品及服务	居住
2010/3	102.4	105.2	101.7	98.9	99.3	102.5	100.0	100.3	100.3
2010/4	102.8	105.9	101.7	98.7	99.5	102.8	100.0	100.4	104.5
2010/5	103.1	106.1	101.7	98.8	99.7	103.2	100.1	100.6	105.0
2010/6	102.9	105.7	101.7	99.0	100.0	103.2	99.7	100.9	105.0
2010/7	103.3	106.8	101.6	99.2	100.2	103.3	99.3	101.1	104.8
2010/8	103.5	107.5	101.5	98.8	100.4	103.3	99.4	101.2	104.4
2010/9	103.6	108.0	101.4	98.5	100.4	103.4	99.3	101.2	104.3
2010/10	104.4	110.1	101.5	98.7	100.5	103.7	99.5	100.9	104.9
2010/11	105.1	117.1	101.6	99.3	100.7	104.0	99.3	100.6	105.8
2010/12	104.6	109.6	101.8	100.1	101.2	104.0	99.3	100.7	106.0
2011/1	104.9	110.3	101.8	99.8	101.4	103.2	99.9	101.0	106.8
2011/2	104.9	111.0	101.9	100.4	101.4	103.0	99.7	100.3	106.1
2011/3	105.4	111.7	102.1	100.8	101.9	103.2	100.1	100.5	106.6

表 12-2（来源：中国国家统计局网站）是国家在 2010 年 3 月到 2011 年 3 月构成 CPI 的八大体系的月消费价格指数，本章将讲解各大体系对 CPI 的影响借助灰色关联度来分析

说明。

1. 模型的分析

根据表 12-2 绘制的城市居民消费价格指数 CPI 和城市食品零售价格指数随时间变化的曲线，如图 12-23 所示。

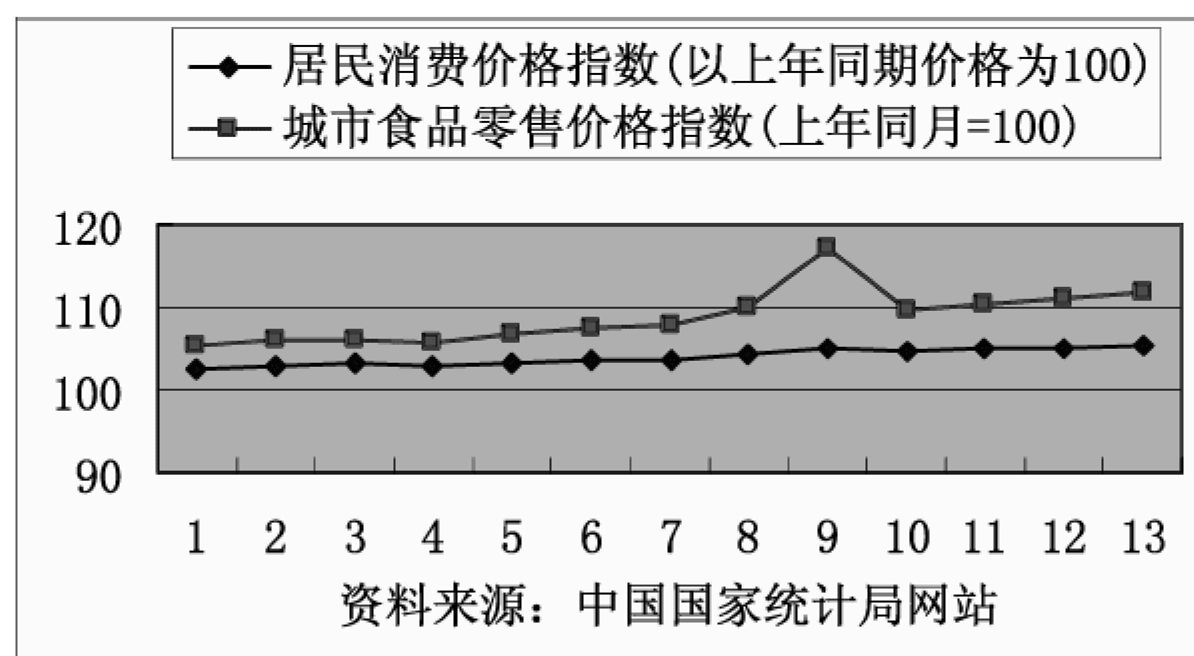


图 12-23　价格指数随时间变化的曲线

由图 12-23 可知，城市食品的价格指数是不断增长的，CPI 也不断上涨，且食品零售价格指数波动情况高于 CPI，城市食品零售价格指数作为 CPI 的一部分，之间有一定的关联度。

2. 数学模型

根据模型的分析，在此用灰色关联分析方法分析城市食品零售价格指数对 CPI 的影响。灰色关联分析的计算步骤如下。

Step 1，建立各相关指标的原始数据矩阵 x_i：

$$x_i = \left(x_i(1), x_i(2), \cdots, x_i(k), \cdots\right)$$

式中 $x_i(k)$ 表示 i 因素在第 k 年的原始数据。

Step 2，求初值像矩阵 x_i'：

$$x_i' = \left(x_i(1)/x_i(1), x_i(2)/x_i(1), \cdots, x_i(k)/x_i(1), \cdots\right) = \left(x_i'(1), x_i'(2), \cdots x_i'(k), \cdots\right)$$

Step 3，求差序列 $\Delta_{0i}(k)$：

$$\Delta_{0i}(k) = \left|x_0^i(k) - x_i'(k)\right|, \Delta_{0i}(k) = \left(\Delta_{0i}(1), \Delta_{0i}(2), \cdots \Delta_{0i}(k), \cdots\right)$$

Step 4，计算关联系数 $\xi_{0i}(k)$ 和灰色关联度 $\Delta_{0i}(k)$：

$$\xi_{0i}(k) = \frac{\min\limits_i \min\limits_k \Delta_{0i}(k) + \varphi \max\limits_i \max\limits_k \Delta_{0i}(k)}{\Delta_{0i}(k) + \varphi \max\limits_i \max\limits_k \Delta_{0i}(k)}$$

其中 φ 为分辨系数,其作用在于提高关联系数间的差异显著性，$\varphi \in (0,1)$，一般取 $\varphi = 0.5$。

则灰色关联度：

$$\gamma_{0i} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} \xi_{0i}(k)$$

MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
y=[ 102.4    102.8    103.1    102.9    103.3    103.5    103.6    104.4    105.1
104.6   104.9   104.9   105.4
105.2    105.9    106.1    105.7    106.8    107.5    108  110.1    117.1    109.6
110.3   111 111.7
101.7    101.7    101.7    101.7    101.6    101.5    101.4    101.5    101.6
101.8   101.8   101.9   102.1
98.9     98.7     98.8     99  99.2     98.8     98.5     98.7     99.3     100.1
99.8    100.4   100.8
99.3     99.5     99.7     100  100.2    100.4    100.4    100.5    100.7    101.2
101.4   101.4   101.9
102.5   102.8   103.2   103.2   103.3   103.3   103.4   103.7   104 104 103.2
103 103.2
100 100 100.1   99.7    99.3    99.4    99.3    99.5    99.3    99.3    99.9
99.7    100.1
100.3    100.4    100.6    100.9    101.1    101.2    101.2    100.9    100.6
100.7   101 100.3   100.5
100.3    104.5    105 105 104.8    104.4    104.3    104.9    105.8    106  106.8
106.1   106.6];
y1=mean(y');                                             %均值
y1=y1';
for i=1:9
     for j=1:13
          y2(i,j)=y(i,j)/y1(i);                           %初值像矩阵
     end
end
for i=2:9
     for j=1:13
          y3(i-1,j)=abs(y2(i,j)-y2((i-1) ,j));       %差序列
     end
end
a=1;b=0;                                                 %赋值是极大值和极小值
for i=1:8
       for j=1:13
            if(y3(i,j)<=a)  a=y3(i,j);                   %计算 minmin()
                 elseif(y3(i,j)>=b) b=y3(i,j);       %计算 maxmax()
            end
       end
end
for i=1:8
     for j=1:13
              y4(i,j)=(a+0.5*b)/(y3(i,j)+0.5*b);   %计算关联系数
     end
end
y5=sum(y4')/12                                           %灰色关联度
y5 =
  Columns 1 through 6
    0.8223    0.7225    0.9665    0.9951    0.9544    0.9469
  Columns 7 through 8
    0.9641    0.8760
>>
```

运行程序得：

$$\xi_{0i}=\{\xi_{01}\quad \xi_{02}\quad \xi_{03}\quad \xi_{04}\quad \xi_{05}\quad \xi_{06}\quad \xi_{07}\quad \xi_{08}\}$$

$$\xi_{0i}=\{0.8223\quad 0.7225\quad 0.9665\quad 0.9951\quad 0.9544\quad 0.9469\quad 0.9641\quad 0.8760\}$$

排序得到：

$$\xi_{04}>\xi_{03}>\xi_{07}>\xi_{05}>\xi_{06}>\xi_{08}>\xi_{01}>\xi_{02}$$

由我国居民消费价格指数分析测度数据结论可知，食品消费价格指数与 CPI 的关联程度是比较低的,关联系数为 0.8223，仅高于烟酒及用品。这主要是由以下原因造成的：

食品价格的周期波动性导致关联度偏低。在 CPI 指标体系中，食品和燃料一样，都不属于核心 CPI，因为它们很容易受外在因素的影响，并模糊消费价格的真实变动趋势。而目前我国物价的上升主要是由这两种物品引起的，尤其是食品价格的涨幅，所以并不能反映 CPI 的涨幅。食品价格的大起大落，反映的是农产品生产环节存在不稳定因素、也是农业生产普遍特征的周期性反复。其根源在于农业生产的两个特点：一是受自然条件影响大，产量会因为不可控因素而波动，二是生产组织的规模小，不能有效地搜集和利用市场信息，也不能有效地控制生产成本。

表 12-3　食品价格指数

年份	CPI	CEI 同比增速	食品	粮食	肉禽及其制品	水产品	鲜菜	鲜果	流通中现金(亿元)	储蓄存款（亿元）	农业生产资料价格指数
2010/3	102.4	1.50%	105.2	109.2	97.8	106.3	118.5	118.8	39080	280350	100.9
2010/4	102.8	2.70%	105.9	110.7	98.2	105.5	124.9	116.4	39657	279852	101.2
2010/5	103.1	2.40%	106.1	111.5	100.8	105.6	121.3	111.8	38652	280547	102.1
2010/6	102.9	2.80%	105.7	111.7	101.8	106.5	114.6	109.2	38904	287474	102.5
2010/7	103.3	3.10%	106.8	111.8	104.1	107.6	122.3	104.5	39543	286989	102.86
2010/8	103.5	2.90%	107.5	112.0	105.4	108.5	119.2	108.1	39922	288773	103.49
2010/9	103.6	3.30%	108.0	112.1	105.4	110.9	118.0	113.2	41854	299136	103.89
2010/10	104.4	3.48%	110.1	112.3	106.8	111.1	131.0	117.7	41646	292037	105.16
2010/11	105.1	3.61%	117.1	114.7	109.9	111.9	121.3	128.1	42252	293426	106.47
2010/12	104.6	4.37%	109.6	115.6	110.2	110.9	94.3	134.4	44628	303093	105.97
2011/1	104.9	5.12%	110.3	115.1	110.9	111.1	102.0	134.8	58074	……	105.41
2011/2	104.9	4.60%	111.0	114.8	113.3	109.1	106.0	131.1	47300	……	106.51
2011/3	105.4	5.1%	111.7	115.0	117.3	110.2	104.3	129.9	……	……	……

各类食品指数的变化情况如图 12-24 所示。

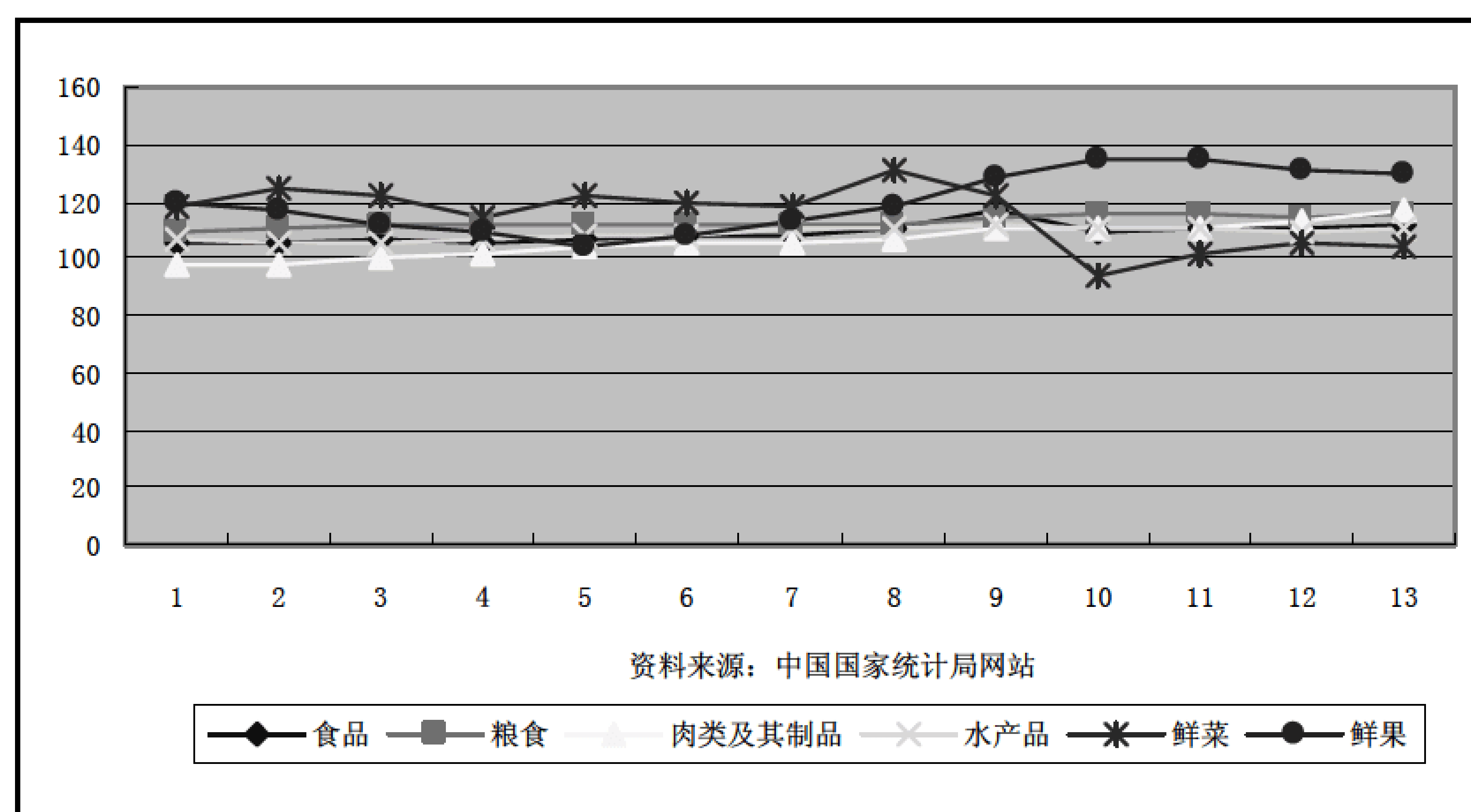


图 12-24　各类食品指数的变化图

对该类数据进行灰色关联分析，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
x=[ 105.2   105.9   106.1   105.7   106.8   107.5   108 110.1   117.1   109.6
110.3   111 111.7
109.2    110.7    111.5    111.7    111.8    112  112.1    112.3    114.7    115.6
115.1   114.8   115
97.8      98.2     100.8    101.8    104.1    105.4    105.4    106.8    109.9
110.2   110.9   113.3   117.3
106.3    105.5    105.6    106.5    107.6    108.5    110.9    111.1    111.9
110.9   111.1   109.1   110.2
118.5   124.9   121.3   114.6   122.3   119.2   118 131 121.3   94.3    102
106 104.3
118.8    116.4    111.8    109.2    104.5    108.1    113.2    117.7    128.1
134.4   134.8   131.1   129.9];
x1=mean(x');                                                    %均值
x1=x1';
for i=1:6
        for j=1:13
             x2(i,j)=x(i,j)/x1(i);                              %初值像矩阵
        end
end
for i=2:6
        for j=1:13
             x3(i-1,j)=abs(x2(i,j)-x2((i-1),j));                %差序列
         end
end
a=1;b=0;                                                        %赋值为极大值和极小值
for i=1:5
        for j=1:13
             if(x3(i,j)<=a)
                   a=x3(i,j);                                   %计算 minmin()
                   elseif(x3(i,j)>=b)
                        b=x3(i,j);                              %计算 maxmax()
                end
           end
end
for i=1:5
       for j=1:13
       x4(i,j)=(a+0.5*b)/(x3(i,j)+0.5*b);                       %计算关联系数
end
end
x5=sum(x4')/12                                                  %灰色关联度
x5 =
    1.0134    0.9281    0.9221    0.7495    0.6097
>>
```

亦将各类食品对食品消费价格指数的影响借助灰色关联度来分析说明，得到：

$$\gamma_{0i} = \{1.0134 \quad 0.9281 \quad 0.9221 \quad 0.7495 \quad 0.6097\}$$

排序得到：

$$\gamma_{01} > \gamma_{02} > \gamma_{03} > \gamma_{04} > \gamma_{05}$$

由我国食品消费价格指数的分析测度数据结论可知，粮食消费价格指数与食品消费价格指数关联程度最高，如图 12-24 所示，粮食价格指数紧靠食品的价格指数曲线；其次是肉禽及其制品，然后依次是水产品和鲜菜类、鲜瓜果。通过对结构的分析可以看出，近年来我国食品消费价格指数主要与当年粮食、肉禽及其制品和水产品的价格有关，关联系数

均超过了 0.9，粮食的关联系数更是超过了 1。从我国近期的实情来看，主要是由于以下因素的影响导致了粮、肉和水产品等的价格不断攀升。从而导致我国食品价格的持续上涨。

1）供求结构失衡。由于 2010 年和 2011 年异常的气候情况，导致生产成本大量增加，国际粮价对国内供需的影响，不能跟上居民需求增长的步伐，因此从 2010 年开始粮食价格进入周期性上涨阶段。一些养殖户减少牲畜饲养的数量，导致生猪存栏下降，肉类供应增长的速度放缓等。

2）成本推动。种植养殖成本随着生产资料价格和农村劳动力价格的上涨而大幅上升；另外，养猪所需的主要饲料玉米等价格上涨，导致养猪成本的增加；食品价格上涨导致居民大量的把钱存入银行，导致市场的流通成本下降；食品的价格略微降低，居民大量购物，市场的流通成本一定程度上上升；流通中现金、储蓄存款对食品的价格有一定的影响。

3）国际市场价格的带动。美国等国家大规模开发生物能源，对玉米和大豆等粮食需求量大幅增加；另外，欧洲和澳大利亚小麦严重减产导致产品短缺。这些因素导致国际市场粮价大幅度上涨，进而拉动了国内粮食价格上升。现阶段日本的地震对食品价格有一定的影响。

12.6　马克立夫模型

问题分析部分对问题二的分析显示，由于市场的随机变化性，食品的零售价格指数变化受市场上众多不确定因素共同影响，因而其变化也有不确定性。

针对未来一段时间内的价格,既对历史数据有一定的参考性,又具有一定的随机变化性的特点，在此，引入动态经济学模型中的马克立夫链的概念来对 4 和 5 月份的价格增长趋势进行预测。

首先，本模型中马克立夫链的数据是 42 种食品在 2010-3-5～2011-3-25 之间每隔 10 天的价格增长率，在第一问中已算出，每种产品都有 38 组数据。

本节中，将以第一种食品菜籽油为例，取 2010-3-5～2011-3-15 之间 37 组增长率参加计算，第 38 组增长率作为与模型的预测数据进行比对，从而验证模型的合理性，如表 12-4 所示。

表 12-4　2010-3-5~2011-3-25 各时间段菜籽油的价格增长状态

时间	状态	时间	状态	时间	状态
10-3-5	-----	10-7-15	0 相对稳定	10-11-25	0 相对稳定
10-3-15	0 相对稳定	10-7-25	0 相对稳定	10-12-5	2 快速增长
10-3-25	-1 缓慢下降	10-8-5	0 相对稳定	10-12-15	0 相对稳定
10-4-5	0 相对稳定	10-8-15	1 缓慢增长	10-12-25	1 缓慢增长
10-4-15	0 相对稳定	10-8-25	0 相对稳定	11-1-5	0 相对稳定
10-4-25	0 相对稳定	10-9-5	1 缓慢增长	11-1-15	0 相对稳定
10-5-5	0 相对稳定	10-9-15	0 相对稳定	11-1-25	1 缓慢增长
10-5-15	-1 缓慢下降	10-9-25	0 相对稳定	11-2-5	0 相对稳定
10-5-25	0 相对稳定	10-10-5	0 相对稳定	11-2-15	0 相对稳定
10-6-5	0 相对稳定	10-10-15	2 快速增长	11-2-25	1 缓慢增长
10-6-15	0 相对稳定	10-10-25	2 快速增长	11-3-5	0 相对稳定
10-6-25	0 相对稳定	10-11-5	1 缓慢增长	11-3-15	0 相对稳定
10-7-5	0 相对稳定	10-11-15	1 缓慢增长	11-3-25	0 相对稳定

在 MATLAB 程序中，主要参见以下几步。

Step 1：求出各食品数据的增长率。

Step 2：编程，使快速上升$(\geqslant 0.03)$，在程序中用“2”表示；缓慢上升$(0,0.03)$，在程序中用“1”表示；相对不变0，在程序中用“0”表示；缓慢下降$(-0.03,0)$，在程序中用“-1”表示；快速下降$(\leqslant -0.03)$，在程序中用“-2”表示；得到各类食品在不同时期的B_i。

Step 3：统计相邻增长率变化一致的次数C_{ij}，就菜籽油而言，在 2010-3-5～2011-3-15，其增长率为先快速增长后相对不变出现的次数为‘20’=1；具体 42 种食品的输出情况见附录 1。

Step 4：对每一种食品，分五类进行叠加求和，分别为“先快速增长”、“先缓慢增长”、“先相对不变”、“先缓慢下降”、“先快速下降”，得到D_i。

Step 5：求出一步转移概率矩阵E；即C_{ij}每行的每五个数据依次与对应的D_i相除，得到概率矩阵E的一行。

Step 6：使用求出的一步转移概率矩阵E，并求出不同时期的状态概率。

针对D_i，由 MATLAB 程序得到：

```
clc,clear,close all
load('data.mat')                                    %加载数据
for j=1:42
     for i=1:38
          a(j,i)=(x(j,i+1)-x(j,i))/x(j,i);          %求增长率
     end
end

b=zeros(42,38);
c=zeros(42,25);
%分别为不同增长率赋值
for j=1:42
     for i=1:38
          if  a(j,i)>=0.03                          %2 快速增长
               b(j,i)=2;
          elseif  (a(j,i)<0.03)&&(a(j,i)>0)         %1 缓慢增长
               b(j,i)=1;
          elseif  a(j,i)==0
               b(j,i)=0;                            %0 相对稳定
          elseif  a(j,i)>-0.03  &&  a(j,i)<0        %-1 缓慢下降
               b(j,i)=-1;
          elseif a(j,i)<-0.03                       %-2 快速下降
               b(j,i)=-2;
      end
   end
end
%统计相连增长率值特征
for j=1:42
for i=1:36
     if  (b(j,i)==2&&b(j,i+1)==2)         %当前时刻快速增长，下一时刻快速增长
           c(j,1)=c(j,1)+1;
     elseif(b(j,i)==2&&b(j,i+1)==1)       %当前时刻快速增长，下一时刻缓慢增长
           c(j,2)=c(j,2)+1;
     elseif(b(j,i)==2&&b(j,i+1)==0)       %当前时刻快速增长，下一时刻相对稳定
           c(j,3)=c(j,3)+1;
     elseif(b(j,i)==2&&b(j,i+1)==-1)      %当前时刻快速增长，下一时刻缓慢下降
```

```
            c(j,4)=c(j,4)+1;
      elseif(b(j,i)==2&&b(j,i+1)==-2)    %当前时刻快速增长，下一时刻快速下降
            c(j,5)=c(j,5)+1;
      elseif(b(j,i)==1&&b(j,i+1)==2)     %当前时刻缓慢增长，下一时刻快速增长
           c(j,6)=c(j,6)+1;
      elseif(b(j,i)==1&&b(j,i+1)==1)     %当前时刻缓慢增长，下一时刻缓慢增长
            c(j,7)=c(j,7)+1;
      elseif(b(j,i)==1&&b(j,i+1)==0)     %当前时刻缓慢增长，下一时刻相对稳定
            c(j,8)=c(j,8)+1;
      elseif(b(j,i)==1&&b(j,i+1)==-1)    %当前时刻缓慢增长，下一时刻缓慢下降
            c(j,9)=c(j,9)+1;
      elseif(b(j,i)==1&&b(j,i+1)==-2)    %当前时刻缓慢增长，下一时刻快速下降
            c(j,10)=c(j,10)+1;
     elseif(b(j,i)==0&&b(j,i+1)==2)      %当前时刻相对稳定，下一时刻快速增长
            c(j,11)=c(j,11)+1;
      elseif(b(j,i)==0&&b(j,i+1)==1)     %当前时刻相对稳定，下一时刻缓慢增长
            c(j,12)=c(j,12)+1;
      elseif(b(j,i)==0&&b(j,i+1)==0)     %当前时刻相对稳定，下一时刻相对稳定
            c(j,13)=c(j,13)+1;
      elseif(b(j,i)==0&&b(j,i+1)==-1)    %当前时刻相对稳定，下一时刻缓慢下降
            c(j,14)=c(j,14)+1;
      elseif(b(j,i)==0&&b(j,i+1)==-2)    %当前时刻相对稳定，下一时刻快速下降
            c(j,15)=c(j,15)+1;
      elseif(b(j,i)==-1&&b(j,i+1)==2)    %当前时刻缓慢下降，下一时刻快速增长
            c(j,16)=c(j,16)+1;
      elseif(b(j,i)==-1&&b(j,i+1)==1)    %当前时刻缓慢下降，下一时刻缓慢增长
            c(j,17)=c(j,17)+1;
      elseif(b(j,i)==-1&&b(j,i+1)==0)    %当前时刻缓慢下降，下一时刻相对稳定
            c(j,18)=c(j,18)+1;
      elseif(b(j,i)==-1&&b(j,i+1)==-1)   %当前时刻缓慢下降，下一时刻缓慢下降
            c(j,19)=c(j,19)+1;
      elseif(b(j,i)==-1&&b(j,i+1)==-2)   %当前时刻缓慢下降，下一时刻快速下降
            c(j,20)=c(j,20)+1;
      elseif(b(j,i)==-2&&b(j,i+1)==2)    %当前时刻快速下降，下一时刻快速增长
            c(j,21)=c(j,21)+1;
      elseif(b(j,i)==-2&&b(j,i+1)==1)    %当前时刻快速下降，下一时刻缓慢增长
            c(j,22)=c(j,22)+1;
      elseif(b(j,i)==-2&&b(j,i+1)==0)    %当前时刻快速下降，下一时刻相对稳定
            c(j,23)=c(j,23)+1;
      elseif(b(j,i)==-2&&b(j,i+1)==-1)   %当前时刻快速下降，下一时刻缓慢下降
        c    (j,24)=c(j,24)+1;
      elseif(b(j,i)==-2&&b(j,i+1)==-2)   %当前时刻快速下降，下一时刻快速下降
        c    (j,25)=c(j,25)+1;
    end
end
end
d=zeros(42,5);
%累加求和
for i=1:42
      for j=1:25
            if(j<6)
                   d(i,1)=d(i,1)+c(i,j);  %下一时刻快速增长的个数
            elseif(j>5&&j<11)
                   d(i,2)=d(i,2)+c(i,j);  %下一时刻缓慢增长的个数
            elseif(j>10&&j<16)
                   d(i,3)=d(i,3)+c(i,j);  %下一时刻相对稳定的个数
            elseif(j>15&&j<21)
```

```
                d(i,4)=d(i,4)+c(i,j);       %下一时刻缓慢下降的个数
          else
                d(i,5)=d(i,5)+c(i,j);       %下一时刻快速下降的个数
          end
    end
end
```

由 MATLAB 程序得到：

$D_1=3$	$D_2=7$	$D_3=24$	$D_4=2$	$D_5=0$
$C_{11}=1$	$C_{12}=1$	$C_{13}=1$	$C_{14}=0$	$C_{15}=0$
$C_{21}=0$	$C_{22}=1$	$C_{23}=6$	$C_{24}=0$	$C_{25}=0$
$C_{31}=2$	$C_{32}=5$	$C_{33}=15$	$C_{34}=2$	$C_{35}=0$
$C_{41}=0$	$C_{42}=0$	$C_{43}=2$	$C_{44}=0$	$C_{45}=0$
$C_{51}=0$	$C_{52}=0$	$C_{53}=0$	$C_{54}=0$	$C_{55}=0$

从而获得一步转移概率矩阵 E，MATLAB 编程如下：

```
%一步转移概率矩阵;
f=b(:,37);
e= zeros(5,5);
for i=1:42
     for j=1:25
          if(j<6)
                if(d(i,1)==0)
                         e(5,j)=0;
                else
                e(1,j)=c(i,j)/d(i,1);%一步转移概率，每五个数据依次与对应的 Di 相除
                end
          elseif(j>5&&j<11)
                if(d(i,2)==0)
                         e(5,j-5)=0;
                else
                e(2,j-5)=c(i,j)/d(i,2);%一步转移概率，每五个数据依次与对应的 Di 相除
                end
          elseif(j>10&&j<16)
                if(d(i,3)==0)
                         e(5,j-10)=0;
                else
                e(3,j-10)=c(i,j)/d(i,3);%一步转移概率，每五个数据依次与对应的
                Di 相除
                end
          elseif(j>15&&j<21)
                if(d(i,4)==0)
                        e(5,j-15)=0;
                else
                e(4,j-15)=c(i,j)/d(i,4);%一步转移概率，每五个数据依次与对应的
                Di 相除
                end
          else
               if(d(i,5)==0)
                        e(5,j-20)=0;
               else
               e(5,j-20)=c(i,j)/d(i,5);%一步转移概率，每五个数据依次与对应的 Di
              相除
               end
```

```
                end
            end
            g=zeros(i,5);                              %预测 4 和 5 月的增长率
            if(f(i,1)==2)
                  h=[1 0 0 0 0 ]*e
                  for k=1:6
                       h=h*e                           %状态概率
                  end
            elseif(f(i,1)==1)
                 g(i,:)=[0 1 0 0 0 ];
                 h=g(i,:)*e
                 for k=1:6
                      h=h*e                            %状态概率
                 end
            elseif(f(i,1)==0)
                 g(i,:)=[0 0 1 0 0 ];
                 h=g(i,:)*e
                 for k=1:6
                      h=h*e                            %状态概率
                 end
            elseif(f(i,1)==-1)
                 g(i,:)=[0 0 0 1 0 ];
                 h=g(i,:)*e
                 for k=1:6
                      h=h*e                            %状态概率
                 end
            elseif(f(i,1)==-2)
                 g(i,:)=[0 0 0 0 1 ];
                 h=g(i,:)*e
                 for k=1:6
                     h=h*e                             %状态概率
                 end
        end
end
```

从而获得一步转移概率矩阵为：

$$E=\begin{bmatrix} 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1429 & 0.8571 & 0 & 0 \\ 0.0833 & 0.2083 & 0.6250 & 0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果目前预测对象处于状态 B_i $(i=1,2,3,4,5)$，这时 E_{ij} 就描述了目前状态 B_i 在未来将转向状态 B_j $(j=1,2,3,4,5)$ 的可能性。按最大概率原则，即选择（E_{i1}, E_{i2} E_{i3}, E_{i4}, E_{i5}）中最大者对应的状态即为预测结果。

由于 2011-3-5～2011-3-15 的菜籽油价格的增长率状态为 E_3，即相对稳定。而经由一次转移到达 5 种状态的概率分别为：E_{31}=0.0833，$E_{32}=0.2083$，E_{33}=0.6250，$E_{34}=0.0833$，$E_{35}=0$；

$$\text{Max}\ \{E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}, E_{i4}, E_{i5}\}=E_{33}=0.6250$$

而且，E_{31}，E_{32}，E_{34}，E_{35} 与 E_{33} 相比均相差较大。

所以预测所得结果显示：2011-3-15～2011-3-25 的价格将会继续保持稳定，且增长幅

度为 0。

将预测结果与实际结果相比较，由表 12-4 可知，2011-3-15～2011-3-25 的菜籽油价格增长状态为相对稳定，且增长幅度也为 0，因此可以说明此预测结果是准确的。

同时，在马克立夫运算过程中,不同时期的状态概率用状态向量表示。公式为 $E_i(n)=E_i(n-1)E$,按此公式，也可以计算出 2011-3-15～2011-3-25 的价格变动趋势，其中 E 为上述中的一步转移概率矩阵。

$$E_i(0)=[0,0,1,0,0]$$

$$E_i(1)=E_i(0)E=[0,0,1,0,0]\begin{bmatrix} 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1429 & 0.8571 & 0 & 0 \\ 0.0833 & 0.2083 & 0.6250 & 0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_i(1)=E_i(0)E=[0.0833\quad 0.2083\quad 0.625\quad 0.0833\quad 0]$$

$$E_i(2)=E_i(1)E=[0.0799\quad 0.1877\quad 0.6803\quad 0.0521\quad 0]$$

$$E_i(3)=E_i(2)E=[0.0833\quad 0.1952\quad 0.6648\quad 0.0567\quad 0]$$

$$E_i(4)=E_i(3)E=[0.0832\quad 0.1942\quad 0.6673\quad 0.0554\quad 0]$$

$$E_i(5)=E_i(4)E=[0.0833\quad 0.1954\quad 0.6666\quad 0.0556\quad 0]$$

$$E_i(6)=E_i(5)E=[0.0833\quad 0.1944\quad 0.6667\quad 0.0555\quad 0]$$

对每个状态向量，均取其中最大的那个概率值；则以上结果表明：在未来两个月内，菜籽油的价格趋于稳定状态的概率较呈现其他状态的概率大得多，因此可以说价格在 2011 年 4 和 5 月份将相对稳定。

对于其他 41 种食品，将依然按照上述马克立夫链的计算方法依次计算，依次得出其余 41 种食品的相关数据和预测数据。

12.6.1　模型求解步骤及结果

在 MATLAB 程序中，主要参见以下主要几步。

Step 1：求出各食品数据的增长率。

Step 2：编程，使快速上升$(\geqslant 0.03)$，在程序中用“2”表示；缓慢上升$(0,0.03)$，在程序中用“1”表示；相对不变（0），在程序中用“0”表示；缓慢下降$(-0.03,0)$，在程序中用“-1”表示；快速下降$(\leqslant -0.03)$，在程序中用“-2”表示；得到各类食品在不同时期的 B_i。

Step 3：统计相邻增长率变化一致的次数 C_{ij}，就菜籽油而言，在 2010-3-5～2011-3-15，其增长率为先快速增长后相对不变出现的次数为“20”=1；具体 42 种食品的输出情况见附录 1。

Step 4：对于每一种食品，分五类进行叠加求和，分别为“先快速增长”、“先缓慢增长”、“先相对不变”、“先缓慢下降”、“先快速下降”，得到 D_i。

Step 5：求出一步转移概率矩阵 E；即 C_{ij} 每行的每五个数据依次与对应的 D_i 相除，得到概率矩阵 E 的一行。

Step 6：使用求出的一步转移概率矩阵 E，并求出不同时期的状态概率。

整理输出的结果，易得到表 12-5。

表 12-5　模型结果

食品名称	2011-4-5	2011-4-15	2011-4-25	2011-5-5	2011-5-15	2011-5-25
1 菜籽油	0	0	0	0	0	0
2 大豆油	0	0	0	0	0	0
3 花生油	0	0	0	0	0	0
4 大豆调和油	0	0	0	0	0	0
5 鲜猪肉（精瘦肉）	1	1	1	1	1	1
6 鲜猪肉（肋条肉）	-2	-2	-2	-2	-2	-2
7 鲜牛肉	0	0	0	0	0	0
8 鲜羊肉（带骨）	0	0	0	0	0	0
9 鲜羊肉（去骨）	0	0	0	0	0	0
10 活鸡	0	0	0	0	0	0
11 鸡肉	-1	-1	-1	-1	-1	-1
12 鸡蛋	-2	-1	-1	-1	-1	-1
13 带鱼	1	1	1	1	1	1
14 草鱼	1	1	-1	-1	-1	-1
15 鲤鱼	0	0	0	0	0	0
16 芹菜	-2	-2	-2	-2	-2	-2
17 大白菜	-2	-2	-2	-2	-2	-2
18 油菜	-2	-2	-2	-2	-2	-2
19 黄瓜	-2	-2	-2	-2	-2	-2
20 萝卜	2	2	2	2	2	2
21 茄子	2	2	2	2	2	2
22 西红柿	-2	2	2	2	2	2
23 土豆	2	-2	2	2	2	2
24 胡萝卜	2	-2	-2	-2	-2	-2
25 青椒	2	3	-2	-2	-2	-2
26 尖椒	2	2	2	2	2	2
27 圆白菜	2	2	2	2	2	2
28 豆角	-2	-2	-2	-2	-2	-2
29 蒜苔	-2	-2	-2	-2	-2	-2
30 韭菜	-2	-2	-2	2	2	2
31 芦柑	0	0	0	0	0	0
32 苹果	-2	2	2	2	2	2
33 香蕉	2	2	2	2	2	2
34 西瓜	2	2	2	2	2	2
35 豆腐	0	0	0	0	0	0
36 食用盐	0	0	0	0	0	0
37 绵白糖	0	0	0	0	0	0
38 白砂糖	0	0	0	0	0	0
39 红糖	0	0	0	0	0	0
40 酱油	0	0	0	0	0	0
41 醋	0	0	0	0	0	0
42 鲜牛奶	0	0	0	0	0	0

（注：快速上升，在程序中用“2”表示；缓慢上升，在程序中用“1”表示；相对不变，在程序中用“0”表示；缓慢下降，在程序中用“-1”表示；快速下降，在程序中用“-2”表示。）

12.6.2　结果分析

本文使用概率矩阵来完成预测 2011 年 4 和 5 月的城市居民食品零售价格走势，误差很小。由于食品的价格增长受诸多不确定的因素的影响，不能笼统的进行拟合计算分析，使用概率矩阵是根据下一次的价格所出现的状态的最大可能概率来进行预测，可靠性高。

4~5 月份预测数据：

```
                    1、菜籽油
0.0833    0.2083    0.6250    0.0833         0
0.0799    0.1877    0.6803    0.0521         0
0.0833    0.1952    0.6648    0.0567         0
0.0832    0.1942    0.6673    0.0554         0
0.0833    0.1945    0.6666    0.0556         0
0.0833    0.1944    0.6667    0.0555         0
0.0833    0.1944    0.6667    0.0556         0
                    2、大豆油
0    0.2500    0.6500    0.1000         0
0.0250    0.2625    0.6075    0.1050         0
0.0263    0.2819    0.5891    0.1028         0
0.0282    0.2863    0.5855    0.1000         0
0.0286    0.2891    0.5837    0.0986         0
0.0289    0.2902    0.5831    0.0978         0
0.0290    0.2908    0.5828    0.0974         0
                    3、花生油
0.0714    0.1786    0.7143    0.0357         0
0.0510    0.1276    0.7959    0.0255         0
0.0569    0.1421    0.7726    0.0284         0
0.0552    0.1380    0.7793    0.0276         0
0.0557    0.1392    0.7774    0.0278         0
0.0555    0.1388    0.7779    0.0278         0
0.0556    0.1389    0.7777    0.0278         0
                    4、大豆调和油
0.1579    0.0526    0.6316    0.0526    0.1053
0.1102    0.0938    0.6436    0.0753    0.0770
0.1204    0.0916    0.6000    0.1015    0.0865
0.1131    0.1023    0.5944    0.1088    0.0815
0.1143    0.1031    0.5839    0.1157    0.0830
0.1128    0.1056    0.5813    0.1182    0.0821
0.1129    0.1061    0.5786    0.1201    0.0823
                    5、鲜猪肉 （精瘦肉）
0    0.7500    0.2500        0         0
0.2604    0.2813    0.1458    0.1146    0.1979
0.2106    0.2545    0.2180    0.1429    0.1741
0.2158    0.2690    0.2209    0.1330    0.1613
…………………………………………………………
                    40、酱油
0.0476    0.1429    0.6190    0.1905         0
0.0295    0.1382    0.5885    0.2438         0
0.0280    0.1388    0.6092    0.2239         0
0.0290    0.1397    0.6068    0.2245         0
0.0289    0.1396    0.6061    0.2254         0
0.0289    0.1395    0.6064    0.2252         0
0.0289    0.1396    0.6064    0.2252         0
```

```
                    41、醋
0    0.1250    0.7500    0.0833    0.0417
0.0500    0.1146    0.7167    0.0875    0.0313
0.0458    0.1365    0.7052    0.0826    0.0299
0.0546    0.1317    0.6982    0.0861    0.0294
0.0527    0.1361    0.6976    0.0845    0.0291
0.0544    0.1347    0.6965    0.0854    0.0291
0.0539    0.1356    0.6965    0.0850    0.0290
                    42、鲜牛奶
0.0303    0.0606    0.9091         0         0
0.0275    0.0551    0.9174         0         0
0.0278    0.0556    0.9166         0         0
0.0278    0.0556    0.9167         0         0
0.0278    0.0556    0.9167         0         0
0.0278    0.0556    0.9167         0         0
0.0278    0.0556    0.9167    0         0
```

（注：每类食品输出数据的第一行为预测的 2011-3-25 的增长状态，后六行分别为 2011-4-5、2011-4-15、2011-4-25、2011-5-5、2011-5-15 和 2011-5-25 的增长状态，其中每行的最大的概率值表示该期最可能出现的增长状态。）

12.7　时间序列指数平滑预测法

由于上述的马尔科夫链模型只针对食品的价格增长率问题展开论述。在下文中，我们将对各食品的价格进行合理预测，以期更直观的反应物价的变化情况。

12.7.1　一次指数平滑预测法

一次指数平滑预测法以 $\alpha(1-\alpha)^i$ 为权数 $(0<\alpha<1),(i=0,1,2,3,\ldots)$ 对时间序列 $\{y_t\}$ 进行加权平均的一种预测方法。

y_t 的权数为 α，y_{t-1} 的权数为 $\alpha(1-\alpha)$，y_{t-2} 的权数为 $\alpha(1-\alpha)^2$，依次类推，其计算公式如下：

$$\hat{y}_{t+1}=S_t^{(1)}=\alpha y_t+(1-\alpha)S_{t-1}^{(1)}$$

其中：y_t 表示第 t 期实际值；$\hat{y}_{t+1}$ 表示第 t+1 期预测值；$S_t^{(1)}$，$S_{t-1}^{(1)}$ 分别表示第 t-1，t 期一次指数平滑值；α 表示平滑系数，0<α<1。

预测标准误差为：

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n-1}(y_{t+1}-\hat{y}_{t+1})^2}{n-1}}$$

上式中，n 为时间序列所含原始数据个数。

以菜子油价格为例，分别取不同的 α 平滑系数，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load('data.mat')                                   %加载数据
yx =[4.81;4.8;4.73;4.7;4.7;4.73;4.75;4.75;5.43;5.78;5.85;5.88;5.93];
yt=yx;                                             %赋值
```

```
n=length(yt);                          %长度
alpha=[0.1 0.3 0.9];                   %α 平滑系数
m=length(alpha);                       %长度
yhat(1,1:m)=(yt(1)+yt(2))/2;
for i=2:n
     yhat(i,:)=alpha*yt(i-1)+(1-alpha).*yhat(i-1,:);  %一次指数平滑预测法
end
yhat;                                      %预测值
err=sqrt(mean((repmat(yt,1,m)-yhat).^2))   %预测误差总和
yhat114=alpha*yt(n)+(1-alpha).*yhat(n,:)   %预测下一时刻值
```

运行程序输出结果如下：

```
err =
    0.5272    0.3912    0.2258
yhat114 =
    5.1900    5.6569    5.9246
```

得到表 12-6 结果。

表 12-6　一次指数平滑

$S_0^{(1)}=y_1=4.81$			$\alpha=0.1$		$\alpha=0.3$		$\alpha=0.9$	
日期	时期 t	价格	平滑预测值	误差	平滑预测值	误差	平滑预测值	误差
均价(10-3)	1	4.81	4.81	0	4.81	0	4.81	0
均价(10-4)	2	4.8	4.809	0.009	4.807	0.007	4.809	-0.009
均价(10-5)	3	4.73	4.808	0.078	4.805	0.075	4.800	-0.0709
均价(10-6)	4	4.7	4.800	0.100	4.782	0.082	4.737	-0.0371
均价(10-7)	5	4.7	4.790	0.090	4.758	0.0578	4.704	-0.0037
均价(10-8)	6	4.73	4.781	0.0512	4.740	0.0104	4.700	0.0296
均价(10-9)	7	4.75	4.776	0.0261	4.737	-0.0127	4.727	0.0230
均价(10-10)	8	4.75	4.774	0.0235	4.741	-0.009	4.748	0.00230
均价(10-11)	9	5.43	4.771	-0.659	4.744	-0.686	4.750	0.680
均价(10-12)	10	5.78	4.837	-0.943	4.950	-0.830	5.362	0.4180
均价(11-1)	11	5.85	4.931	-0.919	5.199	-0.651	5.738	0.112
均价(11-2)	12	5.88	5.023	-0.857	5.394	-0.486	5.839	0.041
均价(11-3)	13	5.93	5.109	-0.821	5.54	-0.390	5.876	0.054
预测（11-4）	14		5.191		5.657		5.925	
预测（11-5）	15							

易得到 $S_{a=0.1}=0.548$，$S_{a=0.3}=0.407$，$S_{a=0.9}=0.235$，$\alpha=0.1,\alpha=0.3$ 的误差比 $\alpha=0.9$ 的误差大，所以在此选择 $\alpha=0.9$ 进行预测，得到 2011 年 4 月份菜籽油的价格预测值将为 5.9246 元。由于预测的数据很多，一次指数平滑预测法不能满足要求，故下面将用多次指数平滑预测法来进行食品价格预测。

12.7.2　多次指数平滑预测法

由一次指数平滑预测可知，得出 $\alpha=0.9$ 的误差最小，故在此选用 $\alpha=0.9$ 进行相关分析。

多次指数平滑预测法是对少一次指数平滑值再作一次指数平滑来进行预测的一种方法，但第 t+1 期预测值并非第 t 期的多次指数平滑值，而是采用下列计算公式进行预测：

$$\begin{cases} S_t^{(i)} = \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{(i)} \\ S_t^{(i+1)} = \alpha S_t^{(i)} + (1-\alpha) S_{t-1}^{(i+1)} \\ \hat{y}_{t+T} = a_t + b_t T \end{cases}$$

其中：

$$a_t = 2S_t^{(i)} - S_t^{(i+1)}$$

$$b_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_t^{(i)} - S_t^{(i+1)})$$

$S_t^{(i)}$ 表示第 t 期的 i 次指数平滑值；$S_t^{(i+1)}$ 表示第 t 期的 i+1 次指数平滑值；y_t 表示第 t 期的实际值；$\hat{y}_{t+T}$ 表示第 $t+T$ 期预测值；α 表示平滑系数，$\alpha = 0.9$。

预测的标准误差为：

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{n-2}}$$

MATLAB 程序如下：

```
%二次指数
clc,clear
load('data.mat')                %加载数据
yx =[4.81;4.8;4.73;4.7;4.7;4.73;4.75;4.75;5.43;5.78;5.85;5.88;5.93];
yt=yx;
n=length(yt);
alpha=0.9;                      %平滑系数
st1(1)=yt(1);                   %预测值初始值
st2(1)=yt(1);                   %预测值初始值
for i=2:n
    st1(i)=alpha*yt(i)+(1-alpha)*st1(i-1);    % S_t^(i) = αy_t + (1-α)S_{t-1}^(i)
    st2(i)=alpha*st1(i)+(1-alpha)*st2(i-1);   % S_t^(i+1) = αS_t^(i) + (1-α)S_{t-1}^(i+1)
end
a=2*st1-st2                          % a_t = 2S_t^(i) - S_t^(i+1)
b=alpha/(1-alpha)*(st1-st2)          % b_t
yhat=a+b;
yhat=yhat';
str=char(['C',int2str(n+2)]);        %字符型输出
%%三次指数平滑
clc,clear
load('data.mat')                     %加载数据
yx =[4.81;4.8;4.73;4.7;4.7;4.73;4.75;4.75;5.43;5.78;5.85;5.88;5.93];
yt=yx;
n=length(yt);
alpha=0.9;
st1_0=mean(yt(1:3));                 %均值
st2_0=st1_0;                         %初始值
st3_0=st1_0;                         %初始值
st1(1)=alpha*yt(1)+(1-alpha)*st1_0;  %初始值
```

```
st2(1)=alpha*st1(1)+(1-alpha)*st2_0;     %初始值
st3(1)=alpha*st2(1)+(1-alpha)*st3_0;     %初始值
for i=2:n
     st1(i)=alpha*yt(i)+(1-alpha)*st1(i-1);     %一次预测 S't
     st2(i)=alpha*st1(i)+(1-alpha)*st2(i-1);    %二次预测 S''t
     st3(i)=alpha*st2(i)+(1-alpha)*st3(i-1);    %三次预测 S'''t
end
st1=[st1_0,st1];                              %合并初值
st2=[st2_0,st2];                              %合并初值
st3=[st3_0,st3];                              %合并初值
a=3*st1-3*st2+st3;
b=0.5*alpha/(1-alpha)^2*((6-5*alpha)*st1-2*(5-4*alpha)*st2+(4-3*alpha)*st
3);
c=0.5*alpha^2/(1-alpha)^2*(st1-2*st2+st3);
yhat=a+b+c;                                   %预测模型值
yhat=yhat';                                   %转置
```

整理输出结果如表 12-7 所示。

表 12-7　多次指数平滑结果

取 $\alpha=0.9$，$S_0^{(1)}=S_0^{(2)}=S_0^{(3)}=y_1=4.82$

日期	时间 t	实际平均价格	一次指数平滑值	二次指数平滑值	三次指数平滑值
均价(10-3)	1	4.82	4.82	4.82	4.82
均价(10-4)	2	4.8	4.802	4.8038	4.805
均价(10-5)	3	4.7333	4.74	4.7464	4.7523
均价(10-6)	4	4.7	4.7033	4.7076	4.7121
均价(10-7)	5	4.7	4.7	4.7008	4.7019
均价(10-8)	6	4.7267	4.724	4.7217	4.7197
均价(10-9)	7	4.75	4.7477	4.7451	4.7425
均价(10-10)	8	4.99	4.966	4.9439	4.9238
均价(10-11)	9	5.4633	5.416	5.3688	5.3243
均价(10-12)	10	5.8033	5.7693	5.7293	5.6888
均价(11-1)	11	5.86	5.8543	5.8418	5.8265
均价(11-2)	12	5.8967	5.893	5.8879	5.8817
均价(11-3)	13	5.93	5.9267	5.9228	5.9187
预测（11-4）	14				
预测（11-5）	15				

于是可知：

$$a_{13}=2S_{13}^{(2)}-S_{13}^{(3)}=5.927$$

$$b_{13}=0.0369$$

于是有线性预测方程：

$$\hat{y}_{t+T}=a_t+b_tT=5.927+0.0369T \qquad t=13$$

所以价格将逐渐上升。

利用此方程，分别取$T=1$、2便求得 4 月份和 5 月份的价格预测平均值分别为：5.9639 元和 6.0008 元。

12.7.3　结果分析

由上述结果可知，2011-4 月菜籽油的平均物价为5.9639元/500g，2011-5 月菜籽油的平均物价为6.0008元/500g，价格较2011-3-25 增长1.19%，以这个速度增长，CPI 又将达到历史新高，造成市场严重通货膨胀。而在国家宏观调控下，国家会做相应反应，应该避免市场严重通货膨胀，物价指数不会再次大幅度攀升，故此模型对食品价格的预测误差很大，故预测的数据仅供参考使用。

12.8　时间序列线性二次移动平均法预测法

12.8.1　简单的一次移动平均法

设时间序列为$\{y_t\}$,取移动平均的项数为 n，则第 t+1 期预测值的计算公式为：

$$\hat{y}_{t+1}=M_t^{(1)}=\frac{y_t+y_{t-1}+\dots+y_{t-n+1}}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}y_{t-n+j}$$

上式中：y_t 表示第 t 期实际值；$M_t^{(1)}$表示第t期一次移动平均数；$\hat{y}_{t+1}$ 表示第$t+1$期预测值（$t\geqslant n$）；n 为时间序列$\{y_t\}$所含原始数据的个数。

12.8.2　线性二次移动平均法步骤

把前面的一次移动平均值记为$M_t^{(1)}$，把二次移动平均值记为$M_t^{(2)}$，从而有：

$$M_t^{(2)}=\frac{M_t^{(1)}+M_{t-1}^{(1)}+\cdots M_{t-n+1}^{(1)}}{n}=M_{t-1}^{(2)}+\frac{M_t^{(1)}+M_{t-n}^{(1)}}{n}$$

设时间序列｛y_t｝可表示为时间 t 的线性模型，即：

$$y_t=a+bt+\varepsilon_t$$

式中，ε_t 为随机项。

预测时，难以考虑ε_t，故现在假定$y_t=a+bt$，从而：

$$M_t^{(1)}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}y_{t-i}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[a+b(t-i)]=a+bt-\frac{(n-1)}{2}b$$

可见，一次移动平均值$M_t^{(1)}$，滞后于实际值y_t。

同样对$M_t^{(2)}$有：

$$M_t^{(2)}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}M_{t-i}^{(1)}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[a+b(t-i)-\frac{(n-1)}{2}b\right]=a+bt-(n-1)b=M_t^{(1)}-\frac{(n-1)}{2}b$$

由此式可得：

$$b = \frac{2}{n-1}\left(M_t^{(1)} - M_t^{(2)}\right)$$

$$\hat{y}_{t+\tau} = a + b(t+\tau) = M_t^{(1)} + \frac{(n-1)}{2}b + b\tau = 2M_t^{(1)} - M_t^{(2)} + b\tau$$

即 $\begin{cases} \hat{a}_t = 2M_t^{(1)} - M_t^{(2)} \\ \hat{b}_t = \dfrac{2}{n-1}(M_t^{(1)} - M_t^{(2)}) \end{cases}$

则预测方程变为：

$$\hat{y}_{t+\tau} = \hat{a}_t + \hat{b}_t\,\tau$$

式中，τ 为预测超前期。

则 2011-4-5 的预测价格可表示为：

$$\hat{y}_{39+1} = \hat{a}_t + \hat{b}_t \times 1$$

注意： 项数 n 的数值，要根据时间序列的特点而定，不宜过大或过小，n 过大会降低移动平均数的敏感性，影响预测的准确性；n 过小，移动平均数易受随机变动的影响，难以反映实际趋势。一般取 n 得大小能包含季节变动和周期变动的时期为好，这样可以消除它们的影响，所以这里就取 n=3，表示一个月的数据波动情况。

以菜籽油为例，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
%菜籽油的价格预测程序
x1=[4.83 4.83 4.8  4.8 4.8 4.8 4.8 4.7 4.7 4.7 4.7 4.7 4.7 4.7 4.7 4.7
    4.74    4.74    4.75    4.75    4.75    4.75    4.92    5.3 5.43
    5.48    5.48    5.78    5.78    5.85    5.85    5.85    5.88    5.88
    5.88    5.93    5.93    5.93    5.93];
x1=x1';                                       %转置
for i=1:37
     m1(i+2)=(x1(i)+x1(i+1)+x1(i+2))/3;       %一次移动平均值
end
for i=3:37
     m2(i+2)=(m1(i)+m1(i+1)+m1(i+2))/3;       %二次移动平均值
end
m1=m1';                                       %转置
m2=m2';                                       %转置
a=2*m1-m2;                                    % â_t
b=m1-m2;                                      % b̂_t
for i=1:6
     y(:,i)=a(39,1)+b(39,1)*i;                %预测
end
y
y =
    5.9411    5.9467    5.9522    5.9578    5.9633    5.9689
>>
```

运行程序得到的结果如表 12-8 所示。

表 12-8　时间序列线性二次移动平均法预测结果

日期	编号	价格	$M_t^{(1)}$	$M_t^{(2)}$	$\hat{a}_t$	$\hat{b}_t$
均价(10-3-5)	1	4.83	……	……	……	……
均价(10-3-15)	2	4.83	……	……	……	……
均价(10-3-25)	3	4.8	4.82	……	……	……
均价(10-4-5)	4	4.8	4.81	……	……	……
均价(10-4-15)	5	4.8	4.8	4.81	4.79	-0.01
均价(10-4-25)	6	4.8	4.8	4.8033	4.7967	-0.0033
均价(10-5-5)	7	4.8	4.8	4.8	4.8	0
均价(10-5-15)	8	4.7	4.7667	4.7889	4.7444	-0.0222
均价(10-5-25)	9	4.7	4.7333	4.7667	4.7	-0.0333
均价(10-6-5)	10	4.7	4.7	4.7333	4.6667	-0.0333
均价(10-6-15)	11	4.7	4.7	4.7111	4.6889	-0.0111
均价(10-6-25)	12	4.7	4.7	4.7	4.7	0
均价(10-7-5)	13	4.7	4.7	4.7	4.7	0
均价(10-7-15)	14	4.7	4.7	4.7	4.7	0
均价(10-7-25)	15	4.7	4.7	4.7	4.7	0
均价(10-8-5)	16	4.7	4.7	4.7	4.7	0
均价(10-8-15)	17	4.74	4.7133	4.7044	4.7222	0.00889
均价(10-8-25)	18	4.74	4.7267	4.7133	4.74	0.0133
均价(10-9-5)	19	4.75	4.7433	4.7278	4.7589	0.0156
均价(10-9-15)	20	4.75	4.7467	4.7389	4.7544	0.00779
均价(10-9-25)	21	4.75	4.75	4.7467	4.7533	0.0033
均价(10-10-5)	22	4.75	4.75	4.7489	4.7511	0.0011
均价(10-10-15)	23	4.92	4.8067	4.7689	4.8444	0.0378
均价(10-10-25)	24	5.3	4.99	4.8489	5.1311	0.1411
均价(10-11-5)	25	5.43	5.2167	5.0044	5.4289	0.2122
均价(10-11-15)	26	5.48	5.4033	5.2033	5.6033	0.2
均价(10-11-25)	27	5.48	5.4633	5.3611	5.5656	0.1022
均价(10-12-5)	28	5.78	5.58	5.4822	5.6778	0.0978
均价(10-12-15)	29	5.78	5.68	5.5744	5.7856	0.1056
均价(10-12-25)	30	5.85	5.8033	5.6878	5.9189	0.1156
均价(11-1-5)	31	5.85	5.8267	5.77	5.8833	0.0567
均价(11-1-15)	32	5.85	5.85	5.8267	5.8733	0.0233
均价(11-1-25)	33	5.88	5.86	5.8456	5.8744	0.0144
均价(11-2-5)	34	5.88	5.87	5.86	5.88	0.01
均价(11-2-15)	35	5.88	5.88	5.87	5.89	0.01
均价(11-2-25)	36	5.93	5.8967	5.8822	5.9111	0.0144
均价(11-3-5)	37	5.93	5.9133	5.8967	5.93	0.01667
均价(11-3-15)	38	5.93	5.93	5.9133	5.9467	0.01667
预测（11-3-25）	39	5.93	5.93	5.9244	5.9356	0.00556
预测（11-4-5）	40			5.9411		
预测（11-4-15）	41			5.9467		
预测（11-4-25）	42			5.9522		
预测（11-5-5）	43			5.9578		
预测（11-5-15）	44			5.9633		
预测（11-5-25）	45			5.9689		

由表 12-8 可知，菜籽油在 2011-3-25 时预测价格为：

$$\hat{y}_{38+1} = \hat{a}_t + \hat{b}_t \times 1 = 5.9467 + 0.0167 = 5.9634$$

$$\Delta_{相对误差} = {(\hat{y}_{38+1} - y_{38+1})} \Big/ {y_{38+1}} = \frac{5.9634 - 5.93}{5.93} \times 100\% = 0.56\%$$

故模型预测的 2011-3-25 的菜籽油价格的误差为 $0.56\% < 5\%$，很小，故模型合理。从而根据该模型，预测出 2011-4 月～2011-5 月菜籽油的价格，可知，价格有一定的上升，但变化幅度不大，预测结果有一定的合理性。

MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
%各类食品的价格预测
%x 由 workplace 载入
load('data.mat')                                        %加载数据
x=x';
for i=1:37
     for j=1:42
      m1(i+2,j)=(x(i,j)+x(i+1,j)+x(i+2,j))/3;           %取平均
end
end
for i=3:37
     for j=1:42
m2(i+2,j)=(m1(i,j)+m1(i+1,j)+m1(i+2,j))/3;              %二次平均
end
end
a=2*m1-m2;                                              %系数 a(t)
b=m1-m2;                                                %系数 b(t)
for i=1:42
       for j=1:6
           y(i,j)=a(39,i)+b(39,i)*j;                    %预测
end
end
```

运行程序得到所有类食品价格预测结果，如表 12-9 所示。

表 12-9　各类食品预测结果

食品名称	2011-4-5	2011-4-15	2011-4-25	2011-5-5	2011-5-15	2011-5-25
1 菜籽油	5.9411	5.9467	5.9522	5.9578	5.9633	5.9689
2 大豆油	5.6133	5.63	5.6467	5.6633	5.68	5.6967
3 花生油	116.85	116.85	116.85	116.85	116.85	116.85
4 大豆调和油	63.067	63.4	63.733	64.067	64.4	64.733
5 鲜猪肉（精瘦肉）	13.29	13.3	13.31	13.32	13.33	13.34
6 鲜猪肉（肋条肉）	9.39	9.1967	9.0033	8.81	8.6167	8.4233
7 鲜牛肉	18.844	19.017	19.189	19.361	19.533	19.706
8 鲜羊肉（带骨）	21.697	21.77	21.843	21.917	21.99	22.063
9 鲜羊肉（去骨）	19.2	19.2	19.2	19.2	19.2	19.2
10 活鸡	11.933	11.92	11.907	11.893	11.88	11.867
11 鸡肉	8.0333	7.8867	7.74	7.5933	7.4467	7.3
12 鸡蛋	4.1333	4.05	3.9667	3.8833	3.8	3.7167
13 带鱼	11.261	11.523	11.786	12.048	12.31	12.572

续表

食品名称	2011-4-5	2011-4-15	2011-4-25	2011-5-5	2011-5-15	2011-5-25
14 草鱼	4.8267	4.58	4.3333	4.0867	3.84	3.5933
15 鲤鱼	5.7733	5.7167	5.66	5.6033	5.5467	5.49
16 芹菜	2.7644	2.6633	2.5622	2.4611	2.36	2.2589
17 大白菜	0.74778	0.77	0.79222	0.81444	0.83667	0.85889
18 油菜	1.4989	1.4967	1.4944	1.4922	1.49	1.4878
19 黄瓜	2.89	2.8467	2.8033	2.76	2.7167	2.6733
20 萝卜	0.99	1.04	1.09	1.14	1.19	1.24
21 茄子	3.2756	3.11	2.9444	2.7789	2.6133	2.4478
22 西红柿	3.1189	3.0867	3.0544	3.0222	2.99	2.9578
23 土豆	2.1922	2.11	2.0278	1.9456	1.8633	1.7811
24 胡萝卜	1.8256	1.73	1.6344	1.5389	1.4433	1.3478
25 青椒	4.7644	5.05	5.3356	5.6211	5.9067	6.1922
26 尖椒	6.9589	7.1233	7.2878	7.4522	7.6167	7.7811
27 圆白菜	1.1856	1.1567	1.1278	1.0989	1.07	1.0411
28 豆角	6.8411	6.95	7.0589	7.1678	7.2767	7.3856
29 蒜苔	5.2233	4.7067	4.19	3.6733	3.1567	2.64
30 韭菜	2.9956	2.85	2.7044	2.5589	2.4133	2.2678
31 芦柑	3.7378	3.8733	4.0089	4.1444	4.28	4.4156
32 苹果	5.4133	5.4933	5.5733	5.6533	5.7333	5.8133
33 香蕉	3.6044	3.7233	3.8422	3.9611	4.08	4.1989
34 西瓜	3.0922	3.2167	3.3411	3.4656	3.59	3.7144
35 豆腐	2.25	2.25	2.25	2.25	2.25	2.25
36 食用盐	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3
37 绵白糖	8.83	8.83	8.83	8.83	8.83	8.83
38 白砂糖	5.8167	5.8333	5.85	5.8667	5.8833	5.9
39 红糖	6.59	6.68	6.77	6.86	6.95	7.04
40 酱油	5.28	5.28	5.28	5.28	5.28	5.28
41 醋	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
42 鲜牛奶	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5

12.8.3　结果分析

使用线性二次移步平均预测方法对一定时期的数据预测，误差相对较小，在输出的模型结果可看到，每一个数据较实际数据而言，误差较小，预测值在实际值的附近波动。例如，上述的鲜牛奶和醋等的价格在 4 和 5 两个月将保持不变，与问题二中模型一中的结果概率预测结论相同，故该模型的价格预测数据具有一定的参考性。

第 13 章　景区灭火问题

景区灭火问题主要包括景区三维立体图的构建，然后根据三维立体图寻找最优路径，即灭火所走的最佳路径。本章中涉及到二维图的缺省分析，即图像处理。首先采用 MATLAB 自带的取点工具，对经过取点的值采用样条插值的方法进行二维图的修补，针对完善的二维图，根据等高线，将其三维立体化，然后采用 Dijkstra 算法对该三维曲面进行最短路径寻优计算，难点在于怎么求解一个三维的立体图的邻接矩阵。

学习目标：

（1）掌握 MATLAB 矩阵运算及基本图形绘制等方法；

（2）学习和掌握图像基本处理；

（3）掌握 MATLAB 处理最短路径等方法。

13.1　问 题 提 出

某国家级森林公园的地形等高图如图 13-1 所示。由于该风景区植被丰富，拥有大量的国家级重点保护动植物，因此旅游管理部门在图 13-1 的 A 点设置了景区消防站，当景区发生火灾时能及时控制火情和消灭火灾。

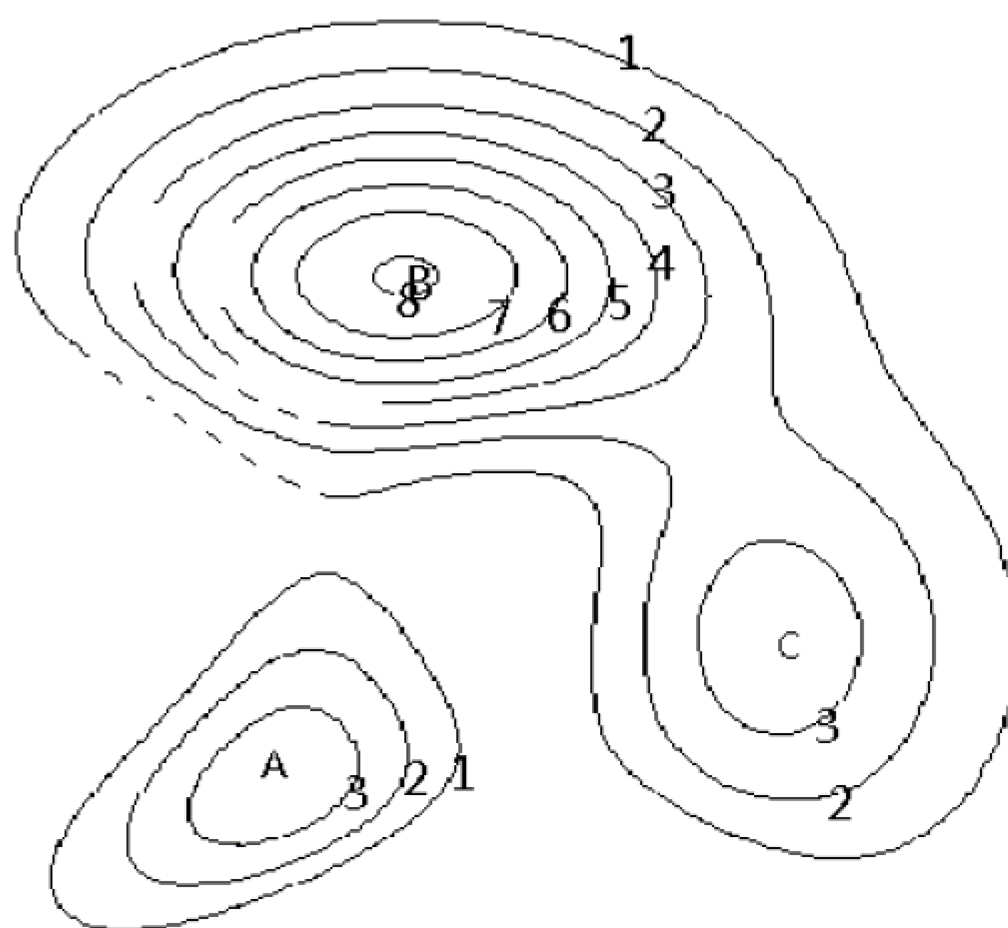


图 13-1　等高图

说明：（1）该图水平及竖直方向以 10m 每像素为单位，山高以 50m 为单位。

（2）实际图形见程序源文件中的附件 1，为 512 × 512 像素。

请你利用所学数学知识回答以下问题：

（1）由于人为原因，图 13-1 所示的等高图出现了局部破损的情况（共 5 处），请利用数学模型修补好该地图；

（2）在完成第一问的基础上，结合数学模型建立该景区的三维地形图，并估计该景区的地表面积；

（3）某天，图 13-1 所示的 B 点发生了火灾，于是需要从景区消防站 A 派遣消防员去 B 点灭火，建立模型确定最佳灭火路线。

13.2　摘　　要

本章主要采用数据拟合和插值的方法修复图像，最终比较取吻合得最好的图像。根据等高线图构建 Delaunay 三角网，采用三角形插值的方法由已知点的坐标插值出其他点空间坐标，从而拟合出一个三维的地图形。利用梯度下降最快的方法和空间自由曲面两点最短距离和最短路径建立最优途径模型，利用 FSPFFS 和 DIJKSTRA 算法求出最佳灭火路线，并做比较得到相对较好的最佳灭火路径。

问题一中，首先确定目标：修补好该破损地图。我们根据数字图像处理等有关技术，将格式为 bmp 的二值图像转化以含 0（黑色）和 1（白色）的逻辑矩阵，通过取点构建一维插值和函数拟合模型，修复出破损的函数并比较和原图像的吻合性选取最优修复图，如图 13-4 所示。

问题二中，首先从处理后的图中提取出只含有等高线的地图。然后从等高线中提取若干离散的数据点，利用 Delaunay 三角网对提取的离散数据点进行三维建模，然后分别利用线性插值和三次 Hermite 插值算法重建了三维地形图。最后利用 MATLAB 对算法进行了检验，并对线性插值和三次 Hermite 插值的结果进行了比较，从所得结果来看，利用三次 Hermite 插值的结果效果要好一些，构建了三维地形图符合等高线的规律，生成的三维图形如图 13-13 所示。通过对三维图形进行放大处理，构建分块计算法模型，利用 MATLAB 计算出表面积为 S=2.3788e+05。

问题三中，根据题意知最佳灭火路线为路程最短路线，即地形图上梯度下降最快的方向，则问题转化为函数已知点按最大速度下降原理求解函数的最小值的一个迭代问题。采用 Dijkstra 算法进行求解，由这些点构成的路径就是最佳灭火路线，如图 13-17 所示。

本文最大的特色是，用多种方法将单个的图形数据组准确地、巧妙地抽象为点坐标问题，利用拟合和插值的方法从而修复出破损地图，对修复图形进行插值，建立三维图形，求出景区地表面积，并建立多种模型寻找灭火最佳途径，从而使问题得到简化。根据多种方法对求解结果的统计分析比较，进一步大大简化和改进了模型，使得模型简单，通俗易懂，思路清晰，算法实现容易，提高了结果的正确性。

关键词：二值图、插值、等高线、Delaunay 三角网、Dijkstra。

13.3　基 本 假 设

（1）假设不考虑图像中除等高线外的所有障碍物，即只考虑等高线生成三维地形；

（2）假设三维地形函数 $z = f(x,y)$ 是连续的；
（3）假设不考虑坡度因素对路程的影响；
（4）假设消防员去 B 点灭火是匀速前进；
（5）假设把消防站和着火处简化为两点，分别为 A 点和 B 点。

13.4　符 号 说 明

符　　号	意　　义
a_k	多项式待定系数
x_i	图像中第 i 个点的横坐标
y_i	图像中第 i 个点的纵坐标
l_i	图像中等高线
$S_{i,j}$	所分得的小块表面积
θ_i	等高线的辐射线
S	所求面积的侧面积
$\overline{\sigma}_I$	表面积 S 的渐近值
Δh	相邻登高线的高程差
$d_{i,j}$	分得小块的直立隔板面积
$tg\varphi$	坡度倾斜率
$\varphi_{i,j}$	倾斜角
Z	线性插值函数
g_k	在雨水模型中，为点(x,y)处的梯度
z_k	$f(x,y)$极小点第 k 次近似值
d_k	牛顿方向
c_{ij}	图中各边的非负权
$p(s)$	点 s 标上永久性标记

13.5　问 题 分 析

森林在国民经济中占有重要地位，它不仅能提供国家建设和人民生活所需的木材及林副产品，而且还肩负着释放氧气、调节气候、涵养水源、保持水土、防风固沙、美化环境、净化空气、减少噪音及旅游保健等多种使命。同时，森林还是农牧业稳产高产的重要条件。然而，森林火灾会给森林带来严重危害。森林火灾位居破坏森林的三大自然灾害（病害、虫害和火灾）之首。它不仅给人类的经济建设造成巨大损失，破坏生态环境，而且还会威胁到人民生命财产安全。具体表现在如下的几个方面：

（1）烧毁林木；（2）烧毁林下植物资源；（3）危害野生动物；（4）引起水土流失；（5）使下游河流水质下降；（6）引起空气污染；（7）威胁人民生命财产安全。

所以说当森林火灾发生时，合理救援是减小损失的最有利的途径。合理救援即为消防人员用最少的时间到达事故发生地灭火，减少财产损失，故要从消防站 A 到着火处 B 的路程最少、时间最少才能达到减小损失的目的。

修复点等高线上的 5 处局部破损的情况，但修复时等高线上的数字 1,2,3…8 和字母 A、B 会影响对数据的读取，所以通过图形编辑器对图形进行初步处理得到图 13-2。

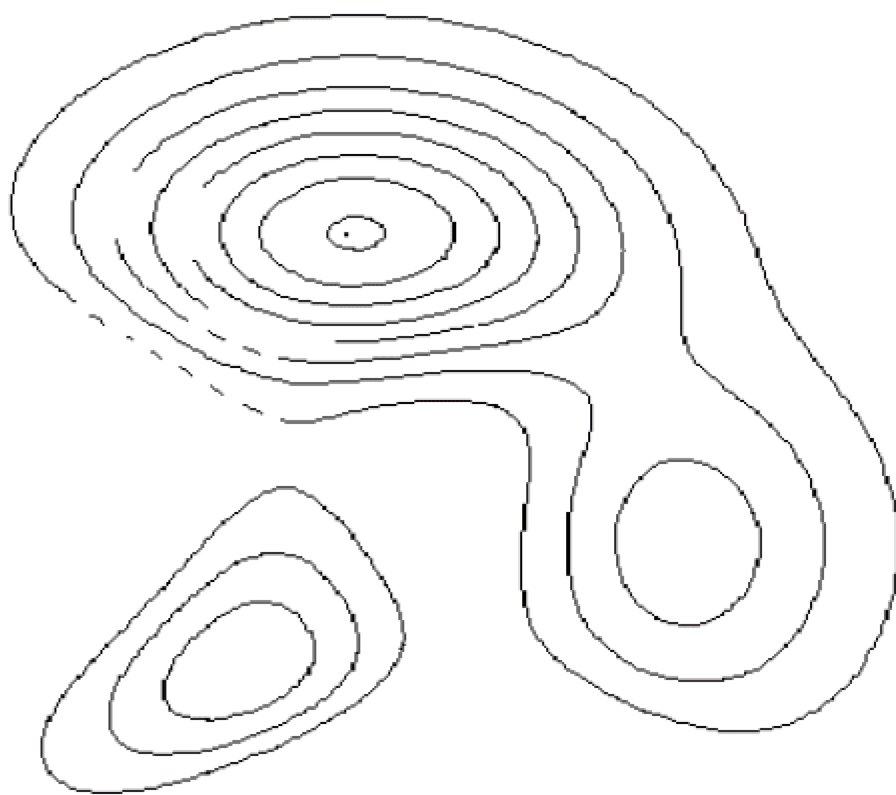


图 13-2　去标记后的等高线图

注明：由于消防站 A 和着火处 B 图标和数字会影响结果，为了精确的定位 A 和 B 的位置，故把两处简化为其中心 A 和 B 点。

要想把问题解决好，还需对等高线有所了解。在地图上，把陆地表面海拔高度相等的各点连接成的线，叫等高线。把地面上海拔高度相同的点连成闭合曲线，垂直投影到一个标准面上，并按比例缩小画在图纸上，就得到等高线。等高线也可以看作是不同海拔高度的水平面与实际地面的交线，所以等高线是闭合曲线。

等高线的特性有：

（1）位于同一等高线上的地面点，海拔高度相同。

（2）在同一幅图内，除了悬崖以外，不同高度的等高线不能相交。

在图廓内相邻等高线的高差一般是相同的，因此地面坡度与等高线之间的水平距离成反比，相邻等高线水平距离愈小，等高线排列越密，说明地面坡度愈大；相邻等高线之间的水平距离愈大，等高线排列越稀，则说明地面坡度愈小。因此等高线能反映地表起伏的势态和地表形态的特征。

由于人为原因，等高图出现了局部破损的情况（共 5 处），如果利用数学模型修补好该地图，首先需要把图像转化为数据，得到的是含 0（黑色）和 1（白色）的逻辑矩阵，二值图像中数据中值为 0 的像素点显示黑色，值为 1 的像素点显示白色。

13.6　问题一的分析

通过对问题和图像的分析，本问是根据已有的图像数据，把破损的图形修补复原，因为已经把图像转化为了数据，所以可以根据处理后的二进制数据图中 0 点的坐标，再通过一维插值和用函数拟合对图像进行修复。

13.6.1　模型的建立

Step 1：根据题意，选取一层等高线的部分曲线，进行数据拟合。

令曲线函数为：

$$f(x)=a_1r_1(x)+a_2r_2(x)+...+a_mr_k(x)$$

该函数为根据题意选定的一组多项式函数，$a_k(k=1,2,3,...,m,m<n)$是待定系数。

Step 2：根据数据拟合的准则，在等高线的部分曲线上取 n 个点$(x_i,y_i),i=1,2,3,...,n$，使与$y=f(x_i)$的距离δ_i的平方和最小。

拟合准则是根据最小二乘准则，即：

$$J(a_1,a_2,a_3,...,a_m)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-y_i]^2$$

Step 3：求$a_1,a_2,a_3,...,a_m$使J达到最小，只需要利用极值的必要条件：

$$\frac{\partial J}{\partial a_k}=0\ \ (k=1,...,m)$$

得到关于$a_1,a_2,a_3,...,a_m$的线性方程组：

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}r_1(x_i)[\sum_{k=1}^{m}a_kr_k(x_i)-y_i]=0\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \sum_{i=1}^{n}r_m(x_i)[\sum_{k=1}^{m}a_kr_k(x_i)-y_i]=0\end{cases}$$

Step 4：

$$R=\begin{bmatrix}r_1(x_1) & \dots & r_m(x_1)\\ \dots & \dots & \dots\\ r_1(x_n) & \dots & r_m(x_n)\end{bmatrix}_{n\times m},\quad A=(a_1,a_2,a_3,...,a_m)^T,\quad y=(y_1,y_2,y_3,...,y_n)^T$$

则上述方程组可表示为：

$$\left(R^TR\right)A=R^Ty$$

上式方程称为法方程组。

Step 5：当$\{r_1(x),r_2(x),r_3(x),\cdots,r_m(x)\}$线性无关时，$R$ 列满秩，R^TR可逆，则法方程组有唯一解，则解为：

$$A=\left(R^TR\right)^{-1}R^Ty$$

同时，求解出$a_1,a_2,a_3,...,a_m$等值，得出$f(x)$的表达式。

通过对图像分析，等高线破损处前后提取数据，整理计算如表 13-1 所示。

表 13-1　37 个数据点

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
xi	222	217	212	207	201	197	192	185	182	178	173	168	
yi	46	47	48	49	51	53	55	58	60	62	65	68	
*r*1(*x*)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
*r*2(*x*)	222	217	212	207	201	197	192	185	182	178	173	168	

续表

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$r3(x)$	49284	47089	44944	42849	40401	38809	36864	34225	33124	31684	29929	28224	
i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
xi	165	161	157	154	146	147	150	153	156	163	170	171	
yi	71	74	79	82	115	120	125	130	134	140	147	152	
$r1(x)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
$r2(x)$	165	161	157	154	146	147	150	153	156	163	170	171	
$r3(x)$	27225	25921	24649	23716	21316	21609	22500	23409	24336	26569	28900	29241	
i	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
xi	178	188	191	195	204	209	211	220	224	227	231	236	243
yi	153	158	160	162	166	168	169	171	171	172	172	173	173
$r1(x)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$r2(x)$	178	188	191	195	204	209	211	220	224	227	231	236	243
$r3(x)$	31684	35344	36481	38025	41616	43681	44521	48400	50176	51529	53361	53396	59049

由表 13-1 可得：

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 222 & 49284 \\ 1 & 217 & 47089 \\ 1 & 212 & 44944 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 231 & 53361 \\ 1 & 236 & 44944 \\ 1 & 243 & 59049 \end{bmatrix}$$

运算得：

$$R^T R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 222 & 217 & 212 & \cdots & 231 & 236 & 243 \\ 49284 & 47089 & 44944 & \cdots & 53361 & 55696 & 59049 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 222 & 49284 \\ 1 & 217 & 47089 \\ 1 & 212 & 44944 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 231 & 53361 \\ 1 & 236 & 55696 \\ 1 & 243 & 59049 \end{bmatrix}$$

$$R^T y=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 222 & 217 & 212 & \cdots & 231 & 236 & 243 \\ 49284 & 47089 & 44944 & \cdots & 53361 & 55696 & 59049 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 46 \\ 47 \\ 48 \\ \vdots \\ 172 \\ 173 \\ 173 \end{bmatrix}$$

由法方程组表达式 $\left(R^T R\right)A=R^T y$ 可知：

$$A=\left(R^T R\right)^{-1} R^T y$$

带入数据，运用 MATLAB 拟合出图像，程序如下：

```
clc,clear,close all
load('data1.mat')                               %加载数据
x1 = [data1(2,1:end-1),data1(8,1:4)];           %取点
y1 = [data1(3,1:end-1),data1(9,1:4)];           %取点
x2 = [data1(8,5:end-1),data1(14,1:end)];        %取点
y2 = [data1(9,5:end-1),data1(15,1:end)];        %取点
plot([y1,y2],[x1,x2],'b.')                      %画图
a = polyfit([y1,y2],[x1,x2],2);                 %二次函数拟合
y = min([y1,y2])-10:max([y1,y2])+10;            %横坐标设置
x = a(1)*y.^2+a(2)*y+a(3);                      %拟合值
hold on                                         %同一图形句柄下画图显示
plot(y,x,'r.--','linewidth',2)                  %画图
```

运行程序输出图形如图 13-3 所示。

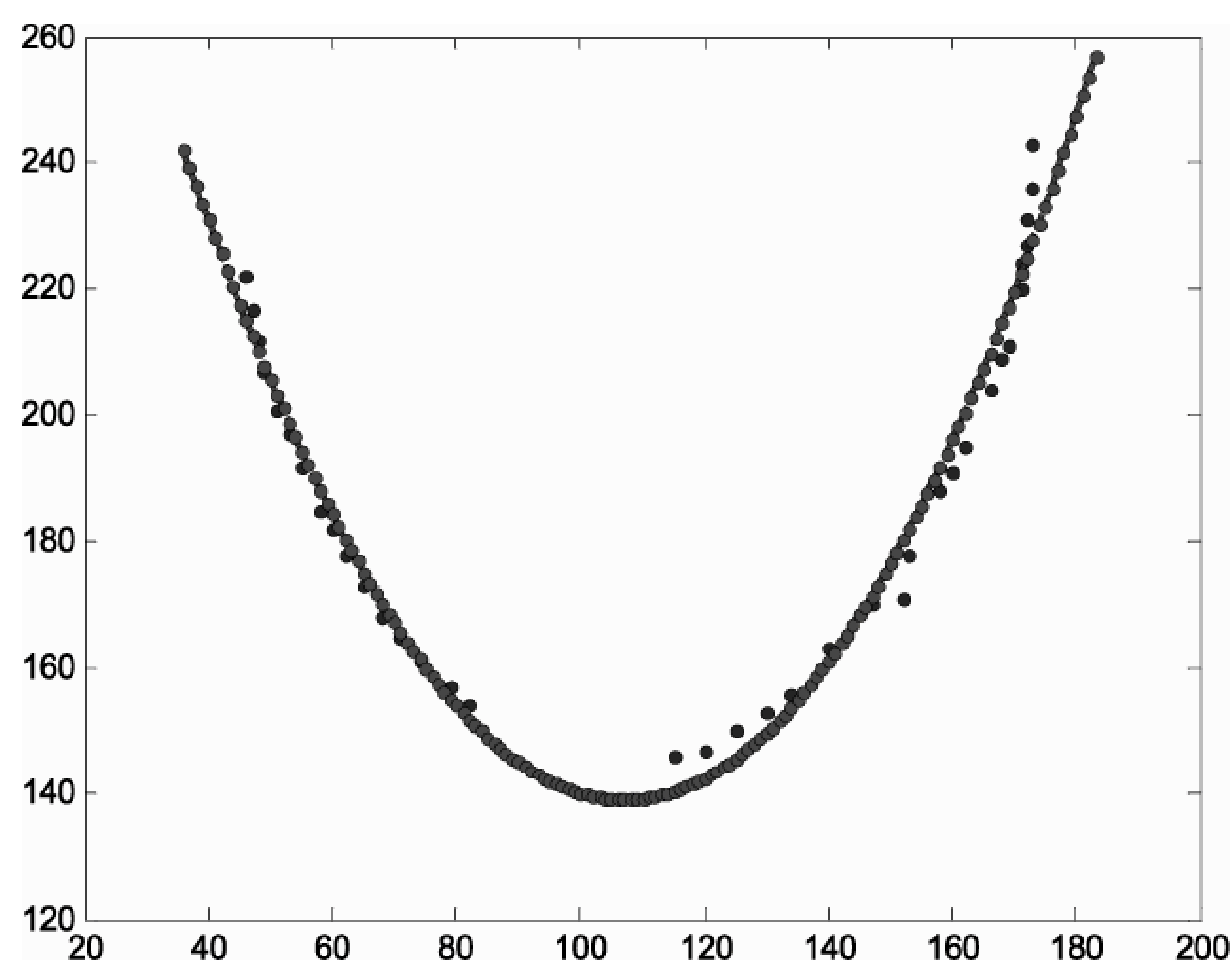


图 13-3　数据拟合图

其拟合函数为：

$$x = 0.020442y^2 - 4.3788y + 373.48$$

13.6.2　模型的求解

Step 1：选取破损处附近的等高线上的点(x_n, y_n)，部分选取点如表 13-2 所示。

表 13-2　等高线上的点

xi	114	115	118	120	122	123	125	127	135	137
yi	133	135	137	139	139	140	143	144	151	152
xi	139	140	151	153	162	164	165	166	177	247
yi	153	155	161	162	168	169	170	171	176	198
xi	178	179	180	189	190	191	193	194	204	206
yi	177	178	179	184	185	186	187	188	193	194
xi	208	211	212	221	229	231	236	239	240	245
yi	195	196	197	200	201	201	200	200	199	199

Step 2：Lagrange 插值

$$令，\ l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

利用构建的 Lagrange 函数：

$$\varphi_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$$

Step 3：求二阶均差

$$\frac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_i-x_k}=f[x_i,x_j,x_k]$$

利用 Newton 插值：

$$\varphi_2(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$

Step 4：求出余式。

$$R(x)=f(x)-\varphi_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

利用 MATLAB 插值函数对其进行修复，程序如下：

```
%matlab 插值,图形修补
clc,clear,close all          %清屏
warning off                  %取消警告
a=imread('b.bmp');           %读入图像
warning off                  %取消警告
figure('color',[1,1,1]),     %图形背景设置为白色
subplot(121),imshow(a);title('原始图像')   %画图
%plot([118 200],[141 197])
x=[114,115,118,120,122,123,125,127,135,137,139,140,151,153,162,164,165,
166,175,177,178,179,180,189,190,191,193,194,204,206,208,211,212,221,229
,231,236,239,240,245,247];  %x 值
y=[133,135,137,139,139,140,143,144,151,152,153,155,161,162,168,169,170,
171,175,176,177,178,179,184,185,186,187,188,193,194,195,196,197,200,201
,201,200,200,199,199,198];  %y 值
j=1;
for i=114:247
     y1(1,j)=interp1(x,y,i,'cubic');   %立方插值
     j=j+1;
end
x1=114:247;                            %x1 取值范围
subplot(122),
imshow(a);
hold on;
plot(x1,y1,'k');title('插值后图像')      %画图+标题
clc,clear                              %清屏
%plot([178 146],[220 171]
x=[167,170,173,177,188,195,204,209,211,220,224,233];
y=[145,147,150,152,158,162,166,168,169,171,172,173];
j=1;
for i=167:233
     y1(1,j)=interp1(x,y,i,'cubic');   %立方插值
```

```
    j=j+1;
end
x1=167:233;
hold on                                    %同一图形句柄下画图显示
plot(x1,y1,'k')                            %画图
clc,clear                                  %清屏和清理工作区
%plot([187 147],[246 163])
x=[172,173,174,175,177,178,178.5,179,181,183,184,185,186,187,246,265,26
6,273,274,281,282,288];
y=[133,135,136,137,138,139,140,141,143,143,144,145,146,147,163,163,162,
162,161,161,160,160];
j=1;
for i=172:288
    y1(1,j)=interp1(x,y,i,'cubic');       %立方插值
    j=j+1;
end
x1=172:288
hold on                                    %同一图形句柄下画图显示
plot(x1,y1,'k')                            %画图
```

插值修复图如图 13-4 所示。

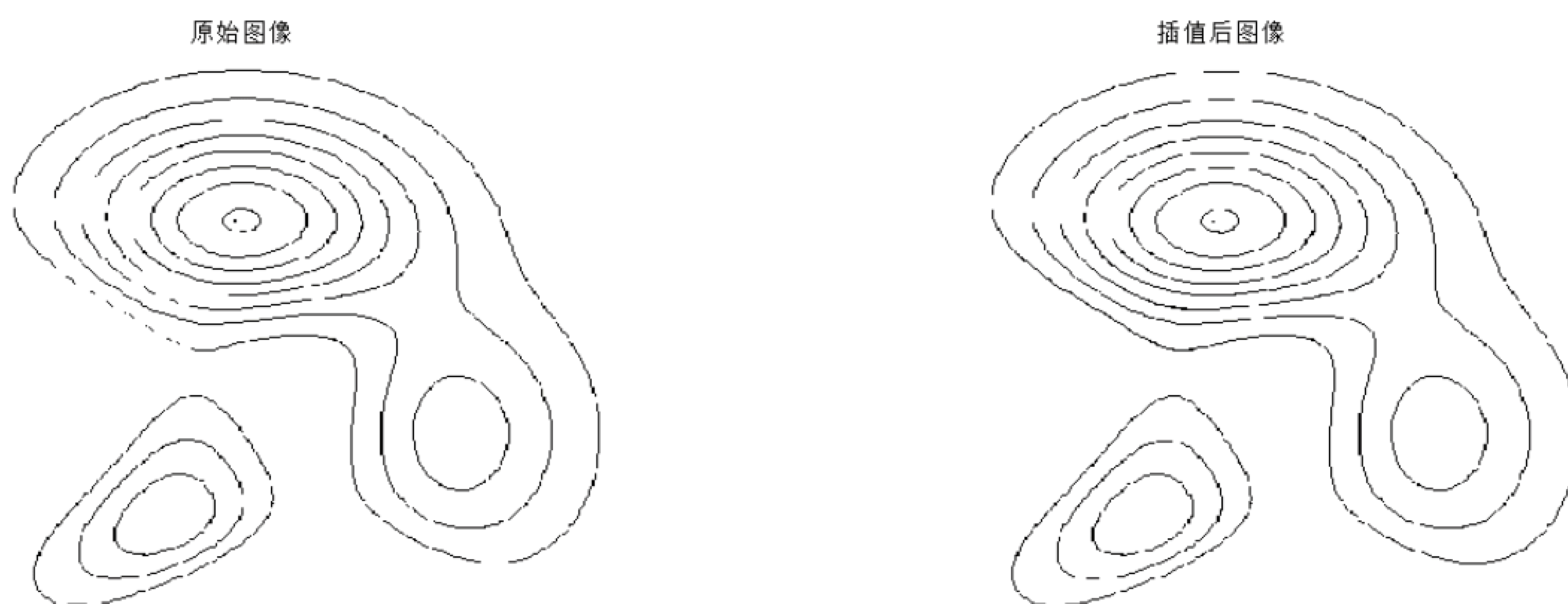


图 13-4　修复后图像

如图 13-4 可知，经过比较，插值曲线和拟合曲线的吻合度选取超过 95%，因此该插值结果的图可作为修复图。

13.7　问题二的分析

首先根据数字图像处理方面的技术和方法，从原图中提取了只含有等高线的图。然后以图像的两边分别为 x 轴和 y 轴，垂直图像的方向为 z 轴建立空间坐标系。则等高线上每点的空间坐标都是已知的。根据题目要求要生成整个的三维地图，即要求出图像上其他各点的三维空间坐标。本章采用三角形插值的方法由已知点的坐标插值出其他点空间坐标，从而拟合出一个三维的地图形。再根据像素把图形放大到实际大小，建立微分模型，计算出景区地表表面积。

在此展示部分选取的点（x,y,z）数据如表 13-3 所示。

表 13-3　图形提取数据点

x	y	z	204	14	0	240	1	0
99	110	0	319	16	0	512	1	0
245	9	0	354	29	0	250	512	0
433	111	0	393	54	0	512	245	0
254	196	0	435	114	0	512	512	0
330	256	0	463	171	0	126	111	50
408	69	0	489	209	0	254	28	50
501	257	0	500	241	0	400	111	50
412	345	0	492	304	0	254	182	50
112	354	0	458	341	0	352	256	50
223	232	0	405	343	0	408	166	50
276	306	0	204	14	0	468	258	50
206	359	0	319	16	0	411	323	50
122	53	0	354	29	0	143	339	50
171	25	0	……………………			218	263	50
204	14	0	……………………			256	307	50
319	16	0	……………………			206	350	50
354	29	0	……………………			145	111	100

注：问题二全部选取点数据见本书程序文档。

13.7.1　模型的建立

（1）线性插值模型

$$z = z_i L_i + z_j L_j + z_k L_k$$

三次 hermite 插值模型：

$$z = a_1 L_1^3 + a_2 L_2^3 + a_3 L_3^3 + a_4 L_1^2 L_2 + a_5 L_1^2 L_3 + a_6 L_2^2 L_3 + a_7 L_2^2 L_1 + a_8 L_1 L_3^2 + a_9 L_2 L_3^2 + a_{10} L_1 L_2 L_3$$

（2）运用分块计算法

Step 1：用等高线 $l_i(i=0,1,2,3,\ldots,n)$ 和辐射线 $\theta_i(i=0,1,2,3,\ldots,m-1)$ 将地形图分成 $m\times n$ 个小块 $d_{i,j}$，如图 13-5 所示，并将这些小块的表面积 $S_{i,j}$ 近似的看成斜面梯形，如图 13-6 所示。

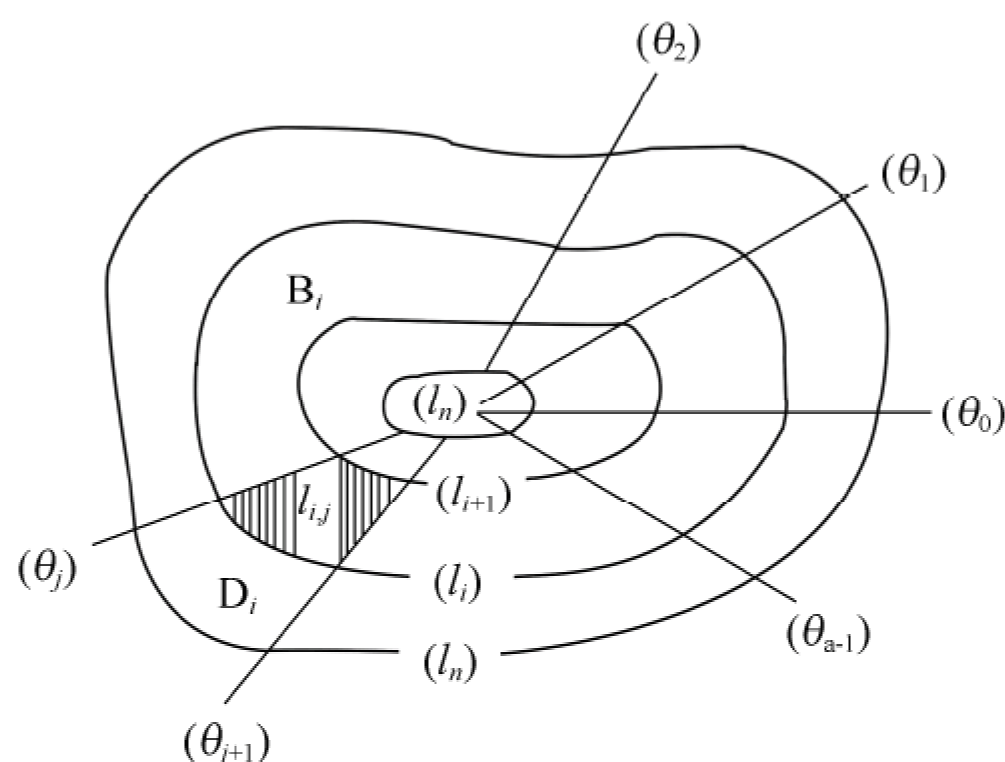


图 13-5　图形分块

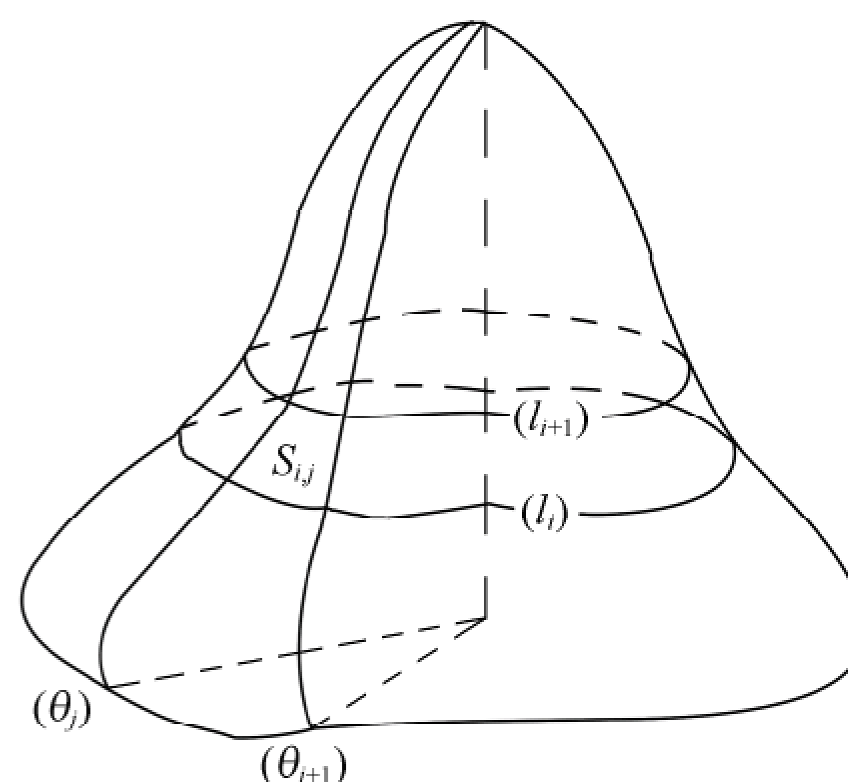


图 13-6　斜面梯形

Step 2：运用侧面积公式

$$S=\sqrt{B^2+C^2}$$

计算后然后相加，即得整个表面积 S 的渐进值 $\overline{\sigma_I}$：

$$S\approx\overline{\sigma_I}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sqrt{d_{i,j}^2+\overline{e_{i,j}^2}}$$

式中 $\overline{e_{i,j}}=\frac{1}{2}(l_{i,j+1},l_{i+1,j})\times\Delta h$ 为小块 $d_{i,j}$ 上直立隔板面积。而 $l_{i,j},l_{i+1,j}$ 分别表示等高线 $(l_i),(l_{i+1})$ 被二辐射线 $(\theta_i),(\theta_{i+1})$ 所截的线段长度，又 Δh 表示相邻等高线的高程差。

Step 3：以梯形的倾斜角作为 $d_{i,j}$ 上的近似坡度，则由坡度倾斜率 $tg\varphi=\frac{h}{\delta}=\frac{C}{B}$ 得：

$$tg\overline{\varphi_{i,j}}=\frac{\overline{e_{i,j}}}{d_{i,j}}$$

再接公式 $B=S\cdot\cos\varphi$，又得：

$$S\approx\overline{\sigma_I}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}d_{i,j}\cdot\sec\overline{\varphi_{i,j}}$$

Step 4：因 $l_{i,j}$ 与 $l_{i+1,j}$ 相差甚远，故为简便计算，取 $e_{i,j}=l_{i,j}\cdot\Delta h$ 为直立隔板的面积，则相应有：

$$S\approx\sigma_1=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}d_{i,j}\cdot\sec\varphi_{i,j}$$

$$S\approx\sigma_1=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sqrt{d_{i,j}^2+e_{i,j}^2}$$

式中倾斜角 $\varphi_{i,j}$ 的确定式为：

$$tg\varphi_{i,j}=\frac{e_{i,j}}{d_{i,j}}$$

13.7.2　模型的求解

Step 1：构建 Delaunay 三角网。

首先从等高线上任意选取 n 个离散的点，这些点记为 $P_i\ (x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2...n$；

其中 x_i 为点的横坐标，y_i 为点的纵坐标，z_i 为其竖直坐标。再得到这些离散的点后，然后本小节根据 Delaunay 准则生成三角网。

Delaunay 三角网的构建也称为不规则三角网的构建，就是由离散数据点构建三角网，如图 13-7 所示，即确定哪三个数据点构成一个三角形，也称自动联接三角网。即对于 n 个离散的点，将其中相近的三点构成最佳三角形，使每个离散点都成为三角形的顶点。

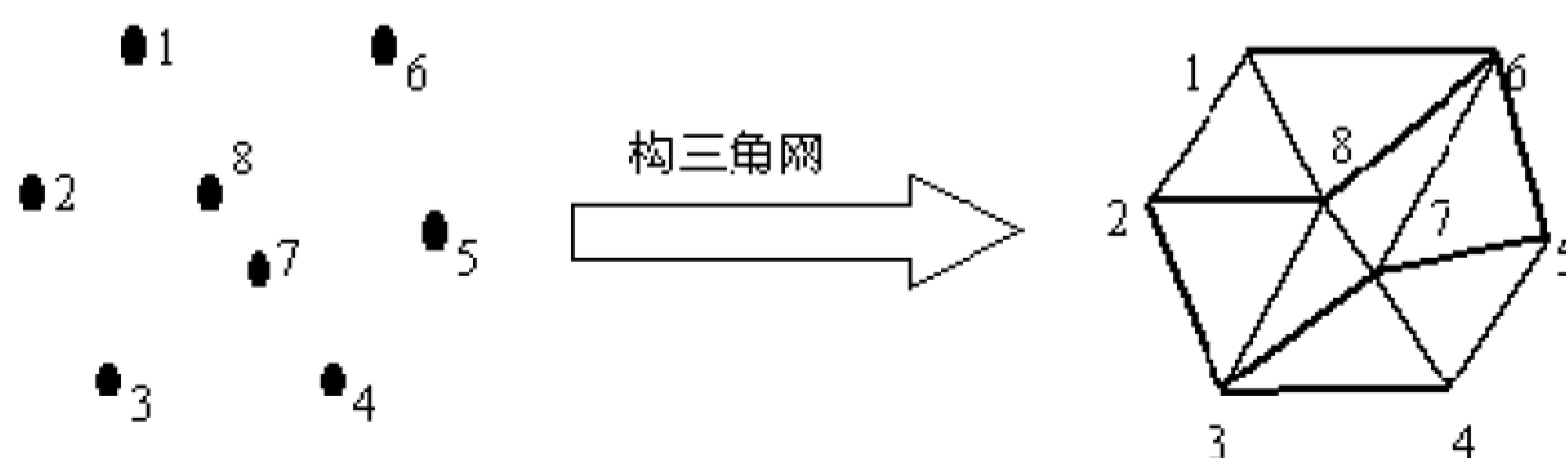


图 13-7　Delaunay 三角网

为了获得最佳三角形，在构造三角网时，应尽可能使三角形的三内角均成锐角，即符合 Delaunay 三角形产生的准则：

（1）任何一个 Delaunay 三角形的外接圆内不包含任何其他离散点。

（2）相邻两个 Delaunay 三角形构成凸四边形，在交换凸四边形的对角线之后，六个内角的最小者不再增大，该性质记为最小角最大准则。

Step 2: 在完成三角网的构造之后，要根据三角形的顶点对三角形内的点进行插值，首先本小节引入面积坐标及有关公式。

设 $\Delta(i,j,k)$ 是以 i,j,k 为顶点的任意三角形单元，面积为 S。本小节约定 i,j,k 按逆时针方向排列。在 $\Delta(i,j,k)$ 内任取一点 P，坐标为 (x,y)。过 P 点作与三个顶点的连线，将 $\Delta(i,j,k)$ 分成三个三角形，如图 13-8 所示。

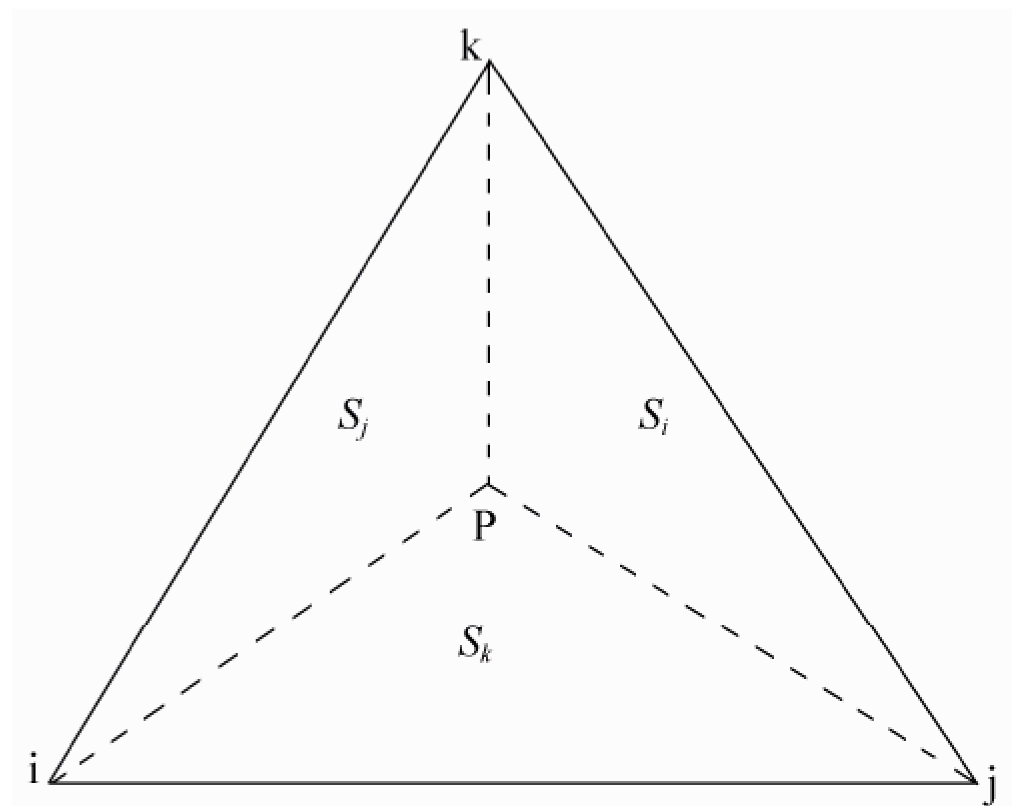


图 13-8　三角形

其中 $\Delta(i,j,P)$ 、$\Delta(j,k,P)$ 和 $\Delta(k,i,P)$ 其面积分别为 S_k 、S_i 和 S_j ，显然 $S_j+S_i+S_k=S$ 。

令 $L_i=\dfrac{S_i}{S}$ ，$L_j=\dfrac{S_j}{S}$ ，$L_k=\dfrac{S_k}{S}$ ，则 L_k ，L_j ，$L_i \geqslant 0$，$L_i+L_j+L_k=1$。给定一点 P，唯一确定如此的一组数 (L_i,L_j,L_k) 。反之，任给一组 (L_i,L_j,L_k) ，L_k ，L_j ，$L_i \geqslant 0$，$L_i+L_j+L_k=1$。按照 $L_i+L_j+L_k=1$ 表达式，也可以唯一确定一点 P，所以同一点 P，既可用直角坐标(x, y)表示，也可以用面积坐标 (L_i,L_j,L_k) 表示。称 (L_i,L_j,L_k) 为点 P 的面积坐标。因为三角形的面积与参考坐标系无关，所以面积坐标也与坐标系无关，这就是采用面积坐标的优点。

由几何知识有：

$$2S=\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k\end{vmatrix},\quad 2S_i=\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k\end{vmatrix}$$

$$2S_j=\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x & y\\ 1 & x_k & y_k\end{vmatrix},2S_k=\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x & y\end{vmatrix}$$

由此可建立面积坐标与直角坐标之间的下列转换关系：

$$L_i=\frac{1}{2S}[(x_jy_k-x_ky_j)+(y_j-y_k)x+(x_k-x_j)y]$$

$$L_j = \frac{1}{2S}[(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y]$$

$$L_k = \frac{1}{2S}[(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y]$$

注意：其中 L_i, L_j, L_k 称为在 $\Delta(i,j,k)$ 内部点插值的基函数。

Step 3：对于 Delaunay 三角网内的任一三角形 $\Delta P_i P_j P_k$，其中 P_i 的坐标为 (x_i, y_i, z_i)，P_j 的坐标为 (x_j, y_j, z_j)，P_k 的坐标为 (x_k, y_k, z_k)。对于三角形内的任一点 $Q(x,y,z)$，其中 Q 点的横坐标 x 和纵坐标 y 是已知的，要求的是竖直坐标 z 的值。则利用线性插值有：

$$z = z_i L_i + z_j L_j + z_k L_k$$

式中 z_i, z_j, z_k 是三角形顶点的竖直坐标。

这样，对于三角形内的任意一点，都可插值出其竖直坐标的值，即地形图中的高度。然而，线性插值存在许多的不足之处，如光滑性差及二阶导不连续等。

Step 4：为了使得到的地形图更光滑，更逼真，可以采用三次 Hermite 插值方法，如图 13-9 所示。

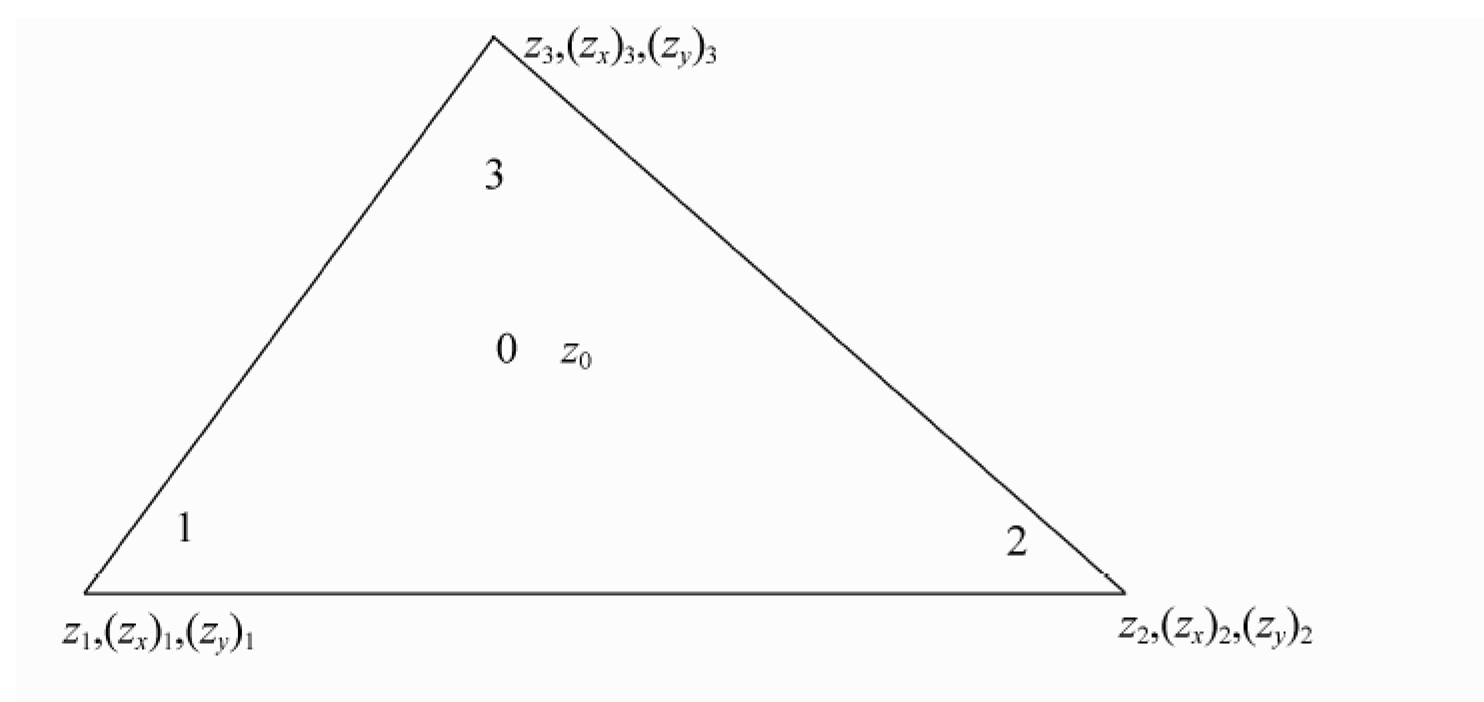


图 13-9　Hermite 插值方法

三角形三个顶点和重心处的高度值分别为 z_1, z_2, z_3, z_0，$(z_x)_i,(z_y)_i$ (i=1,2,3)分别为该点处的一阶偏导。考虑三次 Hermite 插值公式，对于三角形内任一点 $Q(x,y,z)$，三次多项式可以写成形式：

$$z = a_1 L_1^3 + a_2 L_2^3 + a_3 L_3^3 + a_4 L_1^2 L_2 + a_5 L_1^2 L_3 + a_6 L_2^2 L_3 +$$
$$a_7 L_2^2 L_1 + a_8 L_1 L_3^2 + a_9 L_2 L_3^2 + a_{10} L_1 L_2 L_3$$

根据 Hermite 插值方法，由待定系数法可求得：

$$\begin{cases} z = \alpha_0^3(x,y) z_0 + \sum_{i=1}^{3}[\alpha^3{}_i(x,y) z_i + \beta^3{}_i(x,y)(z_x)_i + \gamma^3{}_i(x,y)(z_y)_i] \\ \alpha_0^3(x,y) = 27 L_1 L_2 L_3 \\ \alpha^3{}_i(x,y) = L^3{}_i + 3L^2{}_i(L_j + L_k) - 7L_i L_j L_k \\ \beta^3{}_i(x,y) = (x_j - x_i)(L_i^2 L_j - L_i L_j L_k) + (x_k - x_i)(L_i^2 L_k - L_i L_j L_k) \\ \gamma^3{}_i(x,y) = (y_j - y_i)(L_i^2 L_j - L_i L_j L_k) + (y_k - y_i)(L_i^2 L_k - L_i L_j L) \end{cases}$$

说明： 这里的 j，k 应如此选取，使得 i，j，k 成逆时针方向。

Step 5：以上线性插值和三次 Hermite 插值可由 MATLAB 里 griddata()函数实现。画出其散点图如图 13-10 所示。

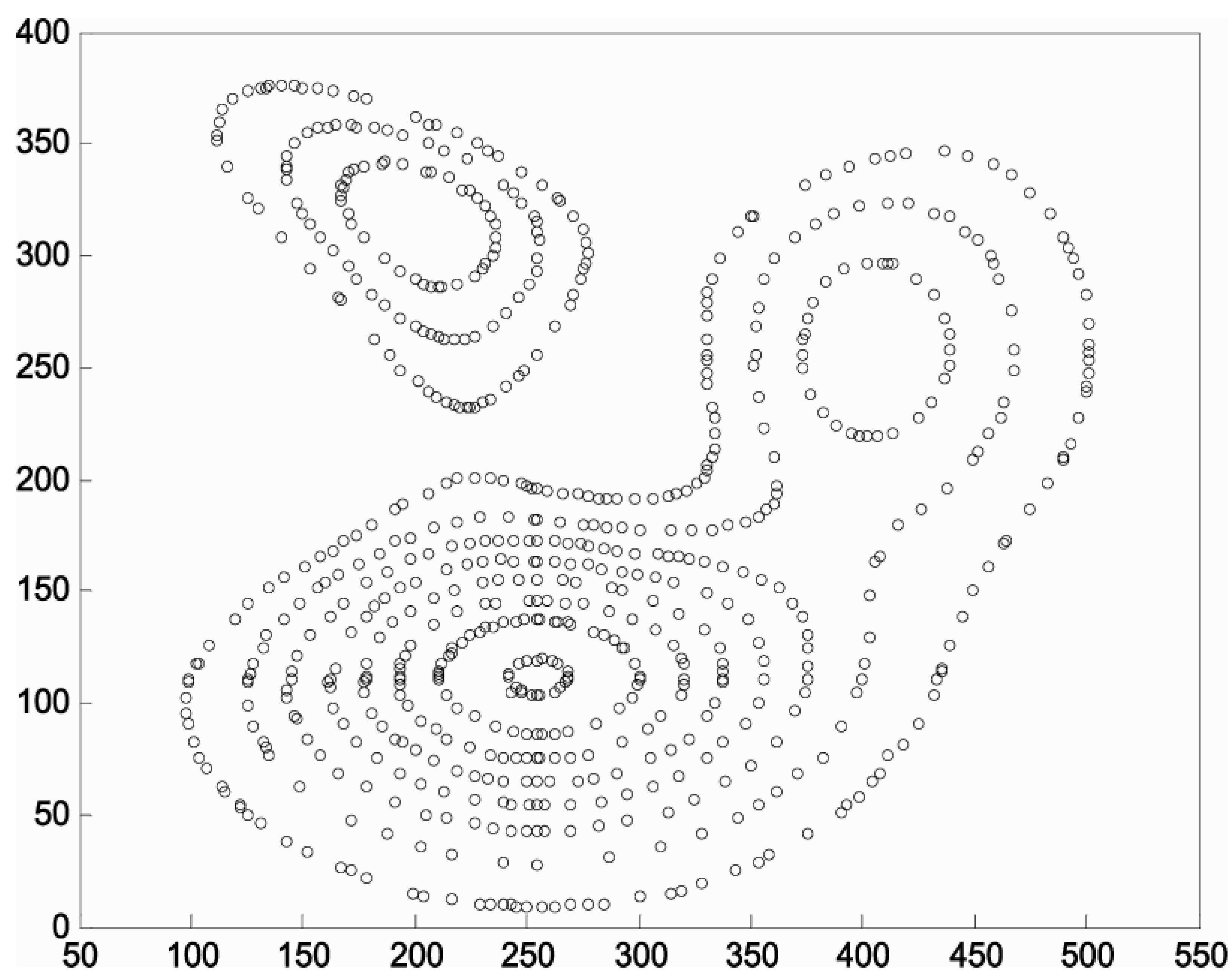


图 13-10　散点图

绘制相应的伪彩色图如图 13-11 所示。

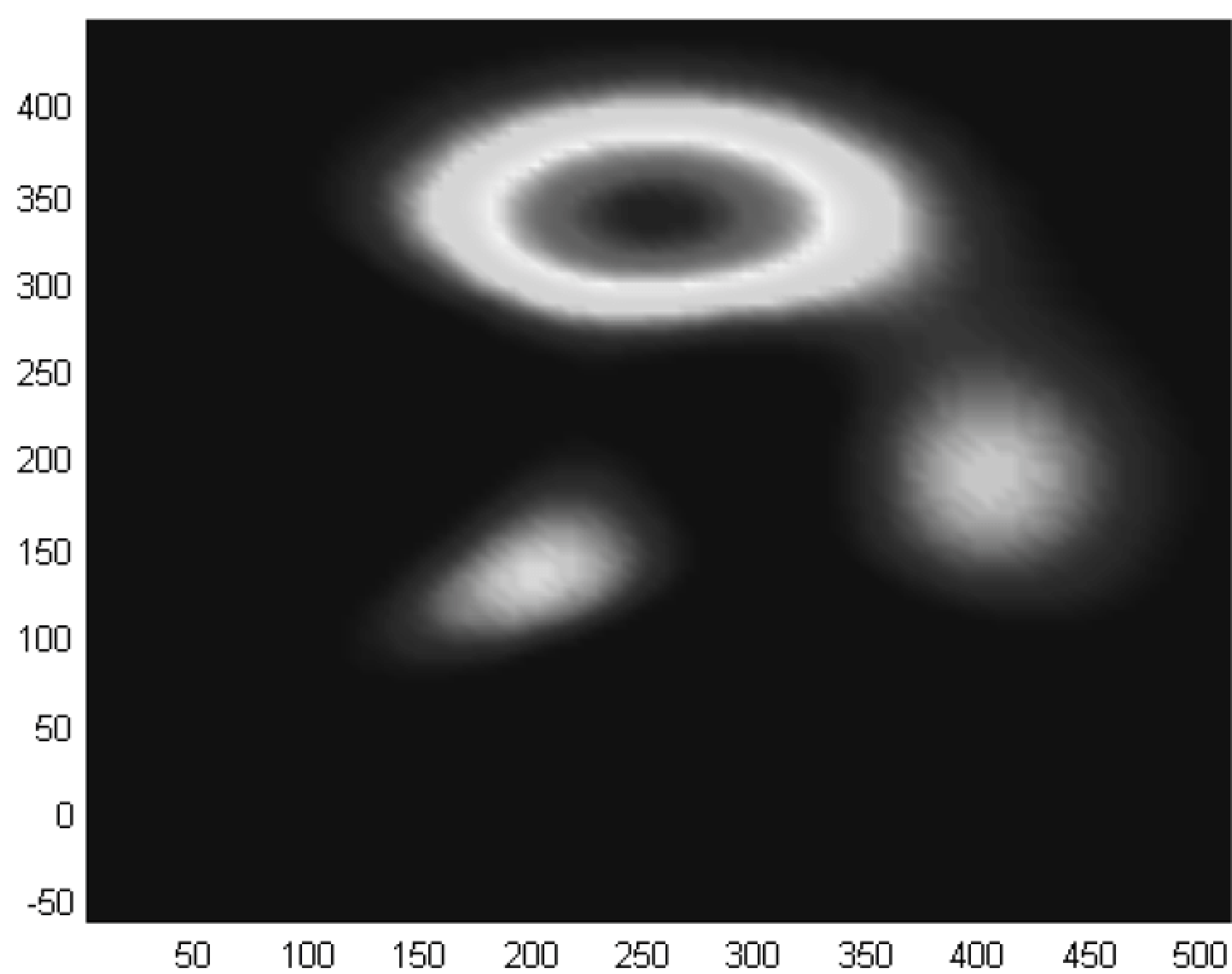


图 13-11　伪彩色图

相应的等高线如图 13-12 所示。

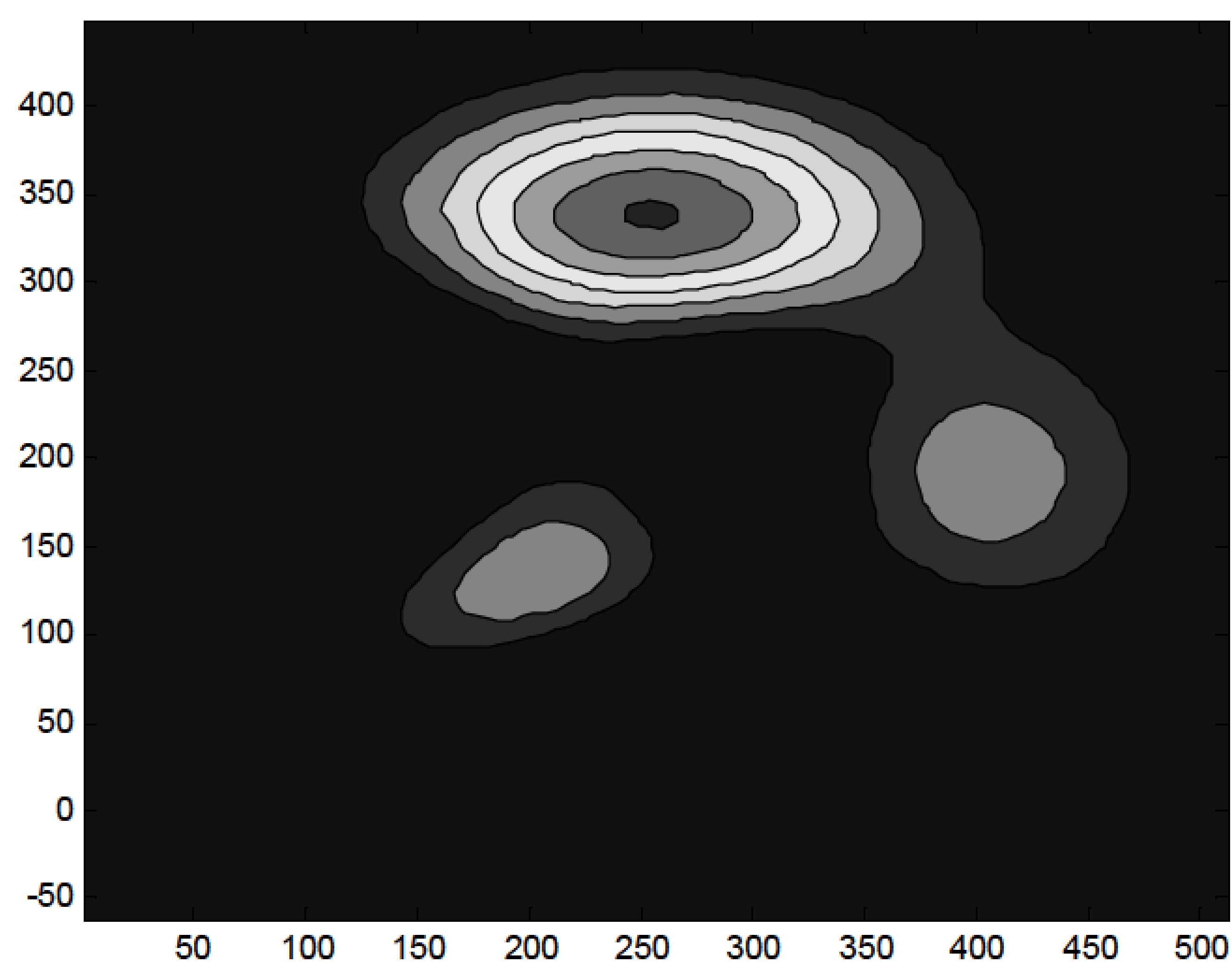


图 13-12　等高线图

用 Hermite 插值法进行三次插值生成的三维图如图 13-13 所示。

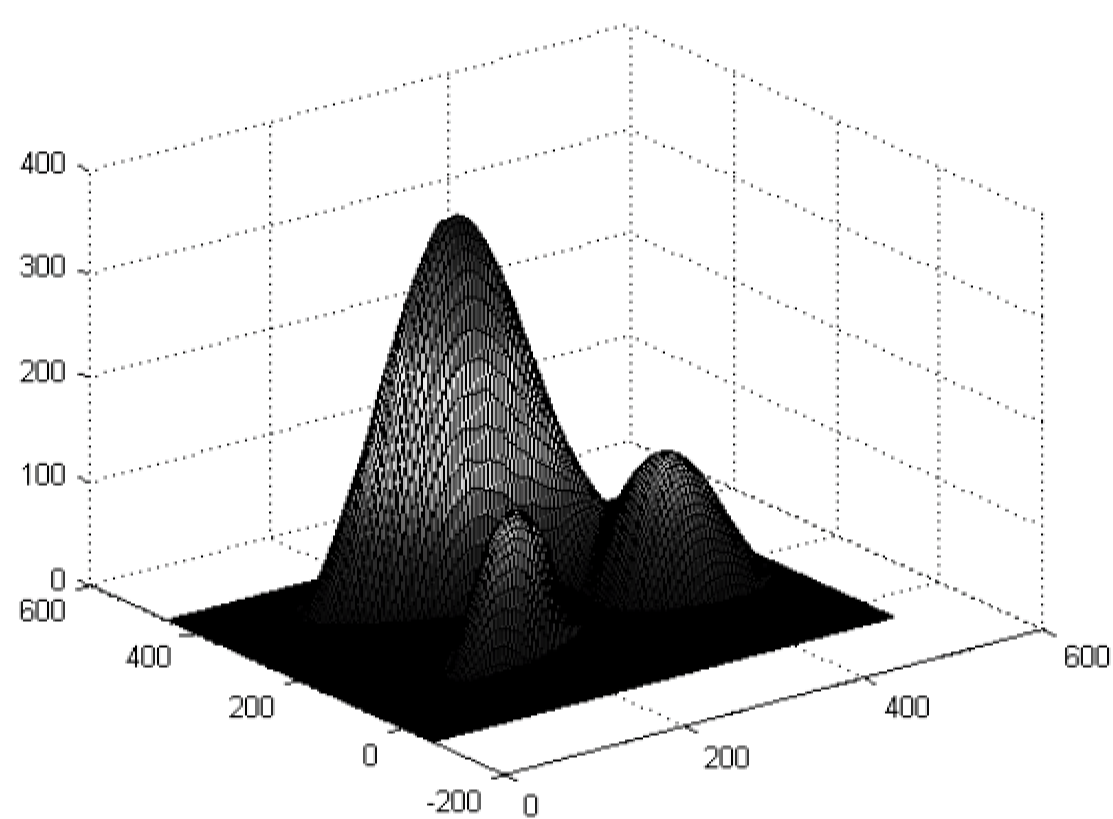


图 13-13　Hermite 插值法三维图

从图 13-13 可知，三次插值的效果要比线性插值好，图形更光滑些。

接下来，对于地表面积的求解，可将 3 座山标为 A、B、C，如图 13-14 所示。

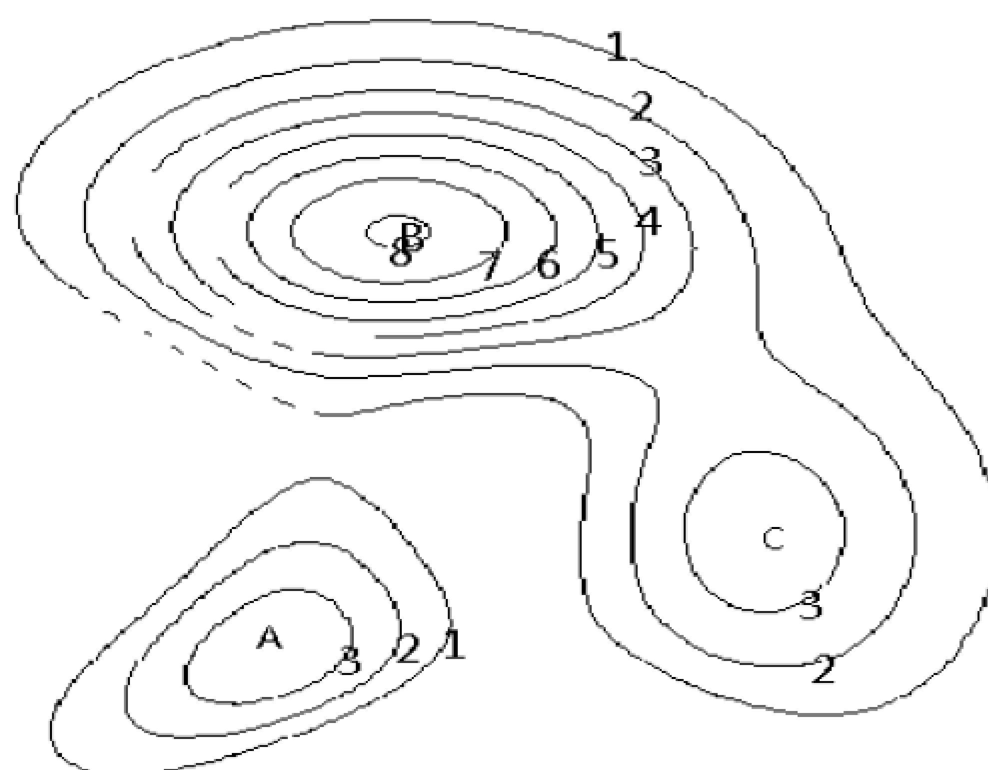


图 13-14　景区示意图

如图 13-13、图 13-14 所示，则抽取其中三维曲面一个小面积块来分析，绘制相应的小块图形，程序如下：

```
figure('color',[1,1,1]),
x1 = 238.4; y1 = 314.8; z1 = 300.9;  %点坐标
x2 = 238.4; y2 = 309.6; z2 = 277.4;  %点坐标
x3 = 243.6; y3 = 314.8; z3 = 303.2;  %点坐标
x4 = 243.6; y4 = 309.6; z4 = 280.2;  %点坐标
plot3(x1,y1,z1,'ro');
hold on            %同一图形句柄下画图显示
plot3(x2,y2,z2,'ro');   %画图
plot3(x3,y3,z3,'ro');   %画图
plot3(x4,y4,z4,'ro');   %画图
plot3([x2,x4],[y2,y4],[z2,z4],'r-','linewidth',2);  %画图
plot3([x1,x2],[y1,y2],[z1,z2],'r-','linewidth',2);  %画图
plot3([x1,x2],[y1,y2],[z1,z2],'r-','linewidth',2);  %画图
plot3([x1,x3],[y1,y3],[z1,z3],'r-','linewidth',2);  %画图
plot3([x4,x3],[y4,y3],[z4,z3],'r-','linewidth',2);  %画图
C = [0.5000 1.0000 1.0000 0.5000;];
fill3([x1,x2,x3,x4],[y1,y2,y3,y4],[z1,z2,z3,z4],'b') %填充蓝色
fill3([x1,x3,x2,x4],[y1,y3,y2,y4],[z1,z3,z2,z4],'b') %填充蓝色
```

绘制图形如图 13-15 所示。

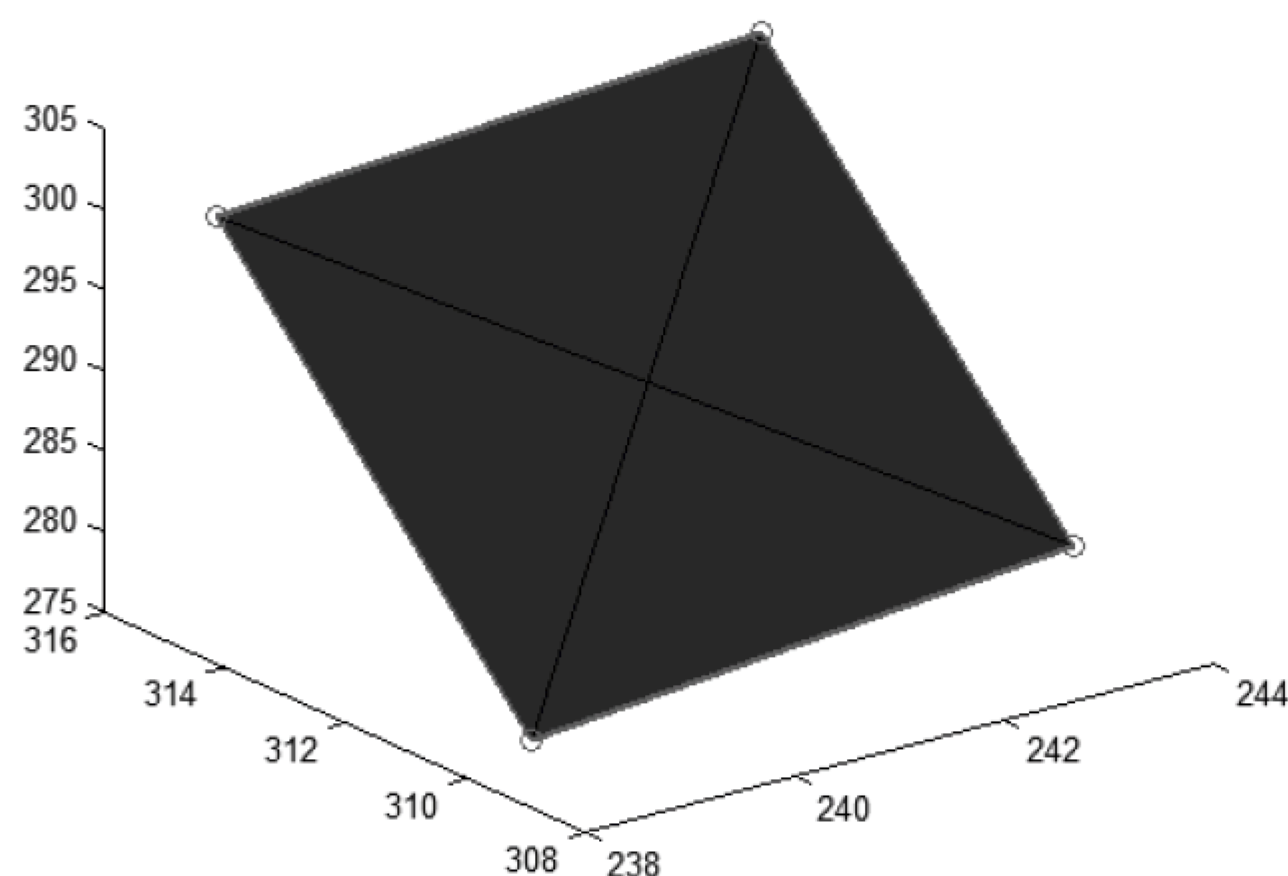


图 13-15　小立面格

计算该面面积程序如下：

```
%计算面积
a = sqrt((y1-y2)^2+(z1-z2)^2);        %边长 a
b = sqrt((x2-x4)^2+(z2-z4)^2);        %边长 b
S = a*b;                              %立面面积
```

则只需要统计图 13-13 中高度大于 0 的点数即可计算相应的地表面积，具体程序如下：

```
num =0 ; %小格子个数
n = size(X);
for i=1:n(1,1)
    for j=1:n(1,2)
          if Z(i,j)>0              %高度大于 0 的点数
```

```
                    num = num +1;       %统计个数
            end
      end
end
Ss = S*num/2                            %总的地表面积
Ss =

   2.3788e+05
```

则相应的地表面积为 2.3788e+05。

13.8　问题三的分析

根据题意知最佳灭火路线为路程最短路线，即为地形图上梯度下降最快的方向模型，则问题转化为已知函数某点按最快速度下降原理求解函数的最小值的一个迭代问题。采用牛顿法进行求解，并记录下每次迭代下点的值，则由这些点构成的路径就是最佳灭火路线。

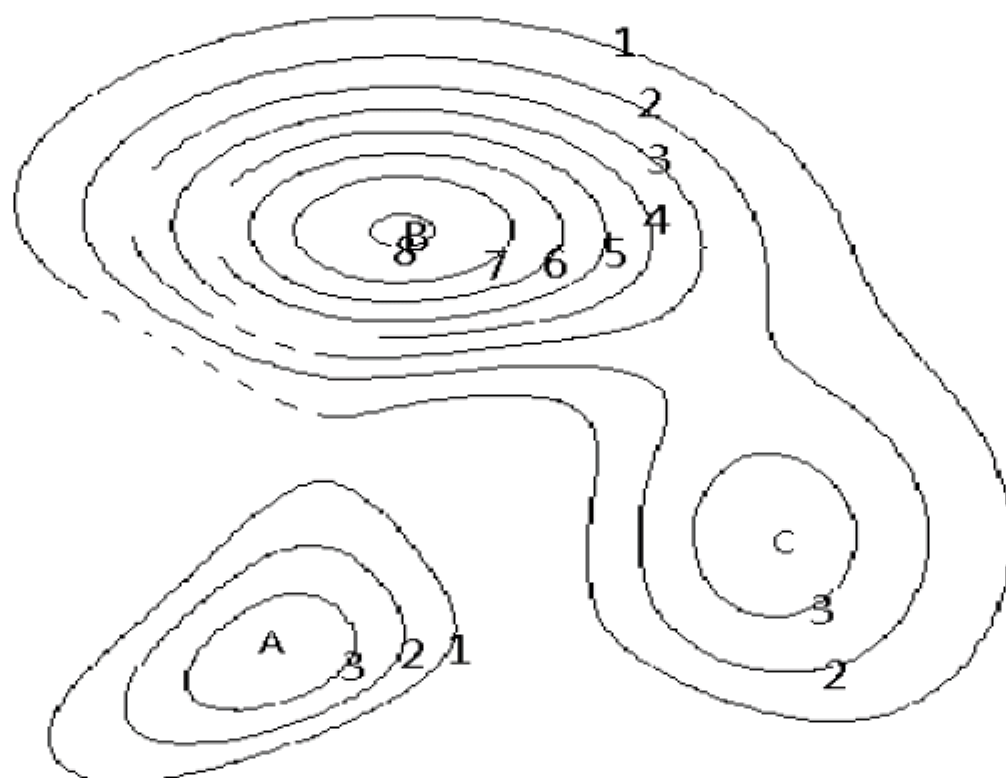


图 13-16　景区示意图

绘制相应的立体图，选择相应的起始节点和终止节点，具体的程序如下：

```
x1 = 119.7; y1 = 371.6; z1 = 23.78;
x2 = 331.3; y2 = 98.01; z2 = 0;
nX = size(X);
m=1;
for i=1:nX(1,1)
     m=1;
     for j=1:nX(1,2)
          if X(i,j)>=x1&&X(i,j)<=x2  %裁剪图形
                X1(i,m) = X(i,j);
                Y1(i,m) = Y(i,j);
                Z1(i,m) = Z(i,j);
                m=m+1;
          end
     end
end
X1 = X1(5:70,:);
Y1 = Y1(5:70,:);
Z1 = Z1(5:70,:);
figure('color',[1,1,1]),  %设置图形背景为白色
```

```
surf(X1,Y1,Z1)  %三维曲面
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z')
hold on
sta = [X1(1,27),Y1(18,1),Z1(18,27)];
des = [X1(1,18),Y1(57,1),Z1(57,18)];
plot3(X1(1,27),Y1(18,1),Z1(18,27),'r.','Markersize',40);  %标记起点
plot3(X1(1,18),Y1(57,1),Z1(57,18),'r.','Markersize',40);  %标记终点
surf(X,Y,Z)%三维曲面
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z')
```

运行程序输出结果如图 13-17 所示。

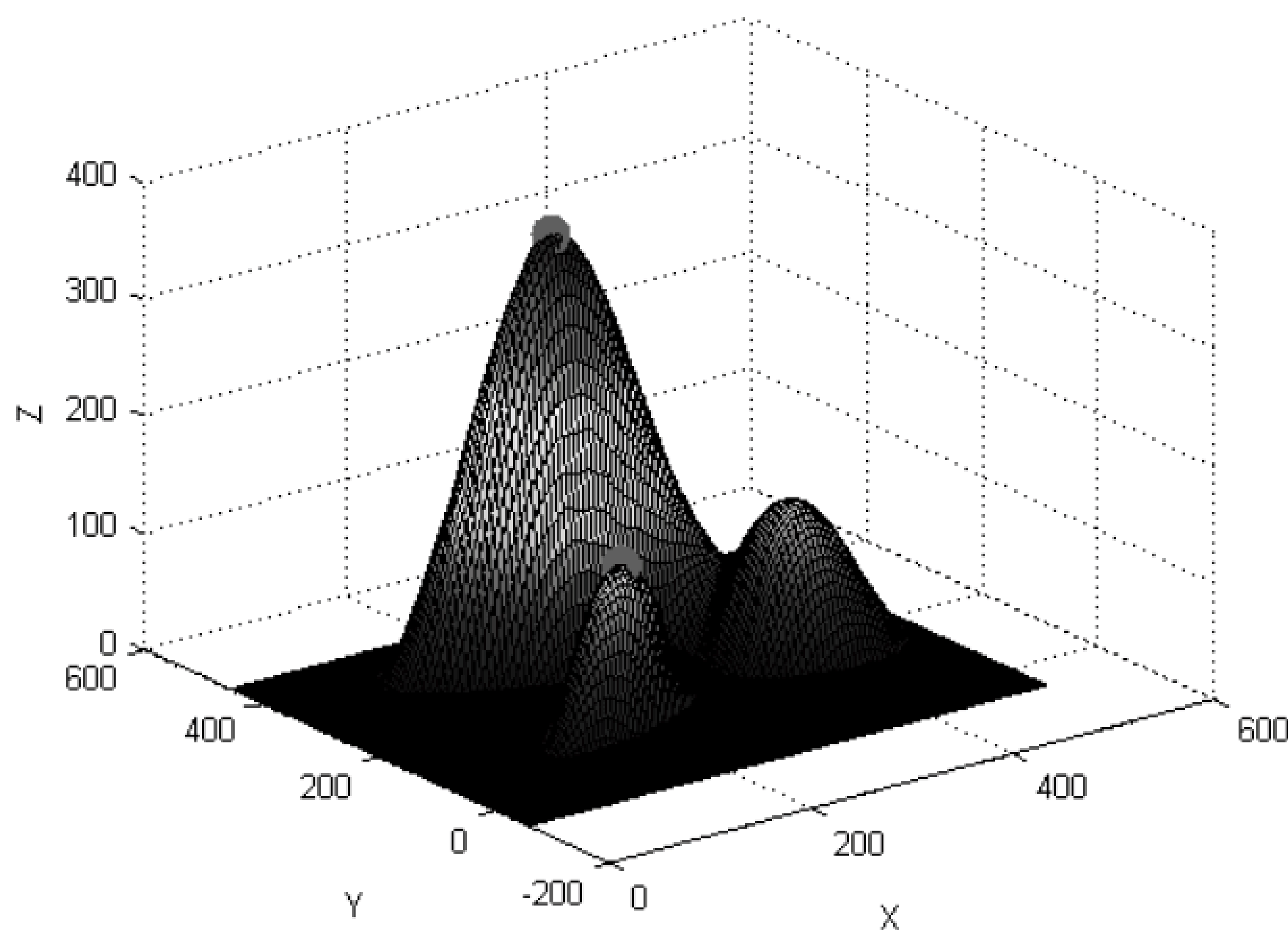


图 13-17　三维曲面图

采用 Dijkstra 算法对该起始点与终止点进行最短路径求解。

Dijkstra 算法：首先假设无线网络图的表述为：$G=(V,E,W)$，其中顶点集 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$，即顶点的个数 $|V|=p$。w_{ij} 表示边 (v_i,v_j) 的权，且需要满足非负条件 $w_{ij}\geqslant 0$。如果 $(v_i,v_j)\notin E$，则令 $w_{ij}=\infty$。最短路问题即为求 G 中 v_1 到其他各顶点的最短路径。用 $d(v_j)$ 表示从 v_1 到 v_j 的只允许经过已选出顶点的最短路径的权值。相应的算法步骤如下。

（1）初始化，令 $d(v_1)=0$，$d(v_j)=w_{1j}$ $(j=2,3,\ldots,n)$，$S=\{v_1\}$，$R=V\setminus S=\{v_2,v_3,\ldots,v_p\}$；

（2）在 R 中寻找一个顶点 v_k，使得：

$$d(v_k)=\min_{v_j\in R}\{d(v_j)\}$$

令 $S=S\cup\{v_k\}$，$R=V\setminus S$。若 $R=\varnothing$，则算法终止，否则转(3)；

（3）修正 $d(v_j)$，对 R 中每个 v_j，令：$d(v_j)=\min\{d(v_j),d(v_k)+w_{kj}\}$ 转(2)。

这个算法经过 $|V|-1$ 次循环之后，所有顶点都被选出，$d(v_j)$ $(j=1,2,\ldots,p)$ 的终值就给出了从顶点 v_1 到其余各顶点 v_j $(j=2,3,\ldots,p)$ 的最短路径的长度，反向追踪即可以得到最短路径。

相应的程序如下：

```
function [r path, r cost] = dijkstra(pathS, pathE, transmat)
% The Implemented Dijkstra's algorithm
%  pathS: 所求最短路径的起点
%  pathE: 所求最短路径的终点
%  transmat: 图的转移矩阵或者邻接矩阵，应为方阵
if ( size(transmat,1) ~= size(transmat,2) )
  error( 'detect cycles:Dijkstra SC', ...
        'transmat has different width and heights' );
end

%初始化:
% noOfNode-图中的顶点数
% parent(i)-节点 i 的父节点
% distance(i)-从起点 pathS 的最短路径的长度
% queue-图的广度遍历
noOfNode = size(transmat, 1);

for i = 1:noOfNode
   parent(i) = 0;
   distance(i) = Inf;
end
queue = [];

%由路径开始最短路计算
for i=1:noOfNode
  if transmat(pathS, i)~=Inf
      distance(i) = transmat(pathS, i);
      parent(i)   = pathS;    %当前路径
      queue     = [queue i];
   end
end

%对图进行广度遍历
while length(queue) ~= 0
  hopS  = queue(1);
  queue = queue(2:end);

  for hopE = 1:noOfNode
    if distance(hopE) > distance(hopS) + transmat(hopS,hopE)
%如果当前距离大于转换后的距离
      distance(hopE) = distance(hopS) + transmat(hopS,hopE);  %更新
      parent(hopE)   = hopS;
      queue          = [queue hopE];
    end
  end

end

%回溯进行最短路径的查找
r_path = [pathE];
i = parent(pathE);

while i~=pathS && i~=0
  r path = [i r path];
  i      = parent(i);
end

if i==pathS
  r_path = [i r_path];  %记录
```

```
else
  r path = []         %清空
end

%返回最短路径的权和
r_cost = distance(pathE);
```

求解起点和终止节点的最短路径，首先将图像的行列转为一行，每一个坐标对应一个点，程序如下：

```
sta = [253.9,340.6,353.2];          %起点
sta = [X1(1,27),Y1(18,1),Z1(18,27)];  %起点
des = [207.5,139.3,126.4];  %终点
des = [X1(1,18),Y1(57,1),Z1(57,18)];  %终点
nX1 = size(X1);
kk=1;
for i=1:nX1(1,1)
     for j=1:nX1(1,2)
          X2(1,kk)  = X1(i,j);  %化成点
          Y2(1,kk)  = Y1(i,j);
          Z2(1,kk)  = Z1(i,j);
          kk=kk+1;
     end
end
```

求解每一个图像点的距离值，程序如下：

```
for i=1:length(X2)
     for j=1:length(X2)
          Distance(i,j)=sqrt( (X2(i)-X2(j))^2 + (Y2(i)-Y2(j))^2 + (Z2(i)-
          Z2(j))^2 );  %距离
          Distance(j,i)=Distance(i,j);
     end
end
```

求解邻接矩阵，相连点之间置 1，其余不相连点置 0，程序如下：

```
%%邻接矩阵
A=zeros(length(X2),length(X2)); %构建邻接矩阵
%第一行数据
for i = 1:nX1(1,2)-1
       A(i,i+1)=1;
       A(i,nX1(1,2)+i)=1;
       A(i,nX1(1,2)+i+1)=1;
end
for i=2:nX1(1,1)-1                  %第二行到倒数第二行
     for j=2:nX1(1,2)-1               %倒数第二列
          A( (i-1)*nX1(1,2)+j, (i-2)*nX1(1,2)+j ) = 1;    %该点正上方点
          A( (i-1)*nX1(1,2)+j, (i-2)*nX1(1,2)+j-1 ) = 1;
         %该点正上方点，向左移一位
          A( (i-1)*nX1(1,2)+j, (i-2)*nX1(1,2)+j+1 ) = 1;
         %该点正上方点，向右移一位
          A( (i-1)*nX1(1,2)+j, (i-1)*nX1(1,2)+j-1 ) = 1;
         %该点行上，向左移一位
          A( (i-1)*nX1(1,2)+j, (i-1)*nX1(1,2)+j+1 ) = 1;
         %该点行上，向右移一位
          A( (i-1)*nX1(1,2)+j, (i)*nX1(1,2)+j ) = 1;      %该点正下方点
```

```
            A( (i-1)*nX1(1,2)+j, (i)*nX1(1,2)+j-1 ) = 1;
           %该点正下方点，向左移一位
            A( (i-1)*nX1(1,2)+j, (i)*nX1(1,2)+j+1 ) = 1;
           %该点正下方点，向右移一位
    end
end
for i=1:length(X2)
      for j=1:length(X2)
            A(j,i)=A(i,j);
      end
end
```

调用 dijkstra()函数求解最短路径，程序如下：

```
%%求最短路径
D=Distance.*A;                                %相连节点计算距离
D(find(D==0))=99999;                          %两点无边相连时赋值为 inf
sta = [253.9,340.6,353.2];                    %起点
sta = [X1(1,27),Y1(18,1),Z1(18,27)];          %起点
des = [207.5,139.3,126.4];                    %终点
des = [X1(1,18),Y1(57,1),Z1(57,18)];          %终点
[Q_path, dmin] = dijkstra( 18*nX1(1,2)+27,57*nX1(1,2)+18 ,D);
```

程序运行输出结果如下：

```
Q_path =
  Columns 1 through 5
       765         806         847         888         929
  Columns 6 through 10
       970        1010        1050        1090        1130
  Columns 11 through 15
      1170        1210        1251        1292        1333
  Columns 16 through 20
      1374        1415        1456        1497        1538
  Columns 21 through 25
      1579        1620        1661        1702        1743
  Columns 26 through 30
      1784        1825        1866        1907        1948
  Columns 31 through 35
      1989        2030        2071        2112        2153
  Columns 36 through 40
      2194        2235        2275        2315        2355
dmin =
  560.4597
```

绘制产生的最优路径数据点，编程如下：

```
figure('color',[1,1,1]),
surf(X,Y,Z)                                          %三维曲面
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z')             %坐标轴标记
hold on
plot3(X1(1,27),Y1(18,1),Z1(18,27),'r.','Markersize',40);   %起点画图
plot3(X1(1,18),Y1(57,1),Z1(57,18),'r.','Markersize',40);   %终点画图
for i=1:length(Q_path)
      row = ( Q_path(i) - mod(Q_path(i), nX1(1,2)) )/nX1(1,2);
      column = mod(Q_path(i),nX1(1,2));
      X3(i) = X1(row,column);    %转化为图形中 x 坐标
      Y3(i) = Y1(row,column);    %转化为图形中 y 坐标
      Z3(i) = Z1(row,column);    %转化为图形中 z 坐标
```

```
    plot3(X3(i),Y3(i),Z3(i),'r.','Markersize',40);
end
```

运行程序输出结果如图 13-18 所示。

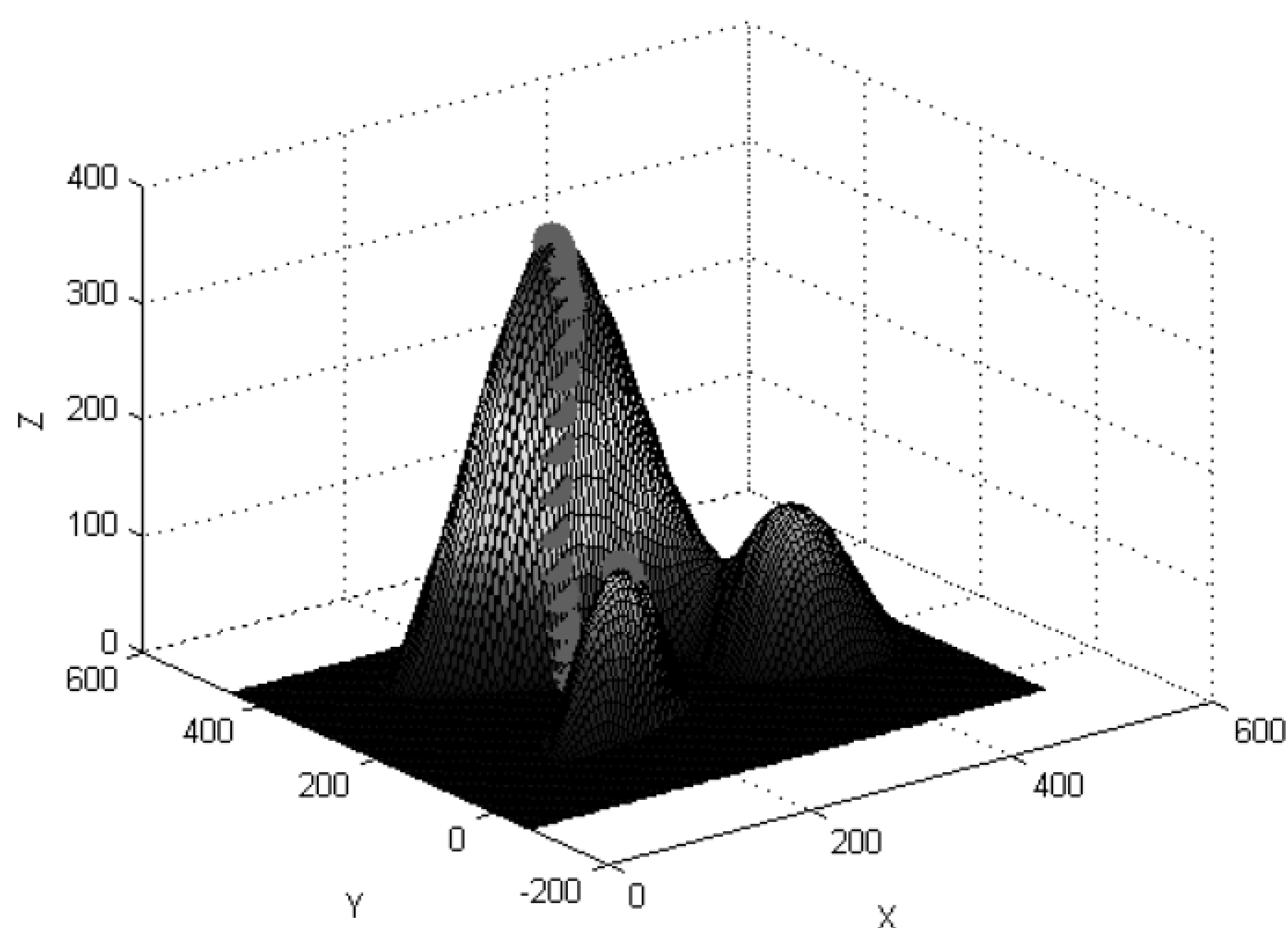


图 13-18　最优路径图

相应的路径编号如下：

```
Q path =
  Columns 1 through 5
        765         806         847         888         929
  Columns 6 through 10
        970        1010        1050        1090        1130
  Columns 11 through 15
       1170        1210        1251        1292        1333
  Columns 16 through 20
       1374        1415        1456        1497        1538
  Columns 21 through 25
       1579        1620        1661        1702        1743
  Columns 26 through 30
       1784        1825        1866        1907        1948
  Columns 31 through 35
       1989        2030        2071        2112        2153
  Columns 36 through 40
       2194        2235        2275        2315        2355
```

采用该方法能够很容易解决任意三维视图的最短路径问题。

13.9　模型的评价与推广

13.9.1　模型的评价

本章利用插值和拟合的方法对问题一中破损图形进行修复，并检验其吻合度，比较得出最佳修复图。问题二中以 Delaunay 准则生成的三角网，同样利用插值的方法根据等高线

对地形进行了三维重建，从插值的结果来看，效果还是不错的，插值后的图形比较逼真，比较符合实际情况。但即使是三次 Hermite 插值，在处理边界及光滑性方面仍不是很完美。就目前学术界研究的情况看，目前在曲面插值方面比较成功的方法有 B 样条函数插值和三角多项式插值等。本模型中要采用更好的曲面插值方法是今后要改进的方向。在问题三中利用梯度下降最快的方法得到地形上下降最快的方向，也即最短路径。

最佳的灭火方案，本文得到了从 A 点到 B 点的最短路径，没有求出 B 点发生火灾时所有的灭火路径。要求最佳灭火方案只需根据每人能灭火的面积，找到能覆盖着火所有范围的所有路径（各个方向），只需满足最长那条路径所用时间最少即可，由于时间关系，在此没进行更多的研究，这也是本章今后需要改进的方向。

13.9.2　模型的推广

在本题中，问题一数据拟合与插值模型可运用于数据处理、预测模型及在交通运输、科研选题、产业结构、教育、医疗、环境中进行综合评价；问题二 Delaunay 准则生成的三角网模型，可运用于二维图到三维图的转换，分块计算模型在立体曲面有比较好的用处，方法简便；问题三中最短路径模型的建立，得到最优路线。此模型在交通运输，产业结构中会有比较大的用途，模型可以优化交通路线，优化产业结构，并能得到最优路线。

第 14 章　煤矿最优通风量问题

煤矿安全生产是我国目前亟待解决的问题之一，做好井下瓦斯和煤尘的监测与控制是实现安全生产的关键环节。涉及到煤矿安全的因素较多，本章所涉及的模型变量因子为风速、截面面积、瓦斯浓度、工作时间和煤矿日产量，通过传感器对这些变量的数据采集，然后分析高矿井为高瓦斯矿井还是低瓦斯矿井等，以及该矿井的不安全程度的计算，最后通过优化分析矿井所需要的最佳通风量，使之能够很好的结合实际并指导实践。

学习目标：

（1）学习和掌握煤矿矿井通风量计算；

（2）掌握 MATLAB 拟合等方法；

（3）掌握构建煤矿不安全程度评价函数等。

14.1　问 题 提 出

瓦斯是一种无毒、无色、无味的可燃气体，其主要成分是甲烷，在矿井中它通常从煤岩裂缝中涌出。瓦斯爆炸需要三个条件：空气中瓦斯达到一定的浓度；足够的氧气；一定温度的引火源。

煤尘是在煤炭开采过程中产生的可燃性粉尘。煤尘爆炸必须具备三个条件：煤尘本身具有爆炸性。煤尘悬浮于空气中并达到一定的浓度；存在引爆的高温热源。试验表明，一般情况下煤尘的爆炸浓度是 $30-2000\mathrm{g/m^3}$，而当矿井空气中瓦斯浓度增加时，会使煤尘爆炸下限降低。

国家《煤矿安全规程》给出了煤矿预防瓦斯爆炸的措施和操作规程，以及相应的专业标准。规程要求煤矿必须安装完善的通风系统和瓦斯自动监控系统，所有的采煤工作面、掘进面和回风巷都要安装甲烷传感器，每个传感器都与地面控制中心相连，当井下瓦斯浓度超标时，控制中心将自动切断电源，停止采煤作业，人员撤离采煤现场。

请你结合源文件中的附表 1 的监测数据，按照煤矿开采的实际情况研究下列问题：

（1）根据《煤矿安全规程》第一百三十三条的分类标准，鉴别该矿是属于“低瓦斯矿井”还是“高瓦斯矿井”。

（2）根据《煤矿安全规程》第一百六十八条的规定，并参照附表 1，判断该煤矿不安全的程度（即发生爆炸事故的可能性）有多大？

（3）为了保障安全生产，利用两个可控风门调节各采煤工作面的风量，通过一个局部通风机和风筒实现掘进巷的通风（见下面的注解）。根据源文件中的附图 1 所示各井巷风量的分流情况、对各井巷中风速的要求（见《煤矿安全规程》第一百零一条），以及瓦斯

和煤尘等因素的影响，确定该煤矿所需要的最佳（总）通风量，以及两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量（实际中，井巷可能会出现漏风现象）。

14.2　摘　　要

本章针对煤矿安全生产问题，分析了瓦斯浓度和煤尘浓度与通风风速的关系，建立了非线性规划数学模型，一定程度上解决了对瓦斯和煤尘的监测与控制问题。

问题一，根据《煤矿安全规程》第一百三十三条的分类标准，建立两个模型：相对瓦斯涌出量模型和绝对瓦斯涌出量模型。然后，利用 MATLAB 软件编程对模型进行求解，得出相对瓦斯涌出量中有出现大于$10\mathrm{m}^3/\mathrm{t}$的值，从而鉴别出该煤矿是属于“高瓦斯矿井”。

问题二，为判断该煤矿的不安全程度，先根据附表 1 中瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度关系数据，进行指数拟合，并作相应的拟合检验，得出煤尘爆炸下限浓度关于瓦斯浓度的函数关系式。再根据瓦斯爆炸下限浓度与煤尘的爆炸下限浓度，建立两个不安全指标：瓦斯不安全指标＝瓦斯实际浓度值/瓦斯爆炸下限浓度值；煤尘不安全指标＝煤尘实际浓度值/煤尘爆炸下限浓度值，即得双目标函数。为了求解方便，在此基础上通过线性加权化为单目标函数，作为该煤矿的不安全程度的综合指标。利用 MATLAB 软件编程对模型求解得出该煤矿的不安全综合指标函数的最大值出现在回风巷Ⅱ中班第 14 天，值为 0.3977，可以看出该煤矿在这三十天是比较安全的。

问题三，为确定该煤矿所需要的最佳总通风量，以及两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量，确定以各监测点的风速为决策变量，根据各采煤区的瓦斯的绝对涌出量和煤尘的绝对涌出量为定值，从而推出各采煤区的瓦斯与煤尘浓度表达式，再以问题二中的不安全综合指标函数为目标函数，建立非线性规划模型求最小值。利用 MATLAB 软件编程求解出满足不安全综合指标值最小的各监测点风速，从而计算出最佳通风量。

本模型的稳定性较高，成功地解决了煤矿瓦斯和煤尘的监测和控制，得到了较为精确且合理的结果。

关键词：线性加权、拟合、非线性规划、不安全程度。

14.3　问题的分析

对于问题一，根据《煤矿安全规程》第一百三十三条给出的分类标准可知：一个矿井中只要有一个煤岩层发现瓦斯，该矿井即为瓦斯矿井，瓦斯矿井必须依照矿井瓦斯等级进行管理。矿井等级是根据矿井相对瓦斯涌出量、矿井绝对瓦斯涌出量和瓦斯涌出形式划分为低瓦斯矿井和高瓦斯矿井。

矿井相对瓦斯涌出量小于或等于$10\mathrm{m}^3/\mathrm{t}$且矿井绝对瓦斯涌出量小于或等于$40\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$为低瓦斯矿井。

矿井相对瓦斯涌出量大于$10\mathrm{m}^3/\mathrm{t}$且矿井绝对瓦斯涌出量大于$40\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$为高瓦斯矿井。

通过对绝对瓦斯涌出量及相对瓦斯涌出量的量纲分析，可得相对瓦斯涌出量计算公式为：

风速×截面面积×瓦斯浓度×工作时间÷煤矿日产量

绝对瓦斯涌出量计算公式为：

风速×截面面积×瓦斯浓度

再根据附表 1 给出的监测数据利用 MATLAB 软件进行处理，计算出工作面Ⅰ、工作面Ⅱ、掘进工作面、回风巷Ⅰ、回风巷Ⅱ和总回风巷六处的相对瓦斯涌出量和绝对瓦斯涌出量，然后根据题中所给的矿井瓦斯分类标准确定该矿是属于“低瓦斯矿井”还是“高瓦斯矿井”。

对于问题二，先根据附表 1 瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度关系数据，进行拟合，并作相应的拟合检验，得出煤尘爆炸下限浓度关于瓦斯浓度的函数关系式。通过所求出的函数关系式可以求出每一个瓦斯浓度对应的每一个煤尘爆炸下限浓度的最小值。根据附件 1 背景资料中“瓦斯浓度：在新鲜空气中瓦斯爆炸界限一般为 5%～16%”，也取瓦斯爆炸下限浓度的最小值 5%。

煤矿发生爆炸，可能是瓦斯爆炸，也可能是煤尘爆炸，也有可能是两者都发生爆炸。首先，对煤矿煤尘爆炸的不安全程度引入一个指标，即把各监测点实际所测的煤尘浓度与该点所测得瓦斯浓度对应下的煤尘爆炸下限浓度的比值作为该指标，比值越大，煤矿煤尘爆炸的可能性越大，该煤矿越不安全；然后，对瓦斯爆炸的不安全程度引入另一个指标，即把各监测点实际所测的瓦斯浓度与瓦斯爆炸下限浓度的比值作为该指标，比值越大，煤矿瓦斯爆炸的可能性越大，该煤矿越不安全。煤矿无论是瓦斯爆炸还是煤尘爆炸都是非常危险的，因此以上引入的两个评价指标都是同等的重要，对以上两个指标进行线性加权处理，构成一个评价煤矿安全程度的综合性指标，从而建立煤矿不安全程度的单目标数学模型。利用 MATLAB 软件对所建的数学模型编程计算，可求出煤矿不安全程度有多大。

对于问题三，问题要求为了保障安全生产，利用两个可控风门调节各采煤工作面的风量，通过一个局部通风机和风筒实现掘进巷的通风。根据各井巷风量的分流情况、对各井巷中风速的要求以及瓦斯和煤尘等因素的影响，确定该煤矿所需要的最佳通风量，以及两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量。

绝对瓦斯涌出量 $Q_{ijk}=60\cdot V_{ijk}\cdot S_i\cdot a_{ijk}$，对于同一个煤矿 Q_{ijk} 是不可控的，即可以认为第 i 个监测点第 j 天第 k 段时间的绝对瓦斯涌出量 Q_{ijk} 为定值。对于同一煤矿煤尘绝对涌出量 $W_{ijk}=d_{ijk}\cdot S_i\cdot V_{ijk}$，可以认为第 i 个监测点第 j 天第 k 段时间的绝对瓦斯涌出量 W_{ijk} 也为定值，采取问题二中定的指标即瓦斯爆炸的不安全程度指标和煤尘爆炸的不安全程度指标，并对这两个指标加权处理，由于瓦斯爆炸和煤尘爆炸都是十分危险的，此时的权值都为 0.5，最后建立非线性规划模型，求出工作面Ⅰ、工作面Ⅱ、掘进工作面、回风巷Ⅰ、回风巷Ⅱ、总回风巷和局部通风机风筒早、中、晚的风速。

最后，通过利用 MATLAB 软件编写程序求出的工作面Ⅰ、工作面Ⅱ和局部通风机风筒的风速，同时代入表达式通风量=风速×截面面积，可以求出最佳的通风量。

14.4　模型的假设

（1）假设风速不会因为通过弯道后大小发生改变，即风速与原来的速度保持不变；

（2）假设系统中进风口和出风口都只有一个；

（3）假设从进风口进入的风都是新鲜风，此新鲜风中不含有瓦斯和煤尘等有害物质；

（4）假设各处的漏风量占通过的总风量的比值是一定的，即各处的漏风率是一定的；

（5）假设瓦斯在一天中绝对涌出量都是相等的，不会存在突然涌出多、突然少的情况；

（6）假设只有主干道的截面面积为 $5m^2$，系统中其他的截面面积都为 $4m^2$，风筒截面积为 $0.04\pi\ m^2$；

（7）假设煤矿一天的工作时间为 24 小时。

14.5　符号的说明

Q_{ijk}：第 i 监测点第 j 天第 k 段时间的绝对瓦斯涌出量（单位：m^3/min），$i=1,2,\cdots6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$。

V_{ijk}：第 i 监测点第 j 天第 k 段时间的风速（单位：m/s），$i=1,2,\cdots6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$。

S_i：第 i 监测点的截面面积（单位：m），$i=1,2,\cdots6$。

a_{ijk}：第 i 监测点第 j 天第 k 段时间的瓦斯浓度（%），$i=1,2,\cdots6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$。

P_{ijk}：第 i 监测点第 j 天第 k 段时间的相对瓦斯涌出量（m^3/t），$i=1,2,\cdots6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$。

h_j：第 j 天的煤矿生产速率（单位：t/min），$j=1,2,\cdots,30$。

b_j：第 j 天煤矿日产量（单位：t/d），$j=1,2,\cdots,30$。

e_i：第 i 监测点的瓦斯爆炸下限浓度（%），$i=1,2,\cdots6$。

C_{ijk}：每一个瓦斯浓度求出的煤尘爆炸下限浓度，$i=1,2,\cdots6$，$j=1,2,\cdots,30$。

d_{ijk}：实际所测得的煤尘浓度，$i=1,2,\cdots6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$。

g_{ijk}：第 i 监测点第 j 天第 k 段时间瓦斯爆炸的不安全程度指标，$i=1,2,\cdots6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$。

f_{ijk}：第 i 监测点第 j 天第 k 段时间煤尘爆炸的不安全程度指标，$i=1,2,\cdots6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$。

F_{ijk}：第 i 监测点第 j 天第 k 段时间煤矿爆炸的不安全程度的综合指标，$i=1,2,\cdots6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$。

t：采煤的工作时间，$t=24$（单位：h）。

W_{ijk}：第 i 监测点第 j 天第 k 段时间的煤尘的绝对涌出量（单位：g/s），$i=1,2,\cdots6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$。

V_{ik}：监测点 i 第 k 段时间的风速（单位：m/s），$i=1,2,\cdots,6$，$k=1,2,3$。

V_{7k}：局部通风机风筒中第 k 段时间的风速，$k=1,2,3$（单位：m/s）。

Q_{1ik}：第 i 个监测点第 k 段时间的绝对瓦斯涌出量的最大值（单位：m^3/min），$i=1,2,\cdots6$，$k=1,2,3$。

W_{1ik}：第 i 监测点第 k 段时间的煤尘绝对涌出量的最大值（单位：g/s），$i=1,2,\cdots 6$，$k=1,2,3$。

y_{ik}：第 i 个采煤工作面第 k 段时间的风量（单位：$\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$），$i=1,2$，$k=1,2,3$。

y_{7k}：局部通风机第 k 段时间的额定风量（单位：$\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$）。

d_{ik}：第 i 个监测点第 k 段时间所计算的煤尘浓度，$i=1,2,\cdots 6$，$k=1,2,3$。

a_{ik}：第 i 个监测点第 k 段时间所计算的瓦斯浓度（%），$i=1,2,\cdots 6, k=1,2,3$。

14.6　问　题　一

根据第一百三十三条的分类标准可知，矿井相对瓦斯涌出量小于或等于 $10\mathrm{m}^3/\mathrm{t}$，且矿井绝对瓦斯涌出量小于或等于 $40\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 为低瓦斯矿井，矿井相对瓦斯涌出量大于 $10\mathrm{m}^3/\mathrm{t}$ 且矿井绝对瓦斯涌出量大于 $40\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 为高瓦斯矿井。

为了便于表达，假设工作面Ⅰ、工作面Ⅱ、掘进工作面、回风巷Ⅰ、回风巷Ⅱ和总回风巷六处分别为 i 个监测点，即 $i=1,2,\cdots 6$。根据题目的要求，首先，可以计算各个监测点的绝对瓦斯涌出量，绝对瓦斯涌出量计算公式为：

风速×截面面积×瓦斯浓度

则有：

$$Q_{ijk}=V_{ijk}\cdot S_i\cdot a_{ijk}\cdot 60$$

其中，$i=1,2,\cdots 6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$，Q_{ijk} 表示第 i 监测点第 j 天第 k 段时间的绝对瓦斯涌出量，V_{ijk} 表示第 i 监测点第 j 天第 k 段时间的风速，S_i 表示第 i 监测点的截面面积，a_{ijk} 表示第 i 个监测点第 j 天第 k 段时间的瓦斯浓度。

然后，需要计算出各个监测点的相对涌出量，先假设煤矿一天内的煤矿生产率是一个固定的值，则有：

$$h_j=\frac{b_j}{t\times 60\times 60}\qquad j=1,2,\cdots,30$$

其中，h_j 表示第 j 天的煤矿生产速率，b_j 表示第 j 天煤矿日产量，t 表示采煤的工作时间，此处工作时间取 24 小时。

根据量纲分析，相对瓦斯涌出量计算公式为：

风速×截面面积×瓦斯浓度×工作时间÷煤矿日产量

则有：

$$P_{ijk}=\frac{V_{ijk}\cdot S_i\cdot t\cdot a_{ijk}}{h_j\cdot t}=\frac{V_{ijk}\cdot S_i\cdot a_{ijk}\cdot t\cdot 60\times 60}{b_j}$$

其中，P_{ijk} 表示第 i 监测点第 j 天第 k 段时间的相对瓦斯涌出量，$i=1,2,\cdots 6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$。

综上所述，对问题一建立的初始模型为：

$$Q_{ijk}=V_{ijk}\cdot S_i\cdot a_{ijk}\cdot 60$$

$$P_{ijk}=\frac{V_{ijk}\cdot S_i\cdot a_{ijk}\cdot t\cdot 60\times 60}{b_j}$$

其中，$i=1,2,\cdots 6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$。

最后，根据题目中提供的该矿的相关数据，利用 MATLAB 软件编程计算：

```
clc,clear;close all
v=xlsread('data','风速','B4:G33 ');                %风速
w=xlsread('data','瓦斯','D4:I33 ');                %瓦斯
t=24*60*60;                                        %一天
s=4;                                               %截面面积
%日产量（t/d）
m=[597;602;639;616;610;588;582;605;585;620;616;608;612;606;592;609;605;
581;616;612;601;616;588;625;598;618;617;605;586;620];
for i=1:size(v,1)
    f(i,:)=v(i,:)*s*t.*w(i,:)*0.01/m(i);           %相对瓦斯涌出量
end
for i=1:size(v,1)
    q(i,:)=v(i,:)*s.*w(i,:)*0.01*60;               %绝对瓦斯涌出量
end
```

可以很容易得到该矿各监测点的相对瓦斯涌出量和绝对瓦斯涌出量，绝对瓦斯涌出量、相对瓦斯涌出量的计算结果见表 14-1 和表 14-2。

表 14-1　该矿各监测点的绝对瓦斯涌出量

日期与班次	工作面 Ⅰ早班	工作面 Ⅰ中班	工作面 Ⅰ晚班	工作面 Ⅱ早班	工作面 Ⅱ中班	工作面 Ⅱ晚班
1	9.8644	9.1119	7.9959	10.917	10.017	10.073
2	8.1474	8.7164	8.567	9.9192	11.102	10.985
3	10.25	9.0487	8.1743	10.486	10.894	11.547
4	8.9595	9.6602	8.0478	11.257	8.4848	10.738
5	8.2631	8.9282	8.4713	9.9439	9.6995	12.103
6	9.5448	8.7812	8.6205	11.428	11.715	12.46
7	9.5633	9.5069	8.859	9.2016	9.9465	11.437
8	9.2253	9.2617	8.1029	9.3649	9.4728	11.437
9	8.163	9.252	8.9623	11.673	10.827	8.4355
10	8.8802	9.0775	8.5518	10.348	10.258	10.417
11	9.2797	8.6199	8.8444	9.7553	9.5912	10.196
12	8.7807	8.8065	8.4242	10.319	9.6371	8.2697
13	9.4615	9.6602	9.084	11.233	10.539	10.218
14	8.4403	9.3484	8.6205	9.0585	13.081	10.441
15	9.1905	9.1222	8.9142	9.3076	10.065	9.4252
16	9.6178	9.008	8.594	9.5152	10.539	9.6274
17	8.8258	9.252	8.7325	11.546	12.08	11.658
18	9.1436	9.1314	8.2966	10.721	10.042	11.424
19	9.8233	8.7525	8.8071	11.061	8.6785	9.6733
20	8.8918	8.8662	8.1029	11.18	8.6785	10.514
21	9.4267	9.4035	8.2457	9.8496	11.476	11.232
22	8.8177	9.2026	8.3317	10.891	9.8751	11.602
23	8.8918	9.7738	8.7455	11.009	11.706	11.849
24	9.0169	8.4	8.4805	10.788	11.012	10.147
25	8.7164	9.1222	8.7227	9.9439	11.184	12.278

续表

日期与班次	工作面Ⅰ早班	工作面Ⅰ中班	工作面Ⅰ晚班	工作面Ⅱ早班	工作面Ⅱ中班	工作面Ⅱ晚班
26	8.9404	9.2129	8.3528	9.6342	10.351	9.8743
27	9.3607	9.2129	8.9953	9.4255	11.771	10.491
28	9.7659	9.0419	8.1646	10.586	10.775	10.169
29	9.4476	9.105	9.2387	11.614	8.1675	9.4252
30	8.2909	8.5717	9.3458	11.546	9.8026	10.541
日期与班次	掘进工作面早班	掘进工作面中班	掘进工作面晚班	回风巷Ⅰ早班	回风巷Ⅰ中班	回风巷Ⅰ晚班
1	3.4275	3.4012	4.1118	9.0235	8.4055	8.6724
2	3.0184	3.4012	2.9763	7.7682	8.5076	8.9191
3	3.6716	3.4309	2.0322	9.4382	8.9968	8.1523
4	4.0682	2.2901	2.5947	8.3507	9.2527	8.1557
5	3.7743	3.2355	2.7418	7.6523	8.4004	8.3558
6	2.6959	2.7591	2.8333	8.2838	8.0464	8.5263
7	3.0184	3.0087	2.779	8.621	8.3864	9.1612
8	3.7743	3.2972	2.4919	8.3769	8.2512	8.3944
9	2.1282	2.2238	2.5704	7.5987	9.0468	9.0163
10	4.3135	2.9299	2.1173	8.3011	8.6041	8.5945
11	2.7957	2.9887	3.3337	8.7035	8.1642	8.9953
12	2.5047	2.117	3.3485	7.6868	8.4829	9.0322
13	3.1769	2.6483	3.5251	9.1852	9.0047	9.2943
14	2.6686	2.6391	3.5411	7.7771	8.677	8.7554
15	2.0398	3.0436	3.8034	8.3769	8.4997	9.296
16	3.7713	2.8248	3.0909	9.1082	8.4156	8.7537
17	3.0641	3.2544	3.3603	8.6673	8.355	8.5479
18	2.2422	3.0561	3.2752	8.5385	8.6793	8.5502
19	3.8746	2.7471	2.6821	8.7375	8.4021	8.6309
20	3.5754	4.0101	3.1334	8.5385	8.5233	8.233
21	3.4121	2.8116	2.7294	8.5045	8.7522	8.2762
22	3.5184	3.2355	1.7203	8.2498	8.9115	8.3956
23	2.3824	3.035	3.6527	7.8841	9.1562	9.5921
24	4.2131	2.3992	2.4919	8.2331	7.9735	8.5894
25	2.6959	2.903	2.5031	7.9979	8.079	8.9032
26	3.2096	2.4163	3.1795	7.8039	8.9626	8.5536
27	3.1638	2.3135	3.5399	8.5285	8.9261	8.9288
28	2.4821	1.8714	2.4919	8.708	8.5278	8.5263
29	3.6852	2.6031	4.0231	8.6673	8.5699	8.8674
30	2.6484	3.071	3.241	8.2253	8.1261	9.5324
日期与班次	回风巷Ⅱ早班	回风巷Ⅱ中班	回风巷Ⅱ晚班	总回风巷早班	总回风巷中班	总回风巷晚班
1	11.566	10.659	11.086	19.581	18.371	19.899
2	10.724	12.072	11.51	17.501	19.705	19.62
3	11.32	11.672	12.5	20.028	19.531	18.925
4	11.972	9.0677	11.139	19.951	17.03	18.492

续表

日期与班次	回风巷 II 早班	回风巷 II 中班	回风巷 II 晚班	总回风 巷早班	总回风 巷中班	总回风 巷晚班
5	10.755	10.101	12.687	18.035	17.792	19.448
6	12.211	12.269	13.305	19.027	19.461	20.508
7	10.002	10.639	11.963	17.672	18.346	20.139
8	10.002	10.06	12.201	17.879	17.744	19.225
9	12.333	11.486	9.2822	17.897	19.002	17.906
10	10.825	11.228	11.244	19.107	18.523	18.595
11	10.504	10.349	10.84	17.944	18.015	19.339
12	10.962	10.398	8.7871	17.229	16.997	17.902
13	12.085	11.432	10.97	19.912	18.983	20.022
14	9.796	14.065	11.086	16.594	20.575	19.644
15	10.03	10.881	10.272	16.605	18.098	19.399
16	10.393	11.486	10.321	18.886	18.788	18.397
17	12.57	12.632	12.376	19.835	19.993	20.376
18	11.547	10.933	12.071	18.319	18.714	19.583
19	11.843	9.5354	10.025	20.066	16.932	17.94
20	11.964	9.0153	11.171	19.776	17.66	18.735
21	10.415	12.033	11.881	18.155	19.153	19.214
22	11.722	10.398	12.31	18.995	18.398	18.868
23	11.558	12.565	12.932	17.913	20.316	21.761
24	11.384	11.617	10.737	19.467	17.886	18.078
25	10.635	11.728	12.928	16.95	18.275	20.685
26	10.49	11.258	10.52	17.808	18.817	18.809
27	10.176	12.629	11.086	17.724	19.23	19.865
28	11.36	11.486	10.869	18.269	17.788	18.542
29	12.57	9.0734	10.196	20.549	16.534	19.262
30	12.389	10.447	10.942	19.292	17.926	20.061

表 14-2　该矿各监测点的绝对瓦斯涌出量

日期与 班次	工作面 I 早班	工作面 I 中班	工作面 I 晚班	工作面 II 早班	工作面 II 中班	工作面 II 晚班
1	4.0896	3.8093	3.5482	4.6699	4.2432	4.1131
2	3.3778	3.6439	3.8016	4.2432	4.703	4.4856
3	4.2494	3.7829	3.6274	4.4856	4.6147	4.715
4	3.7145	4.0385	3.5712	4.8154	3.5942	4.3848
5	3.4258	3.7325	3.7591	4.2538	4.1088	4.9421
6	3.9571	3.671	3.8254	4.8888	4.9627	5.088
7	3.9648	3.9744	3.9312	3.9362	4.2134	4.6699
8	3.8246	3.8719	3.5957	4.0061	4.0128	4.6699
9	3.3842	3.8678	3.977	4.9934	4.5864	3.4445
10	3.6816	3.7949	3.7949	4.4266	4.3452	4.2538
11	3.8472	3.6036	3.9247	4.1731	4.063	4.1633
12	3.6403	3.6816	3.7382	4.4141	4.0824	3.3768
13	3.9226	4.0385	4.031	4.8053	4.4642	4.1722

续表

日期与班次	工作面Ⅰ早班	工作面Ⅰ中班	工作面Ⅰ晚班	工作面Ⅱ早班	工作面Ⅱ中班	工作面Ⅱ晚班
14	3.4992	3.9082	3.8254	3.875	5.5411	4.2636
15	3.8102	3.8136	3.9557	3.9816	4.2636	3.8486
16	3.9874	3.7658	3.8136	4.0704	4.4642	3.9312
17	3.659	3.8678	3.875	4.9392	5.117	4.7602
18	3.7908	3.8174	3.6816	4.5864	4.2538	4.6649
19	4.0726	3.659	3.9082	4.7318	3.6763	3.9499
20	3.6864	3.7066	3.5957	4.7827	3.6763	4.2931
21	3.9082	3.9312	3.659	4.2134	4.8614	4.5864
22	3.6557	3.8472	3.6972	4.6589	4.1832	4.7376
23	3.6864	4.086	3.8808	4.7095	4.9586	4.8384
24	3.7382	3.5117	3.7632	4.6147	4.6649	4.1434
25	3.6137	3.8136	3.8707	4.2538	4.7376	5.0134
26	3.7066	3.8515	3.7066	4.1213	4.3848	4.032
27	3.8808	3.8515	3.9917	4.032	4.9862	4.284
28	4.0488	3.78	3.623	4.5283	4.5646	4.1525
29	3.9168	3.8064	4.0997	4.968	3.4598	3.8486
30	3.4373	3.5834	4.1472	4.9392	4.1525	4.3044
日期与班次	掘进工作面早班	掘进工作面中班	掘进工作面晚班	回风巷Ⅰ早班	回风巷Ⅰ中班	回风巷Ⅰ晚班
1	1.3853	1.429	1.6704	3.8851	3.5957	3.6617
2	1.2199	1.429	1.2091	3.3446	3.6394	3.7658
3	1.4839	1.4414	0.8256	4.0637	3.8486	3.4421
4	1.6442	0.96216	1.0541	3.5954	3.9581	3.4435
5	1.5254	1.3594	1.1138	3.2947	3.5935	3.528
6	1.0896	1.1592	1.151	3.5666	3.4421	3.6
7	1.2199	1.2641	1.129	3.7118	3.5875	3.8681
8	1.5254	1.3853	1.0123	3.6067	3.5297	3.5443
9	0.86016	0.93432	1.0442	3.2717	3.87	3.8069
10	1.7434	1.231	0.86016	3.5741	3.6806	3.6288
11	1.1299	1.2557	1.3543	3.7474	3.4925	3.798
12	1.0123	0.88944	1.3603	3.3096	3.6288	3.8136
13	1.284	1.1126	1.4321	3.9547	3.852	3.9242
14	1.0786	1.1088	1.4386	3.3485	3.7118	3.6967
15	0.8244	1.2787	1.5451	3.6067	3.636	3.925
16	1.5242	1.1868	1.2557	3.9216	3.6	3.696
17	1.2384	1.3673	1.3651	3.7318	3.5741	3.6091
18	0.90624	1.284	1.3306	3.6763	3.7128	3.6101
19	1.566	1.1542	1.0896	3.762	3.5942	3.6442
20	1.445	1.6848	1.273	3.6763	3.6461	3.4762
21	1.379	1.1813	1.1088	3.6617	3.744	3.4944
22	1.422	1.3594	0.69888	3.552	3.8122	3.5448
23	0.96288	1.2751	1.4839	3.3946	3.9168	4.05
24	1.7028	1.008	1.0123	3.5448	3.4109	3.6266

续表

日期与班次	掘进工作面早班	掘进工作面中班	掘进工作面晚班	回风巷Ⅰ早班	回风巷Ⅰ中班	回风巷Ⅰ晚班
25	1.0896	1.2197	1.0169	3.4435	3.456	3.7591
26	1.2972	1.0152	1.2917	3.36	3.834	3.6115
27	1.2787	0.972	1.4381	3.672	3.8184	3.7699
28	1.0032	0.78624	1.0123	3.7493	3.648	3.6
29	1.4894	1.0937	1.6344	3.7318	3.666	3.744
30	1.0704	1.2902	1.3166	3.5414	3.4762	4.0248
日期与班次	回风巷Ⅱ早班	回风巷Ⅱ中班	回风巷Ⅱ晚班	总回风巷早班	总回风巷中班	总回风巷晚班
1	4.9157	4.4856	4.5576	8.2812	7.7184	8.0287
2	4.5576	5.0803	4.7318	7.4016	8.279	7.9162
3	4.8108	4.9121	5.1389	8.4701	8.2056	7.6356
4	5.088	3.816	4.5792	8.4374	7.1549	7.4611
5	4.571	4.2509	5.2159	7.6274	7.475	7.8468
6	5.1898	5.1631	5.4698	8.0467	8.1763	8.2742
7	4.2509	4.4774	4.9183	7.4736	7.7078	8.1254
8	4.2509	4.2336	5.016	7.5614	7.4549	7.7566
9	5.2416	4.8336	3.816	7.5689	7.9834	7.2245
10	4.6008	4.7251	4.6224	8.0808	7.7822	7.5024
11	4.4642	4.355	4.4563	7.5888	7.5689	7.8029
12	4.6589	4.3757	3.6125	7.2864	7.141	7.223
13	5.136	4.8108	4.5101	8.4211	7.9757	8.0784
14	4.1633	5.9189	4.5576	7.0178	8.6443	7.9258
15	4.2629	4.5792	4.223	7.0224	7.6037	7.8269
16	4.417	4.8336	4.243	7.9872	7.8936	7.4225
17	5.3424	5.3158	5.088	8.3885	8.4	8.2212
18	4.9075	4.6008	4.9627	7.7472	7.8624	7.9013
19	5.0333	4.0128	4.1213	8.4864	7.1136	7.2384
20	5.0846	3.7939	4.5926	8.3635	7.4198	7.559
21	4.4266	5.064	4.8845	7.6781	8.0467	7.7525
22	4.9819	4.3757	5.0609	8.0333	7.7299	7.6128
23	4.9121	5.2877	5.3165	7.5756	8.5354	8.7802
24	4.8384	4.8888	4.4141	8.233	7.5144	7.2941
25	4.5197	4.9354	5.3148	7.1683	7.6781	8.346
26	4.4582	4.7376	4.3248	7.5312	7.9056	7.5888
27	4.3248	5.3148	4.5576	7.4957	8.0794	8.015
28	4.8278	4.8336	4.4683	7.7263	7.4736	7.481
29	5.3424	3.8184	4.1918	8.6904	6.9466	7.7717
30	5.2654	4.3963	4.4986	8.1588	7.5312	8.0942

根据表 14-1 的结果可知，6 个监测点早中晚相对瓦斯涌出量中最大的数值分别为 10.25、9.7738、9.3458、11.6730、13.081、12.46、4.3135、4.0101、4.1118、9.4382、9.2527、

9.5921、12.57、14.065、13.305、20.5487、20.5749 和 21.7615。再结合《煤矿安全规程》第一百三十条给出的分类标准：矿井相对瓦斯涌出量大于10 m^3/t 且矿井绝对瓦斯涌出量大于 40 m^3/min 为高瓦斯矿井。而显然模型求解得出相对瓦斯涌出量出现大于 10 m^3/t 的值，从而得出该煤矿是属于“高瓦斯矿井”。

因此，该矿属于高瓦斯矿井。

14.7 问 题 二

煤尘是在煤炭开采过程中产生的可燃性粉尘。试验表明，一般情况下煤尘的爆炸浓度是 30～2000g / m^3，当矿井空气中瓦斯浓度增加时，会使煤尘爆炸下限降低，结果如表 14-3 所示。

表 14-3 空气中煤尘的爆炸下限和空气中瓦斯浓度数据表

空气中瓦浓度(%)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4
煤尘爆炸下限浓度 (g/m^3)	30~50	22.5~37.5	15~25	10.5~17.5	6.5~12.5	4.5~7.5	3~5	2.5~3.5	1.5~2.5

为了保障安全生产，通常利用两个可控风门调节各采煤工作面的风量，通过一个局部通风机和风筒实现掘进巷的通风（掘进巷需要安装局部通风机，其额定风量一般为 150~400 m^3/min。局部通风机所在的巷道中至少需要有 15%的余裕风量（新鲜风）才能保证风在巷道中的正常流动，否则可能会出现负压导致乏风逆流，即局部通风机将乏风吸入并送至掘进工作面）。

根据表 14-3 所示瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度关系的数据，可以利用 MATLAB 软件得出瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度的函数关系式。先将空气中的瓦斯浓度作为 x 变量，将煤尘爆炸下限浓度最小值作为 y 变量，利用 MATLAB 软件画出散点图，编程如下：

```
clc,clear,close all
datax=0:0.5:4;                                  %空气中瓦斯浓度(%)
datay=[30 22.5 15 10.5 6.5 4.5 3 2.5 1.5];      %煤尘爆炸下限浓度(g/m3)
figure('color',[1 1 1])
scatter(datax,datay,'r*');                      %散点图
hold on
p = polyfit(datax,log(datay),1)                 %指数拟合
datay2=exp(p(1)*datax+p(2));
plot(datax,datay2,'linewidth',2)
xlabel('空气中瓦斯浓度(%)');  ylabel(' 煤尘爆炸下限浓度(g/m3)');  grid off;
axis tight
```

得到的散点图如图 14-1 所示。

由散点图 14-1 可以看到，数据大致成指数分布在坐标系中，这说明瓦斯浓度与煤尘爆

炸下限浓度的关系大致可以看成是指数关系。因此 y 与 x 之间的关系可假定为如下关系：

$$y = \mathrm{e}^{ax+b} + \varepsilon$$

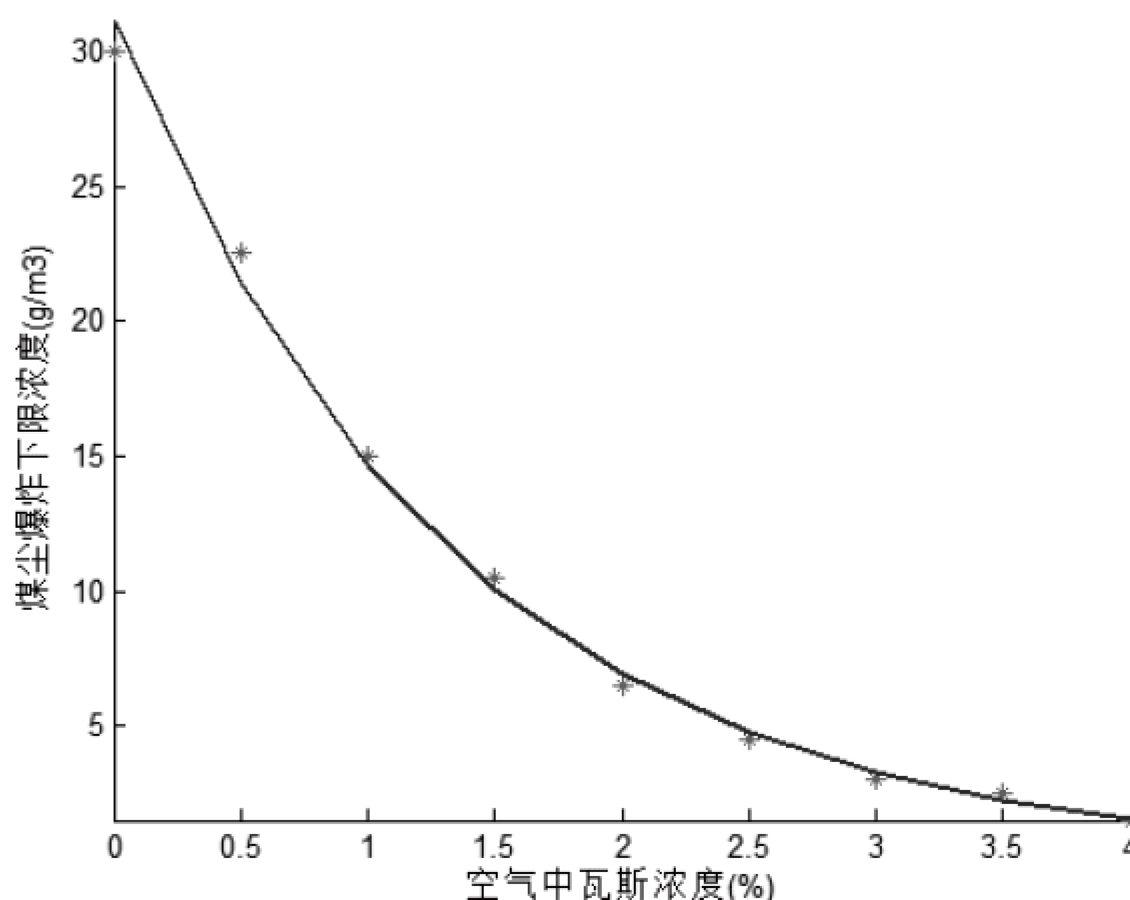


图 14-1　瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度关系的散点图

其中 a,b,ε 是三个未知变量，ε 为其他因素对 y 的影响，x 是非随机可精确观察的，而 ε 是均值为零的随机变量，是不可观察的，可不予考虑。

将 $y = \mathrm{e}^{ax+b}$ 进行变形，使之成为线性的，即 $\ln y = ax + b$ 。可称该模型为一元线性回归模型，记为：

$$\begin{cases} \ln y = ax + b + \varepsilon \\ E\varepsilon = 0, D\varepsilon = \sigma^2 \end{cases}$$

用最小二乘法估计 a,b 的值，即取 a,b 的一组估计值 $\hat{a},\hat{b}$ 使其随机误差 ε_i 的平方和达到最小，即使 $\ln y_i$ 与 $\ln \hat{y}_i = \hat{a}x_i + \hat{b}$ 的拟合最佳，若记：

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (\ln y_i - ax_i - b)^2$$

则 $Q(\hat{a},\hat{b}) = \min\limits_{a,b} Q(a,b) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\ln y_i - \hat{a}x_i - \hat{b})^2$ 。显然 $Q(a,b) \geqslant 0$ ，且关于 a,b 可微，则由多元函数存在极值的必要条件得：

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial Q}{\partial a}\right|_{(\hat{a},\hat{b},\hat{c})} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial Q}{\partial b}\right|_{(\hat{a},\hat{b},\hat{c})} = 0 \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (\ln y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (\ln y_i - \hat{a}x_i - \hat{b})x_i = 0 \end{cases}$$

此方程称为正规方程组，求解可以得到 $\begin{cases} \hat{a} = l_{xy} / l_{xx} \\ \hat{b} = \ln \overline{y} - \hat{a}\overline{x} \end{cases}$ ，称 $\hat{a},\hat{b}$ 为 a,b 的最小二乘估计。

$$\ln\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln y_i\ ,\quad \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\quad l_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2\ ,$$

其中，$l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i)(\sum_{i=1}^{n}y_i)$。

综上可知，当 a 的值越大，$\ln y$ 随 x 的变化趋势就越明显，同理，当 a 的值越小，$\ln y$ 随 x 的变化趋势就越不明显，特别当 a 等于 0 时，则认为 $\ln y$ 与 x 之间不存在线性关系。

则可提出假设：

$$H_0:a=0;\ H_1:a\neq 0$$

进行检验，当假设被拒绝，则回归显著，即认为 $\ln y$ 与 x 之间存在线性关系，所求的线性方程有意义；否则回归不显著，$\ln y$ 与 x 之间不存在线性关系。利用 MATLAB 软件中的 regress 函数进行检验，编程如下：

```
clc,clear,close all
format long
x=0:0.5:4;                                   %空气中瓦斯浓度(%)
y=[30 22.5 15 10.5 6.5 4.5 3 2.5 1.5];       %煤尘爆炸下限浓度(g/m3)
c =[3.4250 -0.7304];
for i=1:9
      y(i)=log(y(i)/c(1));                   %y 值
end
x=[ones(size(x')),x'];
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y',x)          %回归分析
```

运行程序输出结果如下：

```
b =                                 %回归系数
   2.208326501436313
  -0.754692550382667
bint =                              %回归系数置信区间
   2.109367570445702   2.307285432426924
  -0.796263616443524  -0.713121484321811
r =                                 %留数
  -0.038230591488347
   0.051433611251206
   0.023314778334375
   0.043986109586977
  -0.058240695483576
  -0.048619200417559
  -0.076738033334390
   0.118286685062989
  -0.015192663511668
rint =                              % r 的置信区间
  -0.170350292884257   0.093889109907563
  -0.089565327266426   0.192432549768838
  -0.132760984274511   0.179390540943262
  -0.112779028824397   0.200751247998351
  -0.212258150270797   0.095776759303645
  -0.204103844710433   0.106865443875314
  -0.215944565781667   0.062468499112887
   0.021814039680240   0.214759330445737
  -0.151583908034580   0.121198581011244
stats =                        %得到的检测量
   1.0e+03 *
   0.000996215840774 1.842816453903143 0.000000000000972 0.000004636062732
```

得到表 14-4。

表 14-4　检验的结果

R^2	F	P
0.9962	184.2816	0.00000000097

$R^2=0.9962$ 很接近于 1，表明回归方程显著且线性相关。

$F_{1-\alpha}(1,7)=0.0042<F$，则线性回归效果好。

$P=9.7\times10^{-10}$ 趋近于 0，表示回归模型成立，即检验通过，所建立的回归方程显著。即可得出瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度关系为：

$$C=\mathrm{e}^{3.4250a-0.7304}$$

其中，C 表示每一个瓦斯浓度求出的煤尘爆炸下限浓度，a 表示瓦斯浓度（%）。

首先，根据上面拟合的函数，对应于每一个瓦斯浓度 a_{ijk} 可求出每一个煤尘爆炸下限浓度 C_{ijk}。引入实际所测得的煤尘浓度 d_{ijk} 与求出一个煤尘爆炸下限浓度 C_{ijk} 的比值作为煤矿煤尘爆炸的不安全程度的指标，即：

$$f_{ijk}=\frac{d_{ijk}}{C_{ijk}}\quad i=1,2,\cdots 6,\quad j=1,2,\cdots,30,\quad k=1,2,3$$

其中，f_{ijk} 表示第 i 监测点第 j 天第 k 段时间煤尘爆炸的不安全程度指标，d_{ijk} 表示实际所测得的煤尘浓度，C_{ijk} 表示每一个瓦斯浓度求出的煤尘爆炸下限。

由以上表达式可知，煤尘爆炸的不安全程度指标 f_{ijk} 越大，煤矿煤尘爆炸的可能性越大，该煤矿越不安全。

其次，根据各监测点瓦斯浓度下限值和煤尘爆炸下限浓度，引入瓦斯爆炸的不安全程度指标，即各监测点瓦斯浓度下限值 a_{ijk} 和瓦斯爆炸下限浓度 e_i 的比值，则有：

$$g_{ijk}=\frac{a_{ijk}}{e_i}\quad i=1,2,\cdots 6,\quad j=1,2,\cdots,30,\quad k=1,2,3$$

其中，g_{ijk} 表示第 i 监测点第 j 天第 k 段时间瓦斯爆炸的不安全程度指标，a_{ijk} 表示各监测点瓦斯浓度下限值，e_i 表示瓦斯爆炸下限浓度。

由以上表达式可知，瓦斯爆炸的不安全程度指标 g_{ijk} 越大，煤矿瓦斯爆炸的可能性越大，该煤矿越不安全。

再次，为了求解方便，在此基础上通过线性加权化为单目标函数，作为该煤矿的不安全程度的综合指标。

$$F_{ijk}=\lambda f_{ijk}+(1-\lambda)g_{ijk}\quad i=1,2,\cdots 6,\quad j=1,2,\cdots,30,\quad k=1,2,3$$

其中，f_{ijk} 表示第 i 监测点第 j 天第 k 段时间煤尘爆炸的不安全程度指标，g_{ijk} 表示第 i 监测点第 j 天第 k 段时间瓦斯爆炸的不安全程度指标，将煤尘爆炸和瓦斯爆炸作同等重要对待，此时的权重 λ 的值取 0.5。

综上所述，建立的初始数学模型为：

$$f_{ijk}=\frac{d_{ijk}}{C_{ijk}}\quad i=1,2,\cdots 6,\quad j=1,2,\cdots,30,\quad k=1,2,3$$

$$g_{ijk}=\frac{a_{ijk}}{e_i}\quad i=1,2,\cdots 6,\quad j=1,2,\cdots,30,\quad k=1,2,3$$

$$F_{ijk}=\lambda f_{ijk}+(1-\lambda)g_{ijk}\quad i=1,2,\cdots 6,\quad j=1,2,\cdots,30,\quad k=1,2,3$$

然后，利用 MATLAB 软件求出煤矿的不安全程度的综合性指标 F_{ijk} 的最大值，编程如下：

```
clc,clear,close all
format long
datax=0:0.5:4;                              %空气中瓦斯浓度(%)       a
datay=[30 22.5 15 10.5 6.5 4.5 3 2.5 1.5]; %煤尘爆炸下限浓度(g/m3)   d
figure('color',[1 1 1])
scatter(datax,datay,'r*');                  %散点图
hold on
p = polyfit(datax,log(datay),1);            %指数拟合
datay2=exp(p(1)*datax+p(2));                %预测的煤尘爆炸下限浓度    C
plot(datax,datay2,'linewidth',2)
xlabel('空气中瓦斯浓度(%)');  ylabel(' 煤尘爆炸下限浓度(g/m3)');  grid off;
axis tight

figure('color',[1 1 1])
scatter(datay,datax,'r*');
hold on
p1 = polyfit(datay,datax,3);                %立方拟合
datax2=(p1(1)*datay.^3 + p1(2)*datay.^2+p1(3).*datay +p1(4));          %
预测的瓦斯爆炸下限浓度    e
e=datax2;                                   %预测的瓦斯爆炸下限浓度    e
plot(datay,datax2,'linewidth',2)
xlabel('空气中煤尘浓度(%)');  ylabel(' 瓦斯爆炸下限浓度(g/m3)');  grid off;
axis tight

d = [30 22.5 15 10.5 6.5 4.5 3 2.5 1.5];   %煤尘爆炸下限浓度(g/m3)   d
C=exp(p(1)*datax+p(2));                     %预测的煤尘爆炸下限浓度    C
a=0:0.5:4;                                  %空气中瓦斯浓度(%)       a
f = d./C;                                   %煤矿煤尘爆炸的不安全程度的指标
g = a./e;                                   %瓦斯爆炸的不安全程度指标
lamda = 0.5;
Fz = lamda*f+(1-lamda)*g;                   %煤矿的不安全程度的综合性指标
max_Fz = max(Fz)
```

经 MATLAB 软件编程计算，可得煤矿的不安全程度的综合性指标 F_{ijk} 的最大值。结果如表 14-5 所示。

表 14-5　煤矿的不安全程度的综合性指标 F_{ijk} 的最大值

	工作面 I 早班	工作面 I 中班	工作面 I 晚班	工作面 II 早班	工作面 II 中班	工作面 II 晚班
最大值	0.30096	0.29172	0.29157	0.36169	0.39144	0.35658
	掘进工作面早班	掘进工作面中班	掘进工作面晚班	回风巷 I 早班	回风巷 I 中班	回风巷 I 晚班
最大值	0.18537	0.17933	0.18227	0.30262	0.29661	0.30232
	回风巷 II 早班	回风巷 II 中班	回风巷 II 晚班	总回风巷早班	总回风巷中班	总回风巷晚班
最大值	0.36606	0.39774	0.35946	0.26071	0.26457	0.25813

六个工作面早中晚班不安全程度的综合性指标 F_{ijk} 的最大值如表 14-5 所示。因此，该煤矿的不安全综合指标函数的最大值出现在回风巷 II 中班第 14 天，最大值为 0.3977，而且这个值是相当小的，可以认为该煤矿在这三十天是比较安全的。

14.8　问　题　三

为了保障安全生产，利用两个可控风门调节各采煤工作面的风量，通过一个局部通风机和风筒实现掘进巷的通风。根据各井巷风量的分流情况、对各井巷中风速的要求以及瓦斯和煤尘等因素的影响，确定该煤矿所需要的最佳通风量，以及两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量。

由问题一知，绝对瓦斯涌出量 $Q_{ijk}=60\cdot V_{ijk}\cdot S_i\cdot a_{ijk}$，对于同一个煤矿 Q_{ijk} 是不可控的，而对于工作面 I 、工作面 II 和掘进工作面这三个监测点都是瓦斯产生的源头，可以认为这三个监测点瓦斯的绝对涌出量在第 j 天第 k 段时间是定值，即 Q_{ijk} 不变；而对于回风巷 I 、回风巷 II 和总回风巷，假定这三个监测点的瓦斯的绝对涌出量也为定值，记 Q_{1ik} 为第 i 个监测点第 k 段时间的绝对瓦斯涌出量的最大值。

记三个决策变量为 V_{1k}、V_{2k} 和 V_{3k} 分别为工作面 I 、工作面 II 和掘进工作面第 k 段时间的风速；记 V_{4k}、V_{5k}、V_{6k} 分别为回风巷 I 、回风巷 II 、总回风巷第 k 段时间的风速。

以最大值计算，则有：

$$Q_{1ik}=\max\left\{Q_{ijk}\right\}$$

其中，$i=1,2,\cdots 6$，$j=1,2,\cdots,30$，$k=1,2,3$。

则第 i 个监测点第 k 段时间的瓦斯浓度 a_{ik} 为：

$$a_{ik}=\frac{Q_{1ik}}{60\cdot V_{ik}\cdot S_i}$$

根据拟合的函数可以求出第 i 个监测点第 k 段时间的瓦斯浓度 a_{ik} 对应的煤矿爆炸下限浓度 C_{ik}。

从而可得两个评价煤矿不安全程度的危险指标：

$$f_{ik}=\frac{d_{ik}}{C_{ik}}\qquad i=1,2,\cdots 6,\quad k=1,2,3$$

$$g_{ik}=\frac{a_{ik}}{e_i}\qquad i=1,2,\cdots 6,\quad k=1,2,3$$

将以上两个指标加权后，可以得到一个综合性指标：

$$F_{ik}=\lambda f_{ik}+(1-\lambda)g_{ik}\qquad i=1,2,\cdots 6,\quad k=1,2,3,\quad \lambda=0.5$$

为了求出煤尘浓度 d_{ik}，我们先定义一个新变量 W_{ijk}，W_{ijk} 表示第 i 监测点第 j 天第 k 段时间的煤尘绝对涌出量（单位：g/s），则有：

$$W_{ijk}=d_{ijk}\cdot S_i\cdot V_{ijk}\qquad i=1,2,\cdots 6,\quad j=1,2,\cdots,30,\quad k=1,2,3$$

对于同一煤矿煤尘绝对量 W_{ijk} 对工作面 I 、工作面 II 和掘进工作面这三个监测点都是煤尘产生的源头，可以认为这三个监测点煤尘的绝对涌出量在第 j 天第 k 段时间是定值，

即 W_{ijk} 不变；而对于回风巷Ⅰ、回风巷Ⅱ和总回风巷，假定这三个监测点的煤尘的绝对涌出量也为定值。同样假设 W_{1ik} 为第 i 监测点第 k 段时间的煤尘绝对涌出量的最大值。

先以最大值进行计算，则有：

$$W_{1ik}=\max\{W_{ijk}\}，\quad i=1,2,\cdots 6，\quad j=1,2,\cdots,30，\quad k=1,2,3$$

则第 i 监测点第 k 段时间的煤尘浓度为 d_{ik} 为：

$$d_{ik}=\frac{W_{1ik}}{S_i\cdot V_{ik}}\qquad i=1,2,\cdots 6,k=1,2,3$$

因此可得评价煤尘爆炸不安全程度的指标为：

$$f_{ik}=\frac{d_{ik}}{C_{ik}}\qquad i=1,2,\cdots 6,k=1,2,3$$

由《煤矿安全规程》给出对风速的要求，易确定对工作面Ⅰ、工作面Ⅱ、掘进工作面、回风巷Ⅰ、回风巷Ⅱ和总回风巷的早中晚风速建立约束，则有：

$$V_{1k},V_{2k},V_{3k}\in[0.25,4]\qquad k=1,2,3$$

$$V_{3k},V_{4k}\in[0.25,6]\qquad k=1,2,3$$

$$V_{6k}<8\quad k=1,2,3$$

其中，V_{1k}、V_{2k} 和 V_{3k} 分别为工作面Ⅰ、工作面Ⅱ和掘进工作面第 k 段时间的风速。记 V_{4k}、V_{5k} 和 V_{6k} 分别为回风巷Ⅰ、回风巷Ⅱ和总回风巷第 k 段时间的风速。

掘进巷需要安装局部通风机，其额定风量一般为 $150\sim400\,\mathrm{m^3/min}$，则有：

$$150\leqslant V_{7k}\cdot S_7\leqslant 400\qquad k=1,2,3$$

其中，V_{7k} 表示局部通风机风筒中的风速（单位：$\mathrm{m/s}$）。

设局部通风机风筒的风速为 V_{7k}，则有：

$$\frac{V_{7k}\cdot S_7}{V_{3k}\cdot S_3}\geqslant 15\%，\text{其中，}\mathrm{S}_7=0.2^2\times\pi$$

对于煤矿而言，要求煤矿不安全程度的综合指标越小越好，则有：

$$\min\ F_{ik}=\lambda f_{ik}+(1-\lambda)g_{ik}\qquad i=1,2,\cdots 6,k=1,2,3$$

因此，建立初始模型为：

$$\min\ F_{ik}=\lambda f_{ik}+(1-\lambda)g_{ik}\qquad i=1,2,\cdots 6,k=1,2,3$$

$$s.t.\begin{cases}5\times V_{6k}=4\times(V_{3k}+V_{4k}+V_{5k})\quad k=1,2,3\\150\leqslant V_{7k}\cdot S_7\leqslant 400\\\dfrac{V_{7k}\cdot S_7}{V_{3k}\cdot S_3}\geqslant 15\%，\text{其中，}S_7=0.2^2\times\pi\\V_{1k},V_{2k},V_{3k}\in[0.25,4]\quad k=1,2,3\\V_{3k},V_{4k}\in[0.25,6]\quad k=1,2,3\\V_{6k}<8\quad k=1,2,3\end{cases}$$

利用 MATLAB 软件对所建模型求解，求出在约束条件下，最佳的风速 V_{1k}、V_{2k}、V_{3k}、V_{4k}、V_{5k}、V_{6k} 和 V_{7k}，编程如下：

```
function ysw14_4
    clear;clc;
    v=xlsread('data','风速','A5:R34 ');          %风速
```

```
    w=xlsread('data','瓦斯','A5:R34 ');          %瓦斯
    m=xlsread('data','煤尘','A5:R34 ');          %煤尘
    w=w';m=m';v=v';
    x0=2*ones(1,18);                             %初始值
    lb=[0.25*ones(1,15),0*ones(1,3)];            %下界
    ub=[4*ones(1,9),6*ones(1,6),8*ones(1,3)];    %上界
    options=optimset('largescale','off');
    i=1;                        %分别令 i 等于 1...18，求出 18 个监测点的风速

[V,feval,flag]=fmincon(@meichenfun,x0(i),[],[],[],[],lb(i),ub(i),@meich
encon,options,i,v,w,m);
    V,feval,flag
end

function f3=meichenfun(V,i,v,w,m)
    s=4;
    e=[3.425 -0.7304];                       %拟合得到的值
    W(i,:)=v(i,:)*s.*m(i,:);                 %煤尘绝对涌出量
    [w1(i),n1(i)]=max(W(i,:));
    w2(i)=mean(W(i,:));
    [w3(i),n2(i)]=min(W(i,:));
    q(i,:)=v(i,:)*s.*w(i,:)*0.01*60;         %瓦斯绝对涌出量
    [q1(i),m1(i)]=max(q(i,:));
    q2(i)=mean(q(i,:));
    [q3(i),m2(i)]=min(q(i,:));
    a(i)=q1(i)*100/60/V/s;                   %最大值下的瓦斯浓度
    c(i)=exp(e(1).*a(i)+e(2));               %对应的煤尘爆炸下限浓度
    d(i)=w1(i)/s/V;                          %最大值下的煤尘浓度
    f(i)=d(i)/c(i);                          %煤尘危险指标
    g(i)=a(i)/5;                             %瓦斯危险指标
    f3=(0.5*f(i)+0.5*g(i));                  %综合危险指标
end

function [k,ceq]=meichencon(V,i,v,m,w)
    ceq=[];
    k=[];
end
```

对于工作面 I 的求解，程序结果如下：

```
V =
    0.9287
feval =
    0.2251
flag =
     1
```

求得工作面 I 、工作面 II 、掘进工作面、回风巷 I 、回风巷 II 、总回风巷和局部通风机风筒的风速如表 14-6 所示。

表 14-6　六个监测点的风速

	工作面 I 早班	工作面 I 中班	工作面 I 晚班	工作面 II 早班	工作面 II 中班	工作面 II 晚班
V 风速	0.9287	0.8808	0.9055	1.1806	1.3378	1.2097
不安全程度	0.2251	0.2277	0.2253	0.2112	0.2077	0.2102

续表

	掘进工作面早班	掘进工作面中班	掘进工作面晚班	回风巷Ⅰ早班	回风巷Ⅰ中班	回风巷Ⅰ晚班
V 风速	0.3356	0.3204	0.3174	0.9108	0.8698	0.9038
不安全程度	0.2502	0.2528	0.2530	0.2205	0.2241	0.2213
	回风巷Ⅱ早班	回风巷Ⅱ中班	回风巷Ⅱ晚班	总回风巷早班	总回风巷中班	总回风巷晚班
V 风速	1.2917	1.4654	1.3325	1.9328	1.9212	1.9576
不安全程度	0.2075	0.2036	0.2061	0.2219	0.2221	0.2215

通过表 14-6 所求出的各个监测点的风速，从而很容易求出，各个监测点所需要的风量，如下所示。

两个采煤工作面风量为：

$$\begin{cases} y_{1k} = V_{1k} \cdot s_1 \\ y_{2k} = V_{2k} \cdot s_2 \end{cases} \quad 其中， k = 1,2,3$$

局部通风机的额定通风量为：

$$y_{7k} = V_{7k} \cdot S_7$$

经过计算，可以计算出该煤矿所需要的最佳通风量，以及两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量。两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量计算程序如下：

```
clear;clc;
V=[0.9287 0.8808 0.9055 1.1806 1.3378 1.2097 19.8944 19.8944 19.8944];
s=[4 pi*0.2^2];
for i=1:6
    fengliang(i)=V(i)*s(1);
end
for i=7:9
    fengliang(i)=V(i)*s(2);
end
fengliang*60
```

整理结果如表 14-7 所示。

表 14-7　两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量（单位是m³/min）

工作面Ⅰ早班	工作面Ⅰ中班	工作面Ⅰ晚班	工作面Ⅱ早班	工作面Ⅱ中班	工作面Ⅱ晚班	风筒早班	风筒中班	风筒晚班
222.89	211.39	217.32	283.34	321.07	290.33	150	150	150

由数据可知：风筒中一天的风速是不变的。

14.9　模型的验证

将总回风巷里的风速 V_{6jk} 与掘进工作面风速 V_{3jk}，回风巷Ⅰ风速 V_{4jk}、回风巷Ⅱ风速

V_{5jk} 数据作线性拟合，则有：

$$V_{6k} = \beta_{0k} + \beta_{1k} \cdot V_{3k} + \beta_{2k} \cdot V_{4k} + \beta_{3k} \cdot V_{5k} \quad k = 1,2,3$$

当 $k=1$，早班拟合的结果：

$$V_{60} = -0.0728 + 0.7860 \cdot V_{30} + 0.7355 \cdot V_{40} + 0.9213 \cdot V_{50}$$

拟合相关系数 $R^2 = 0.9908$，$F = 935.6695$，即回归效果显著。

当 $k=2$，中班拟合的结果：

$$V_{60} = -0.0102 + 0.8142 \cdot V_{30} + 0.8153 \cdot V_{40} + 0.7862 \cdot V_{50}$$

拟合相关系数 $R^2 = 1$，$F = 1301.9$，即回归效果显著。

当 $k=3$，晚班拟合的结果：

$$V_{60} = -0.1990 + 0.8243 \cdot V_{30} + 0.8361 \cdot V_{40} + 0.8430 \cdot V_{50}$$

拟合相关系数 $R^2 = 1$，$F = 1094.1$，即回归效果显著。

从以上拟合也可以看出 $5 \times V_6 = 4 \times (V_3 + V_4 + V_5)$ 基本符合。

验证 $Y = 5 \times V_6 - 4 \times (V_3 + V_4 + V_5)$，对 Y 求标准差得 $std(Y) = 0.0470$，由此可知，所求的标准差很小，即漏风影响可以忽略不计。

根据先前的假定，回风巷Ⅰ、回风巷Ⅱ和总回风巷的绝对瓦斯涌出量 Q_{ijk} 和绝对煤尘涌出量 W_{ijk} 为定值，由表 14-7 所示模型求解掘进巷、回风巷Ⅰ、回风巷Ⅱ和总回风巷的早、中、晚班风速见表 14-8。

表 14-8　四个监测点的三班次的风速

	掘进巷	回风巷Ⅰ	回风巷Ⅱ	总回风巷
早班	0.3356	0.9108	1.2917	1.9328
中班	0.3204	0.8698	1.4654	1.9212
晚班	0.3174	0.9034	1.3325	1.9576

分别代入上式，则有：

$$Y_k = 5 \times V_{6k} - 4 \times (V_{3k} + V_{4k} + V_{5k}) \quad k = 1,2,3$$

分别利用 MATLAB 软件求出对于早班、中班、晚班的标准差，则有：

早班：标准差为-0.4884；

中班：标准差为-0.0164；

晚班：标准差为-0.4268。

故可以认为相差不是很大，即假设回风巷Ⅰ、回风巷Ⅱ和总回风巷的绝对瓦斯涌出量 Q_{ijk} 和绝对煤尘涌出量 W_{ijk} 为定值是合理的。

14.10　模型的评价与推广

（1）本模型采用 MATLAB 软件进行求解，计算出来的值的精确度和稳定性都较高；

（2）模型的验证计算了漏风对最后结果的影响，经计算，得出在假设中漏风对结果的影响确实很小；

（3）问题二中引入的两个指标及加权对评价煤矿不安全程度都很客观合理；

（4）问题三很好地解决了煤矿所需要的最佳通风量，以及两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量；

（5）对函数的拟合进行了检验。

本模型具有较强的规律性，同时还具有很强的适用性，并且能够推广到其他的问题上，比如像地下采矿等地下作业的情况，模型的稳定性很高，还成功地解决了煤矿瓦斯和煤尘的监测和控制问题，很好地解决了煤矿所需要的最佳通风量，以及两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量，得到了较为精确且合理的结果。

因此，此模型具有很强的推广意义。

第 15 章　住房的合理定价

二十一世纪，房价问题一直备受关注，受多方面因素影响，房价一直处于持续的上升阶段，导致很多收入低的人群，无法购房，然而有钱的人，则购买好几套房子，因此合理的房价模型显得尤为重要，能够综合的评定该阶段房价的合理值，从而更加好的稳固经济发展。本章主要研究该地区人均 GDP 与房价的关系，然后建立该地区历年的平均房价预测模型，对该地区房价有一定的建议作用。

学习目标：

（1）学习和掌握房价模型问题等；

（2）掌握 MATLAB 拟合和多元回归方法的使用。

15.1　问 题 提 出

民以食为天，民以安居为乐。目前国内的房地产业面临前所未有的困境，原因在于房价太高，而需房者收入太低。2010 年 3 月 5 日，温家宝总理在第十一届人大三次会上作的政府工作报告上讲,在 2010 年要“促进房地产市场平稳健康发展。要坚决遏制部分城市房价过快上涨势头，满足人民群众的基本住房需求”。所以如何使得百姓买得起房，房地产商有钱可赚，国家的支柱性产业得以健康地发展是放在我们面前的一大难题。

表 15-1 所示为某地区各年的平均房价、人均 GDP 和职工平均年收入等数据。

表 15-1　某地区各年的平均房价、人均GDP和职工平均年收入等数据

时间：年	平均房价：元/平米	人均 GDP：元	平均年收入：元
1997	767	3540	5156
1998	895	3783	5138
1999	995	3916	6526
2000	1117	4239	7434
2001	1261	4922	8475
2002	1437	5560	9688
2003	1640	6399	10703
2004	1957	7842	11384
2005	2244	9116	12343
2006	2489	10879	13630
2007	2801	13475	15558
2008	3096	16737	18472
2009	3500	18745	19820

请根据以上数据完成下列三个问题：

（1）根据该地区历年的平均房价建立模型预测 2010 年的平均房价。

（2）研究该地区人均 GDP 与房价的关系。

（3）试建立 2010 年该地区的合理房价模型，使得百姓、房地产商和政府都比较满意（如果你的模型需要，你可以在网上查阅并使用有关的数据）。

15.2 摘　　要

本章开始根据历年住房的平均价格建立了房价与时间的函数关系，由此预测了 2010 年的房价。之后根据各组数据分别建立了两个模型并讨论了房价与 GDP 的关系。最后根据题目的要求，在基本假设及多个条件的约束下建立了 2010 房价的最优化模型。

问题一中，我们先依据直观的散点图确定了要使用的函数，并根据最小二乘法的思想使用 MATLAB 中的统计工具箱拟合出了房价关于时间的函数。然后计算了函数与现实房价的误差，并对误差进行了矩估计和区间估计，得出了它的 Gauss 分布函数。最后预测了 2010 年的房价可能的区间。

问题二中，由于 GDP 和房价之间的关系不易确定，即我们无法直接断定究竟 GDP 是房价的函数还是房价是 GDP 的函数。因此我们对应两种假设分别建立了两个模型，同样利用统计工具箱进行多变量非线性拟合，并得出各自的函数关系，最后以误差的大小决定模型的优劣。

问题三中，考虑到人的收入是不一样的，相对富有的人群可能会购买多于一套的住房，而经济条件差的人群可能一套也购买不起。基于这个原因，我们将所谓的“平均房价”分为了两部分，一部分是购买第一套住房的价格；另一部分是购买多于一套住房的价格，这样就建立起了一个相对“不平等”的房价模型。这样做的好处是，它既可以基本维持总体平均房价（即保障了国家的税收和房地产商的收入），又减轻了中低收入人群购房的压力。最后我们得到了一个非线性最优化模型，使用 LINGO 软件很容易求解。

本章最大的特色是：对关系不明确的量分别建立模型并以误差为依据判断优劣；对不同收入的人群建立不同的房价模型。

关键词：多变量拟合、“不平等”房价模型。

15.3 基 本 假 设

（1）2010 年我国处于和平稳定状态，并且没有发生大的自然灾害。

（2）百姓的收入能够买得起房，房地产商有利可图，是各自“满意”的条件。

（3）根据经济学上的“二八定律”，我们假设有 20%的人（富人）会买第二套房。

（4）假设对富人来说，住房需求的价格弹性比较小，即房价上涨对富人的消费计划影响应该小于普通人。

（5）为了方便讨论，设该地区近似为封闭的，即本地人都在本地买房，外地人不到本地买房，本地人也不到外地买房。

15.4　符号说明

符　　号	意　　义	单　　位	备　　注
y	时间（以 1997 年为第 0 年）	年	在问题 1、2 中使用
p	平均房价	元/平方米	全局使用
g	人均 GDP	元	问题 1、2 中使用
$\hat{p}$	平均房价的估计值	元/平方米	问题 1、2 中使用
$\hat{g}$	人均 GDP 的估计值	元	在问题 2 中使用
E_d	房屋需求的价格弹性	/	在问题 3 中使用
k	购买第二套住房增加的价格比例	/	无常量，取 0.4
k_1	增加的价格比例 k 中付给房地产商的部分	/	无量纲
p_1	购买第一套房的房价	元/平方米	在问题三中使用
p_2	购买多于一套房的房价	元/平方米	
Q_1	2009 年房屋的总销售量	平方米	
Q_2	2010 年房屋的总销售量	平方米	

15.5　问题分析

问题一的要求是根据现有的数据预测 2010 年的平均房价，而要预测房价，可以理解为找到时间和房价之间的内在联系，即找到二者之间的函数关系。可以立即想到的办法是，先将这几年的房价按照时间顺序做出散点图，以给我们一个直观的印象。而后，可以根据这个直观的印象确定所要使用的预测函数，并用这个函数去“适合”这些数据点，最后，在决定了函数（即模型）之后，还需要讨论模型的误差。

问题二的要求相对比较模糊，如果说在问题一中显然房价是时间的函数的话，那么问题二中我们很难决定到底 GDP 是房价的函数亦或者房价是 GDP 的函数。所以我们基本的思路是，分别建立两个模型并且求解，最后以误差的大小来决定取舍。

对问题三，由于房地产开发商和老百姓处于利益的对立面，一部分的人有能力购买多套住房，而广大的老百姓一套也买不起，所以基本的思路是这样：国家应该出面对购买多于一套住房的人加收一定的房产税，而这些税收的一部分则用于补贴那些购买第一套住房的人。

15.6　问题一

15.6.1　问题一的分析

由“问题分析”中讨论的我们知道，要预测 2010 年该地区的房价，首先必须找到一

个年份与房价之间的函数表达式，使其能够比较好的适合这些数据点并且达到误差最小。要实现这一点，我们首先要确定使用怎样的一个函数。

为了找到这样的一个函数，我们先从最简单的函数做起，即线性函数或者二次函数。利用 MATLAB 的数据拟合功能，分别可以对数据进行线性和二次拟合，在这里我们只是想直观的看一看，用线性或者二次函数能不能较好的适合这些数据。

```
%% Y 是年份，以 2007 年为第 0 年，P 为房价
Y=0:2009-1997;
P=[767 895 995 1117 1261 1437 1640 1957 2244 2489 2801 3096 3500];
fPY1=polyfit(Y,P,1);   %%线性拟合
fPY2=polyfit(Y,P,2);   %%二次拟合
t=0:0.1:2009-1997;
PY1=zeros(size(t));    % 初始化
PY2=zeros(size(t));    % 初始化
PY1=polyval(fPY1,t);   % 多项式
PY2=polyval(fPY2,t);   % 多项式
plot(Y,P,'*',t,PY1,'--',t,PY2);
legend('原始数据','一维拟合','二维拟合')
```

拟合出的图形如图 15-1 所示。

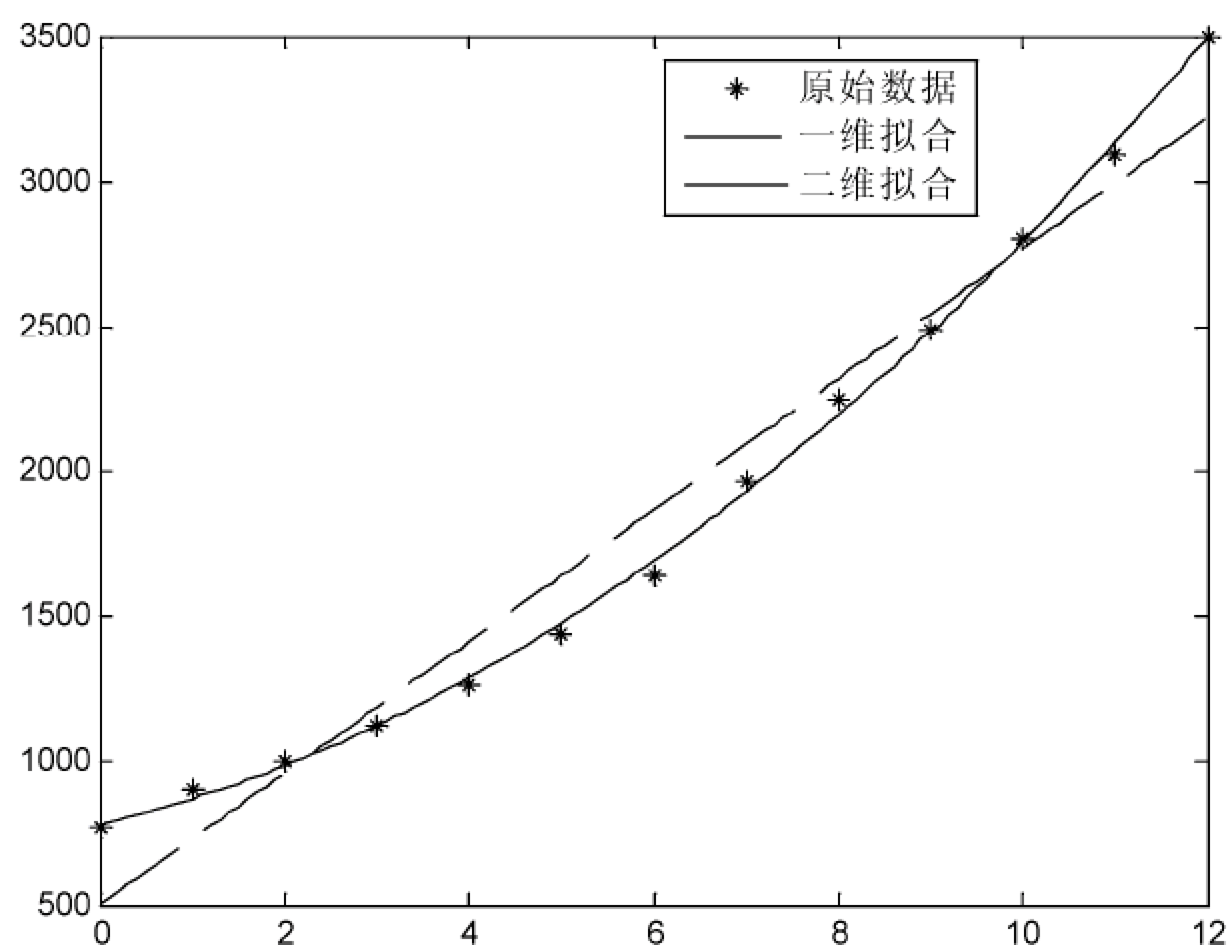


图 15-1　拟合图

从图 15-1 所示中可以直观的看出，房价和时间（年份）的关系更加接近于一个二次函数，这暗示了我们应该为此建立一个二次函数的回归模型。

15.6.2　问题一模型的建立

由上所述，我们所要建立的是一个二次函数的回归模型，使得该函数能够“最好的”表现房价与年份的关系。而什么叫做“最好的”呢？精确的来说，就是要让函数上的值与实际的值之间的差别最小。

在建立数学模型之前，首先再次明确一下变量：p 是指房屋的价格，y 是指时间（年份），而 $\hat{p}$ 是由函数 $\hat{p}(y)$ 所确定的房屋价格 p 的估计值。

由已经讨论的内容可知，要建立的是一个回归模型，并且是使用二次函数去表现房价

和时间（年份）的关系。

即设：

$$\hat{p}(y)=a_0+a_1y+a_2y^2$$

并且找到合适的参数 a_0，a_1，a_2 使得 $D=\sum_{i=0}^{12}[p_i-\hat{p}_i(y)]^2$ 达到最小值。

15.6.3　问题一模型的求解

这个问题相当于是要求我们找到三个参数来使得 $\sum_{i=0}^{12}[p_i-\hat{p}_i(y)]^2$ 达到最小，又由于 $\hat{p}(y)=a_0+a_1y+a_2y^2$，其中 p_i 和 y 为已知。具体求解的步骤如下。

Step1：显然该函数的变量有三个，即 a_0、a_1 和 a_2，要求得函数的最小值，分别对这三个变量求偏导数，并令其等于 0，即：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial D}{\partial a_0}=0\\ \dfrac{\partial D}{\partial a_1}=0\\ \dfrac{\partial D}{\partial a_2}=0\end{cases}$$

采用 MATLAB 来求解这个方程组，得到的结果是：

```
%% Y 是年份，以 2007 年为第 0 年，P 为房价
clc,clear,close all
P=0:2009-1997;
Y=[767 895 995 1117 1261 1437 1640 1957 2244 2489 2801 3096 3500];
P1=zeros(length(P),3);
%%由于使用二维拟合，故 P1 应该为 3*13 的矩阵，第一列为 1，第二列为 Y，第三列为 Y 的平方
P1(:,1)=1;
P1(:,2)=P';                             % 转置
P1(:,3)=(P.^2)';                        % 元素平方
[b,bint,r,rint,stats]=regress(Y',P1)    % 回归
plot(P,Y,'bo')
hold on
P2 = b(3,1)*P.^2+b(2,1)*P+b(1,1);       % 回归
plot(P,P2,'r*')
a=polyfit(P,Y,2)
P3 = a(1,1)*P.^2+a(1,2)*P+a(1,3);       % 回归
plot(P,P3,'rs')
```

运行程序得到结果，整理如下：

$$\begin{cases}a_0=779.2418\\ a_1=75.4540\\ a_2=12.5899\end{cases}$$

拟合结果图如图 15-2 所示。

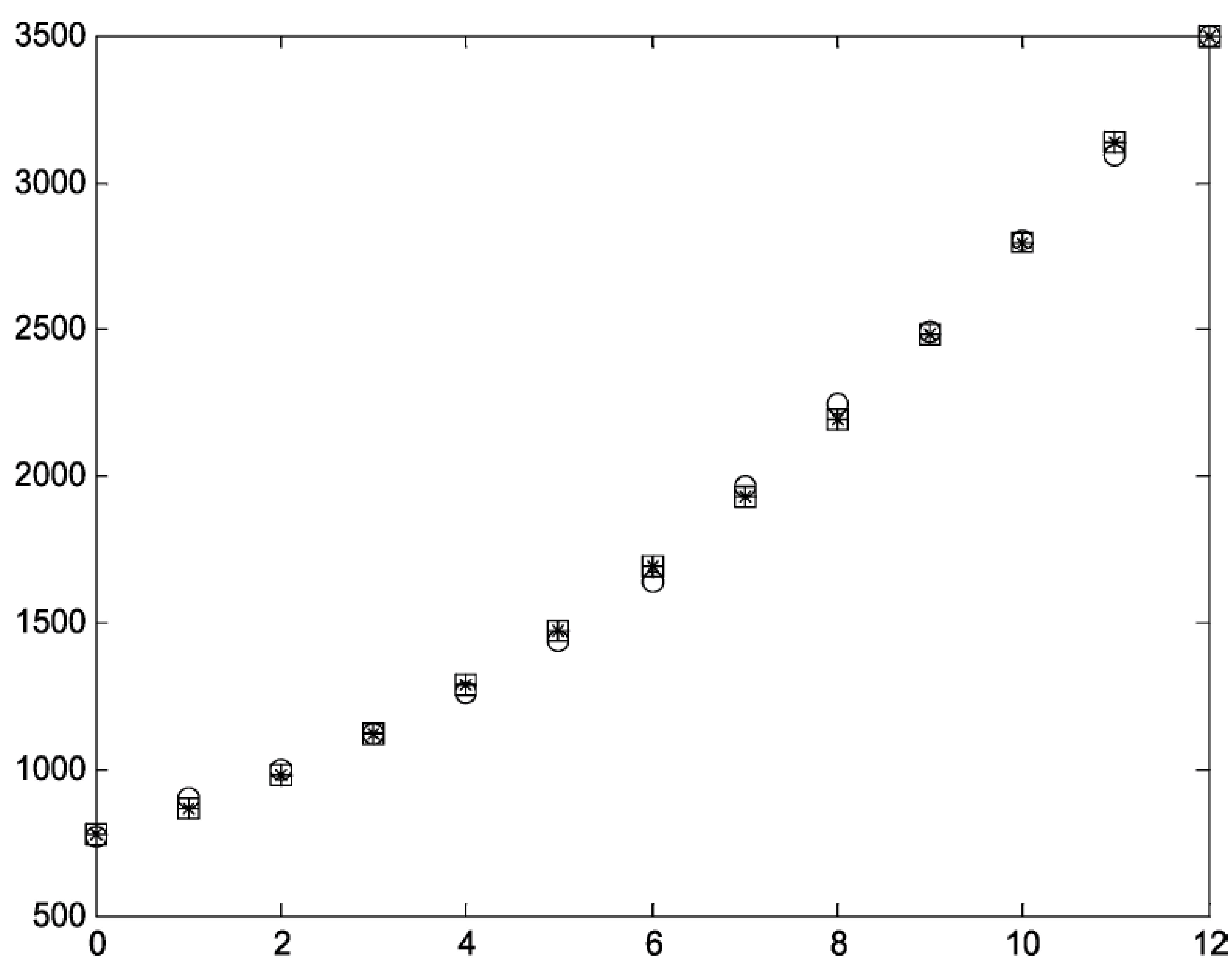


图 15-2　多元回归拟合图

Step2：只是求出了这三个参数还不够，自然的想法就是再分析一下在 1-α=0.95 的置信水平下，参数 a_0、a_1 和 a_2 的置信区间是多少，而这个问题要是用手工求解，难度更大，所以不妨利用 MATLAB 提供的统计工具箱，计算出如下的数据：

参数	参数的估计值	参数的置信区间
a_0	779.2418	[727.4112 ,831.0723]
a_1	75.4540	[55.3866 ,95.5215]
a_2	12.5899	[10.9781 ,14.2018]

用这种方法不仅可以求出各个参数的值，还可以找到它们的置信区间。

Step3：用前面求得的参数估计 2010 年的房价。由以上的参数，可以得到房屋价格的预测函数 $\hat{p}(y)=a_0+a_1y+a_2y^2$ 为 $\hat{p}(y)=779.2418+75.4540y+12.5899y^2$，将 y=2010-2007=13 代入此方程，可以得到 $\hat{p}(13)=3887(元)$ 。

15.6.4　问题一结果的分析及验证

为了分析该结果的合理性和准确性，请考虑这样的问题，如果说房价与年份之间有这么一个不为人知的但是“确定性”的函数关系 $p=p(y)$，而所做出的函数 $p=\hat{p}(y)$ 和它之间肯定是有一定误差的，不妨将此误差设为 ε，则我们可以得到一个关系：

$$p(y)=\hat{p}(y)+\varepsilon$$

而如果 ε 满足某个分布，则我们可以估计 2010 年房价的一个合适的范围，而不是一个“光秃秃”的值。所以我们先把 ε 的值列在表 15-2 中。

表 15-2　ε 值

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ε	-12	28	14	-2	-21	-34	-45	32	55	11	8	-37	2

假设 ε 服从正态分布，即 $\varepsilon \sim N(\mu,\sigma^2)$，不妨使用矩估计的方法来确定参数 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}^2$ 的值，于是得到方程组：

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{12}\varepsilon_i \\ \hat{\mu} + \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{12}\varepsilon_i^2 \end{cases}$$

据此不难解得 $\hat{\mu} \approx 0$， $\hat{\sigma}=102$，故 $\varepsilon \sim N(0,102^2)$。

绘出 ε 的概率分布如下：

```
clc,clear,close all
x=-300:1:300;                                % x 取值范围
y=zeros(length(x));
y=39/10000.*exp(-1/(2*102^2)*x.^2);          % 方程
plot(x,y)                                    % 画图
ylabel('概率')
title('房价误差的正态分布图')
```

运行程序输出图形如图 15-3 所示。

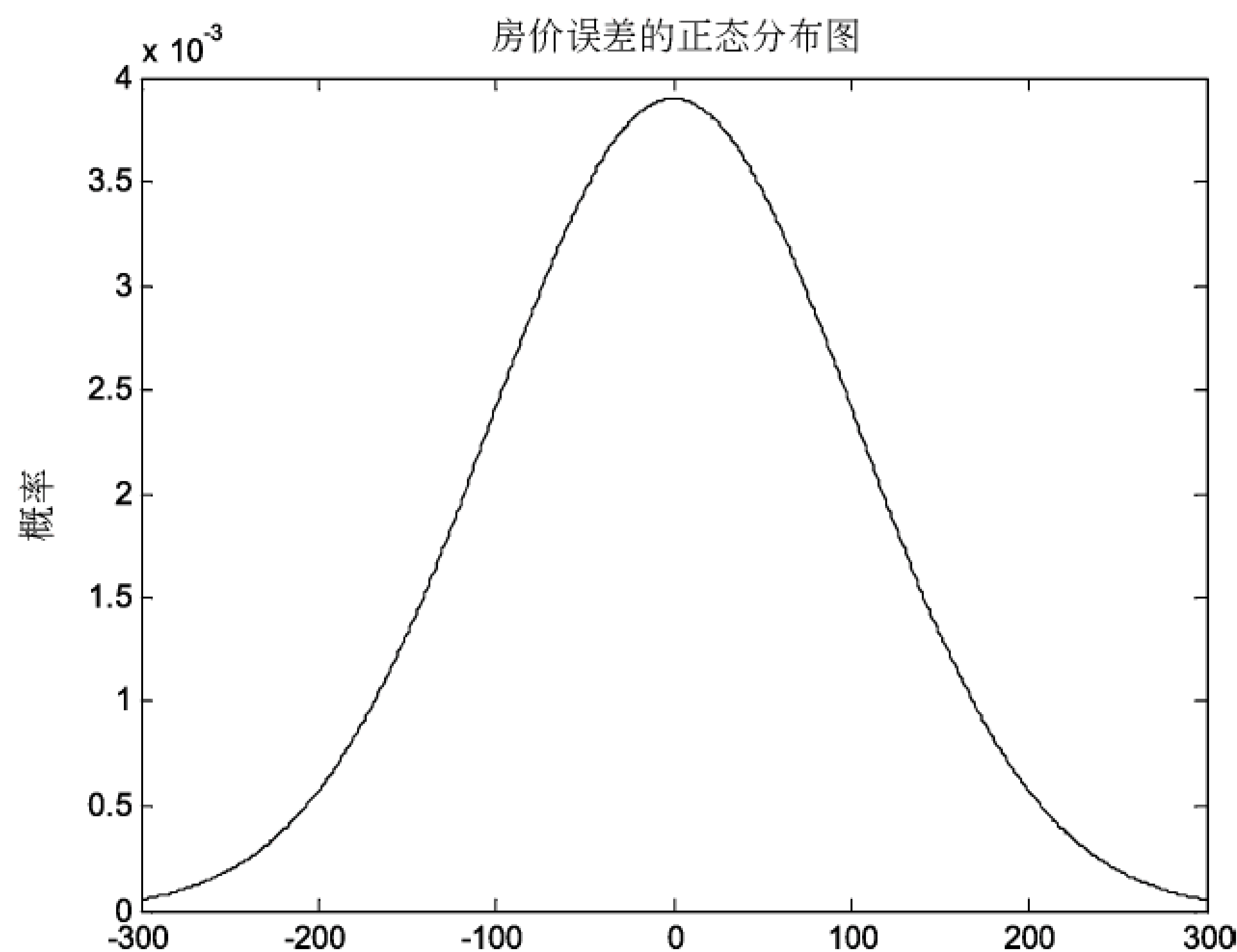


图 15-3　正态分布

对此我们感兴趣的是，找到一个 ε 的阀值 ε'，使得当 $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon'$ 时，$P(|\varepsilon| \leqslant \varepsilon') \geqslant 0.7$，这样做的目的是，我们希望得到一个房价的区间，使 2010 年真实房价落在这个区间内的概率比较大 （这里“比较大”就是取的 0.7）。

由概率论可以知道，由于正态分布的曲线是对称的，$P(\varepsilon \geqslant \varepsilon') = \dfrac{1}{2}[1 - P(|\varepsilon| \leqslant \varepsilon')] = 0.15$ 即 $P(\varepsilon \leqslant \varepsilon') = 1 - P(\varepsilon \geqslant \varepsilon') = 0.85$，而 $P(\varepsilon \leqslant \varepsilon') = \Phi(\dfrac{\varepsilon' - 0}{102})$，查表得出 $\Phi(1.04) = 0.85$，所以我们得到的 ε 的阀值 ε' 约为 100 元。

综上所述，我们用最小二乘法得出了 $\hat{p}(y)$ 的表达式，并用此预测了 2010 年的房价，同时分析了 $\hat{p}(y)$ 与 $p(y)$ 的误差 ε，并得出结论：在 70%的精确度下，2010 年的房价应该在 3887 ± 100 元以内。

15.7 问　题　二

15.7.1　问题二的分析

为了搞清楚房价和 GDP 的关系，让我们先来了解一下什么是 GDP。据《西方经济学》上的定义，GDP 即在一年内，国家或地区生产（或者说是消费）的各种最终产品和劳务按当年市场价格计算的价值总和。即如果用 $Q_1,Q_2,Q_3,\cdots,Q_n$ 表示消费的各种产品的数量，而用 $P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n$ 表示它们当年的价格的话，则 GDP 可以表示为 $\sum_{i=1}^{n} P_iQ_i$ 。

换句话说，人均 GDP 可以理解为一年中人均的消费量，或者通俗地说就是平均一个人在这年里花了多少钱。

要研究房价和 GDP 的关系与研究房价和年份的关系有点不同，在问题一中，很显然的我们知道房价是随着年份在变化的，即可以不用怀疑将房价看成了时间的函数。但是在本问之中，房价和 GDP 的关系变得微妙了起来。从经济学家对 GDP 的定义可以看出房价会影响 GDP，而 GDP 也会影响房价。也即它们是相互影响的，如果这样去考虑问题并且建立模型将会把我们引入一个类似“先有鸡还是先有蛋”的死循环。

所以我们不妨先将 GDP 看成房价的函数，再把房价看成 GDP 的函数，从而比较哪种假设更加合理。这里需要特别注意的是，无论是建立 $p(g)$的模型还是 $g(p)$的模型，都不能忽略时间（即年份）的影响，所以我们接下来要建立两个模型，如下所示。

模型 1：

$$g = \hat{g}(p, y)$$

模型 2：

$$p = \hat{p}(g, y)$$

15.7.2　问题二模型的建立

1．模型一

按照我们以上的讨论，姑且先主观的将 GDP 看成是 p 的函数，即我们由西方经济学可知：

$$g = \sum_{i=1}^{n} P_iQ_i$$

我们将其分解为用于购买房屋造成的 GDP 以及用于其他消费造成的 GDP，即：

$$\hat{g}(p) = \hat{g}'(p) + c$$

其中，c 代表其他消费所造成的 GDP。而 $\hat{g}'(p)$ 代表真正由房价造成的 GDP。请特别注意这一点，就像我们刚才讨论的那样。GDP 不仅仅与房价有关系，它还与许多因素相关，我们把这些因素汇总在一起，将其看成时间（年份）的函数，就像问题一中我们把房价看成时间（年份）的函数是一个道理，故有：

$$c=c(y)$$

好了，现在有一个问题，就是我们应该用怎样的两个函数呢？为了说明这一点，让我们来看一看 GDP 分别对时间（年份）和对房价的散点图：

```
clc,clear,close all
Y=0:12;
GDP=[3540 3783 3916 4239 4922 5560 6399 7842 9116 10879 13475 16737 18745];
P=[767 895 995 1117 1261 1437 1640 1957 2244 2489 2801 3096 3500];
subplot(121),plot(Y,GDP,'bo')  % 画图
xlabel('时间')
ylabel('GDP')                  % y 轴标记
title('GDP 对时间（年）的散点图')  % 标题
subplot(122),plot(P,GDP,'bo')
xlabel('房价（元）')             %x 轴标记
ylabel('GDP')
title('GDP 对房价（元）的散点图')  % 标题
```

运行程序输出图形如图 15-4 所示。

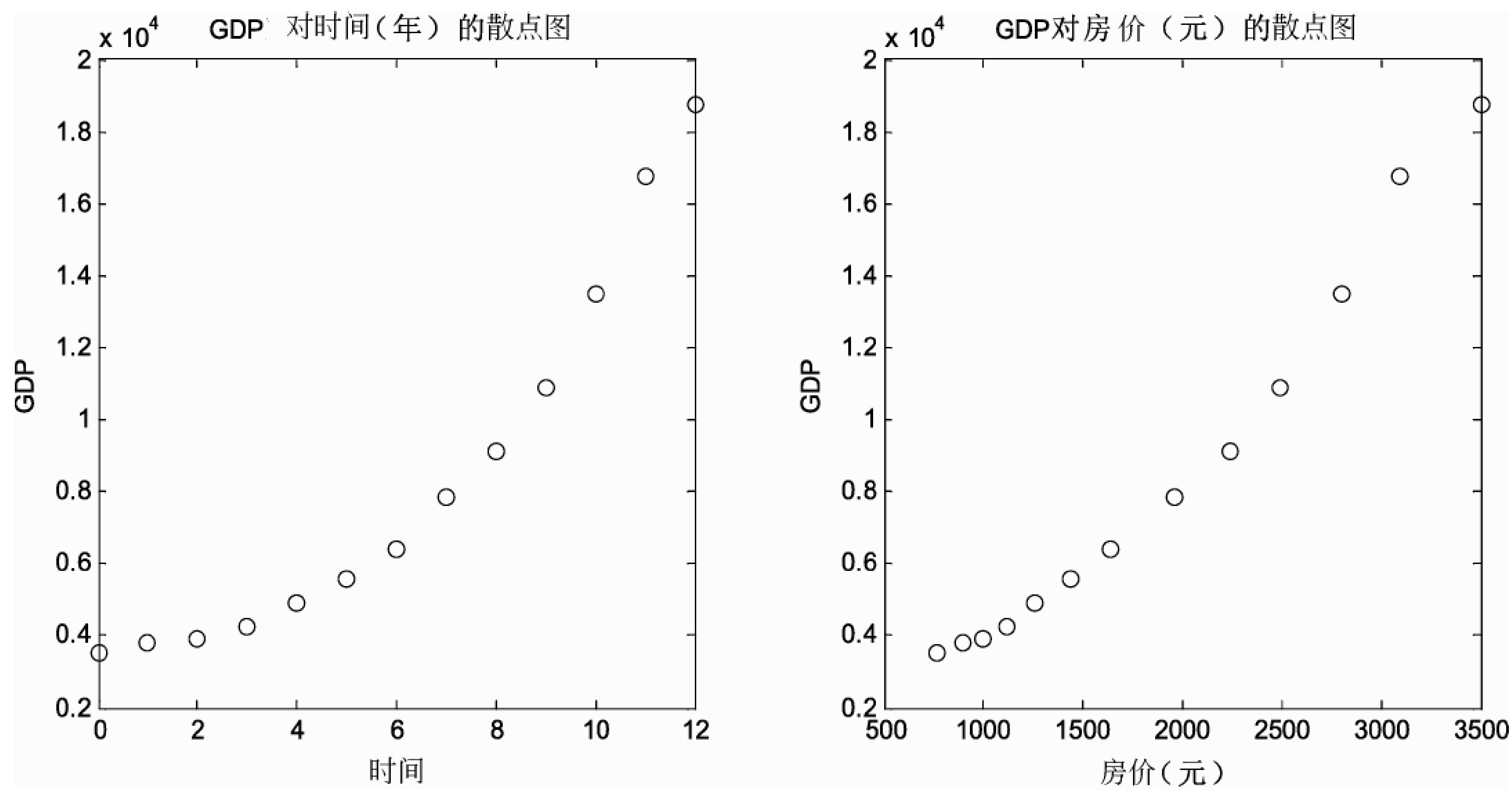


图 15-4　GDP 变化图

直观的来看，GDP 对时间的散点图比较近似一条指数曲线，而 GDP 对房价的散点图近似一条直线。所以我们不妨设：

$$\hat{g}'(p)=a_0+a_1p$$

而设：

$$\hat{c}(y)=b_0+b_1y+b_2y^2$$

将两个式子合并，则我们得到：

$$\hat{g}(p,y)=A+a_1p+b_1y+b_2y^2$$

只需要找到 $\hat{g}(p,y)=A+a_1p+b_1y+b_2y^2$ 合适的参数 A,a_1,b_1,b_2，使得 $D=\sum_{i=0}^{12}[g_i-\hat{g}_i(p,y)]^2$ 达到最小值。

这就是第一个模型，将 GDP 看成是 p 的函数。

2．模型二

现在来讨论第二个模型，此时我们将把 p 看成是 GDP 的函数，仿照上一个模型，它也应该由两部分组成，即 $p=p(g,y)$。

其中，对 y 的描述与上个模型相同，即 $\hat{c}(y)=b_0+b_1y+b_2y^2$，而对另一个部分，我们设 $\hat{p}'(g)=a_0+a_1g$。则最终表达式可以写成：

$$\hat{p}(g,y)=A+a_1g+b_1y+b_2y^2$$

只需要找到 $\hat{p}(g,y)=A+a_1g+b_1y+b_2y^2$ 合适的参数 A,a_1,b_1,b_2，使得 $D=\sum_{i=0}^{12}[p_i-\hat{p}_i(g,y)]^2$ 达到最小值。

这就是第二个模型，将房价看成是 GDP 的函数。

15.7.3　问题二模型的求解

由于在以上的模型中，最先建立的是带有指数函数的模型，而那样导致了计算机无法求出正确解，所以在后面的模型里，不得不改用二次函数。又由于这两个模型都是有两个参数的，所以还是只能通过 MATLAB 提供的统计工具箱进行求解。

以下是分别求解两个模型的步骤。

step1：

对模型一和模型二，直接调用 MATLAB 统计工具箱中先对房价和 GDP 进行数据拟合操作，程序如下。

```
clc,clear,close all
Y=0:12;
GDP=[3540 3783 3916 4239 4922 5560 6399 7842 9116 10879 13475 16737 18745];
P=[767 895 995 1117 1261 1437 1640 1957 2244 2489 2801 3096 3500];
figure,subplot(121),
plot(P,GDP,'bo')
hold on
a=polyfit(P,GDP,2)                          % 二次曲线拟合
GDP1 = a(1,1)*P.^2+a(1,2)*P+a(1,3);         %多项式表达
error1 = sum(abs(GDP-GDP1))                 % 误差
plot(P,GDP1,'rs')
xlabel('房价（元）')
ylabel('GDP')
% 模型二
a=polyfit(GDP,P,2)                          % 二次曲线拟合
P1 = a(1,1)*GDP.^2+a(1,2)*GDP+a(1,3);       %多项式表达
error2 = sum(abs(P-P1))                     % 误差
```

```
subplot(122)
plot(GDP,P,'bo')                                  % 画图
hold on
plot(GDP,P1,'rs')
ylabel('房价（元）')
xlabel('GDP')
```

运行结果如下：

```
a =
   1.0e+03 *
    0.0000    0.0001    2.5877

error1 =
   3.0106e+03

a =
   -0.0000    0.3236 -177.0625

error2 =
  777.9282
```

图形如图 15-5 所示。

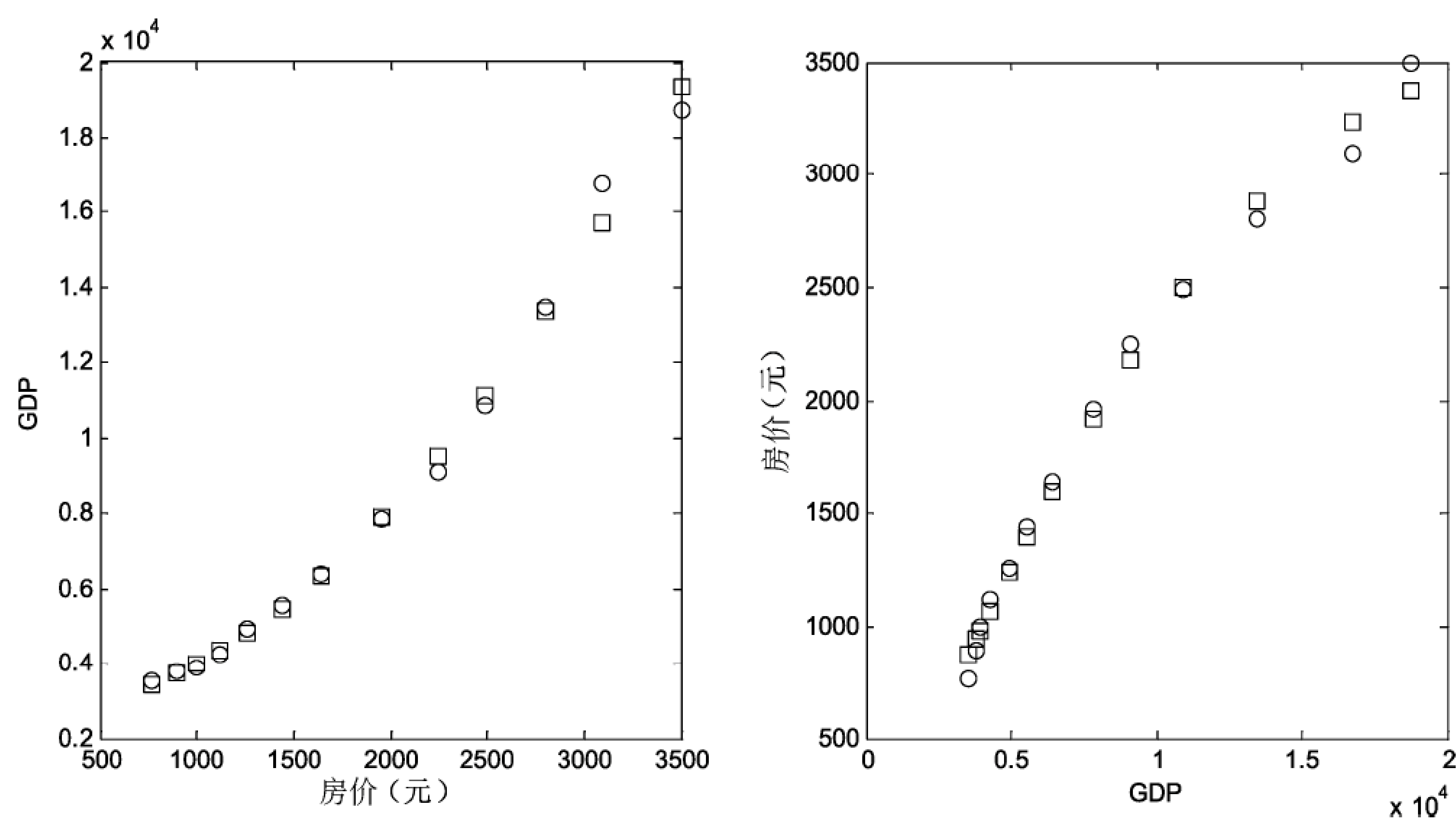


图 15-5　拟合图

由于模型二的误差远远小于模型一，所以我们不再过多的讨论模型一，只写出模型二的 $\hat{p}(g,y)$ 的表达式为：采用 MATLAB 中的 regress 命令。

```
clc,clear,close all
Y=0:12;
GDP=[3540 3783 3916 4239 4922 5560 6399 7842 9116 10879 13475 16737 18745];
P=[767 895 995 1117 1261 1437 1640 1957 2244 2489 2801 3096 3500];
figure,
plot(P,GDP,'bo')
hold on
```

```
GDP1=zeros(length(GDP),4);                    % 初始化
GDP1(:,1)=1;
GDP1(:,2)=GDP;
GDP1(:,3)=Y;
GDP1(:,4)=(Y.^2);                             % 平方
[b,bint,r,rint,stats]=regress(P',GDP1)        % 回归
P1 = b(1)+b(2)*GDP+b(3)*Y+b(4).*Y.^2;         % 方程表达
error = P-P1;
plot(P,P1,'rs')
```

运行程序输出结果如下：

```
b =
  935.2933
   -0.0394
   60.1339
   17.9207

bint =
   1.0e+03 *
    0.6959    1.1747
   -0.0001    0.0000
    0.0302    0.0901
    0.0098    0.0261

r =
  -28.8790
   30.6364
   21.9782
    6.9613
   -7.7194
  -28.0137
  -49.2336
   31.4922
   39.7208
  -10.6338
    2.9757
  -10.0274
    0.7423

rint =
  -65.6542    7.8963
  -26.4492   87.7220
  -41.3232   85.2796
  -59.1995   73.1220
  -71.2434   55.8046
  -90.1206   34.0931
 -102.3716    3.9044
  -30.3153   93.2996
  -14.3576   93.7993
  -68.6147   47.3470
  -63.2253   69.1767
  -55.0319   34.9772
  -50.0532   51.5379

stats =
```

```
  1.0e+03 *
   0.0010    3.4642    0.0000    0.9294
```

求得各参数如下。

step2： 对模型 2，整理求得各参数如表 15-3 所示。

表 15-3　参数表

参数	A	a_1	b_1	b_2
值	935	-0.0394	60.1339	17.9207

由于模型二的误差远远小于模型一，所以我们不再过多的讨论模型一，只写出模型二的 $\hat{p}(g,y)$ 的表达式为：

$$\hat{p}(g,y) = 935 - 0.0394g + 60.13y + 17.92y^2$$

同样的，在现实中一定能找到一个确定的函数 $p = p(g,y)$，它能够完整的反映 p 和(g,y)的关系。

15.7.4　问题二结果的分析及验证

房价会显著的影响 GDP，反过来说，GDP 显然也会影响房价。所以在这个问题上建立了两个模型，分别将他们中的一个看作另一个的函数。得到了两个完全不同的模型。

无论谁是谁的函数，自变量里面都包括了时间甚至是时间的平方项，因为随着社会的发展，通货膨胀和其他因素总是不可避免的。

注意到我们求解出模型一和模型二的那两个表格中的两个 a_1 的值，它们都是负的，虽然它们负的程度都不大。但是从这个负号我们可以看出，无论是房价对 GDP 的影响还是 GDP 对房价的影响都是消极的（negative）。

由于我们之前设了实际的房价函数 $p(g,y) = \hat{p}(g,y) + \varepsilon$，其中 $\hat{p}(g,y)$ 包括了时间和 GDP 对房价的影响，而 ε 则包含了我们没有考虑到的因素。由于之前的假设，由于 $c=c(y)$ 已经囊括了所有的与时间有关的内容，所以根据假设，ε 一定是与时间没有关系的随机误差。但是，考虑到 GDP 与房价之间错综复杂的关系，不得不去考虑 ε 的时滞性，ε 值如表 15-4 所示。

表 15-4　ε 值

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ε	-29	31	22	7	-8	-28	-50	31	40	-11	4	-10	1

不妨画出 $\varepsilon_y - \varepsilon_{y-1}$ 的散点图，以检查 ε 是否与时间有关。MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
rr=[ 30.6364   21.9782    6.9613   -7.7194  -28.0137  -49.2336   31.4922
39.7208  -10.6338   2.9757  -10.0274    0.7423];
rrr=[-28.8790    30.6364   21.9782    6.9613   -7.7194  -28.0137  -49.2336
31.4922   39.7208  -10.6338    2.9757  -10.0274];
plot(rrr,rr,'o')          %画图
hold on
```

```
ezplot('t','0',[-60,50])    % 隐函数画图
ezplot('0','t',[-50,40])    % 隐函数画图
```

运行程序输出图形如图 15-6 所示。

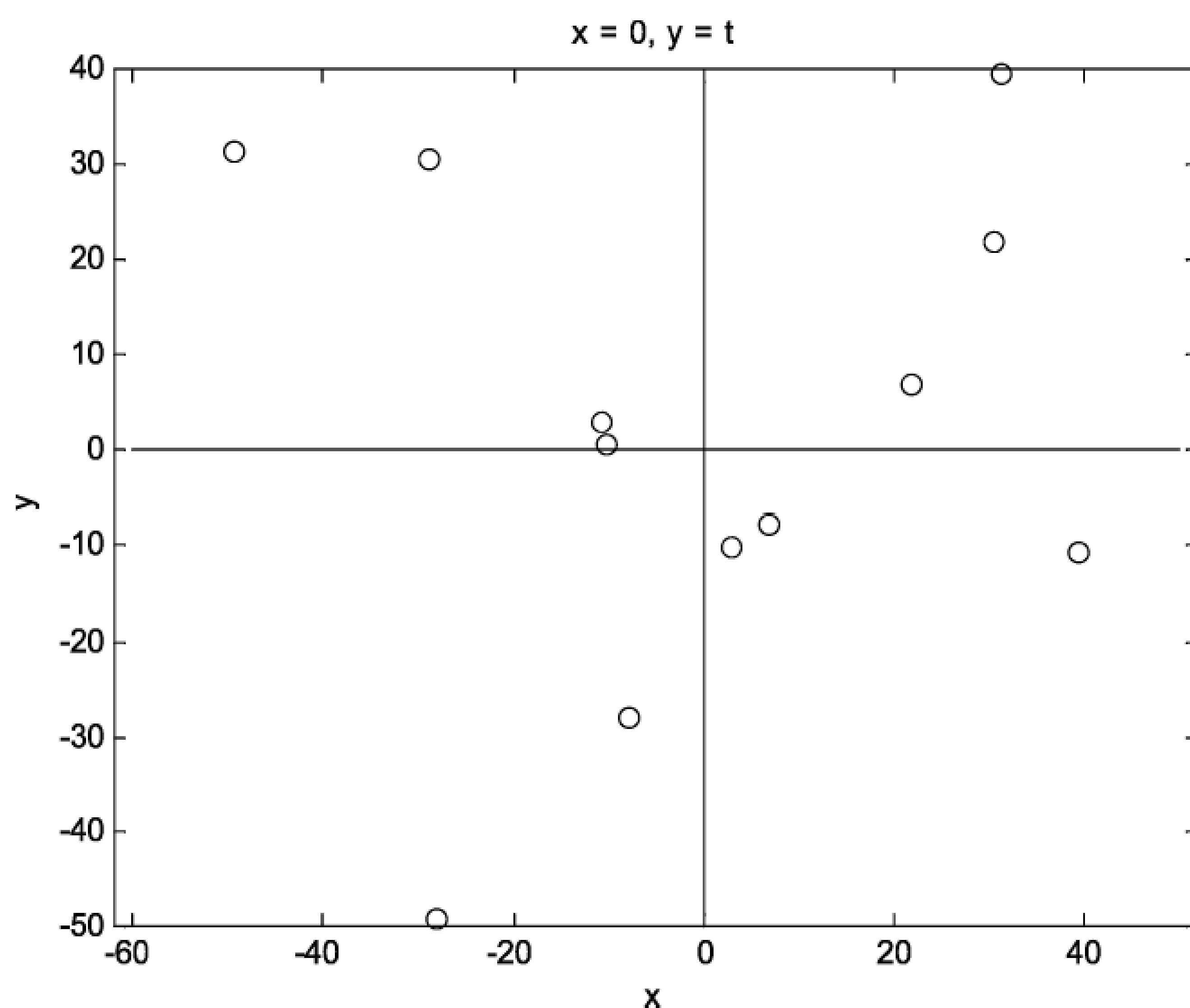


图 15-6　ε 相关性检验

如图 15-6 可知，有 5 个点落在 1、3 象限，而 7 个点落在 2、4 象限，5 和 7 相差不大，我们基本可以认定 ε 与时间无关。

15.8　问　题　三

15.8.1　问题三的分析

“试建立 2010 年该地区的合理房价模型使得百姓、房地产商和政府都比较满意”，这个问题初读起来让人摸不着头脑。故我们首先要解决的问题是，什么叫做“满意”。

使百姓满意的意思是“买得起房”，而对房地产商自然是“有钱可赚”。这两点毋庸置疑，而要说清楚“政府比较满意”就显得麻烦一点。我们认为，在利益的冲突中，政府总是倾向于维护人民的利益，也即，政府的满意度首先与百姓的满意度成正相关，即，只要百姓能买得起房，安居乐业，政府就满意了“一大半”了。而在百姓买得起房的前提下，政府自然是希望房地产业能够稳定的发展，以获得更多税收。

在建立模型之前，让我们对已有的数据进行粗略的分析，考虑到要买房必须先有足够的收入，我们先研究一下房价的增长速率及收入的增长速率，如表 15-5 所示。

表 15-5　房价的增长速率及收入的增长速率

年　份	房　价	房价增长率	收　入	收入增长率	收入/房价
1997	767	/	5156	/	6.72
1998	895	16.68	5138	-0.35	5.74

续表

年　　份	房　　价	房价增长率	收　　入	收入增长率	收入/房价
1999	995	11.17	6526	27.01	6.55
2000	1117	12.26	7434	13.91	6.65
2001	1261	12.89	8475	14	6.72
2002	1437	13.95	9688	14.31	6.74
2003	1640	14.13	10703	10.48	6.52
2004	1957	19.32	11348	6.36	5.82
2005	2244	14.66	12343	8.42	5.5
2006	2489	10.92	13630	10.43	5.47
2007	2801	12.53	15558	14.15	5.55
2008	3069	10.53	18472	18.73	5.96
2009	3500	13.05	19820	7.29	5.66
房价的年均增长率为：13.49%，收入的年均增长率为：11.87%					

由表 15-5 中可看出，房价的年均增长率大于收入的增长率，而平均年收入能购买的住房平米数自 2004 年起就几乎没有增长过，并且小于 1997 年～2003 年的水平。

从另一个角度来看这个问题，我们之前谈到，人均 GDP 可以理解为一年中人均的消费量，或者通俗的说就是平均一个人在这年里花了多少钱。那么收入减去 GDP 则可以看作是人均收入的剩余。

我们考虑一个三口之家，如果他们从 1997 年开始打算凑钱购买一套新房子（由于 GDP 中显然包含了住房消费，所以我们必须将住房消费从 GDP 中扣除掉才能进行计算。），2006 年平均消费为 10000 元的家庭在住房上的平均消费是 1000 元，即约 10%。那么我们假设该家庭从 1997 年以来没有买房，故应从他们的人均 GDP 中扣除这 10%。

那么我们来计算一下。他们每年剩下来的钱积累起来能够买多大的一套住房，结果如表 15-6 所示。

表 15-6　住房面积变化

年份	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
总面积	7.7	13.5	22.6	32.3	42.0	51.7	60.7
增加面积	7.7	5.8	9.0	9.7	9.6	9.8	9.0
年份	2004	2005	2006	2007	2008	2009	
总面积	67.4	72.9	77.5	81.2	84.5	87.0	
增加面积	6.6	5.5	4.6	3.7	3.3	2.52	

如表 15-6 所示，居民每年剩余下来的钱所能购买的住房面积越来越少。特别是 2004 年之后，每年结余下来的收入所能够购买的住房量急剧下降。

15.8.2　问题三模型的建立

根据以上的分析，我们要建立一个“不平等”的房价模型，区别对待富人和普通人，并且要满足以下几个条件：

（1）2010 年的房价（第一套房）不能涨得比收入还快。

（2）在降低房价的同时要保证房地产开发商的利益。

假设如下变量，p_1 为购买第一套住房平均房价；

p_2 为购买多于一套住房的平均房价，而 p 为总的平均房价；

k 为购买第二套住房增加的价格比例；

k_1 为增加的价格比例中付给房地产开发商的部分；

2009 年房屋的总销售量为 Q_1，2010 年为 Q_2。

重申一下假设：

第一，有 20%的人（富人）会考虑购买第二套房，即在当年消费的总住房数中有 20%是由富人购买的。

第二，对富人来说，房屋需求的价格弹性（所谓需求的价格弹性是指需求量变化的百分比除以价格变化的百分比）很小，即房价上涨几乎不会影响富人的消费计划。

第三，我们假定城镇住房需求（对普通人）的价格弹性在 0.5～0.6 之间，我们不妨对普通人取 0.6，即：

$$E_d = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \times \frac{p_1}{Q_1} \approx -0.6$$

因为我们对 ΔQ 感兴趣，故有：

$$\Delta Q = 0.55 \times \Delta p \times \frac{Q_1}{p_1}$$

对于 Q_2，根据假设可以知道，由于房价的变化对富人的购房计划没有影响，但会影响到普通人的消费，故 2010 年房屋的销售量可以用下式来描述：

$$Q_2 = 0.8(Q_1 + \Delta Q) + 0.2Q_1$$

由此得到：

$$Q_2 = \left\{0.8(1 - 0.6\frac{\Delta p}{p_1}) + 0.2\right\} \times Q_1$$

由于 2009 年还没有开始我们的新政策，故这里的 $p_1 = p = 3500$，3500 元是 2009 年的平均房价，故有：

$$Q_2 = \left\{0.8(1 - 0.6\frac{\Delta p}{3500}) + 0.2\right\} \times Q_1$$

根据我们对房价的条件，并结合问题一及本问问题分析中的数据，房价 2010 年的总平均房价 p 必须满足增长率不得超过收入增长率的条件（收入的增长率为 11.8%），即：

$$p < 3500 \times 1.118$$

为了保证房地产业健康发展，我们同时想要保证房地产商的收入，若设 2009 年房地产商的总收入为 I_1，2010 年的收入为 I_2。不难知道 $I_1 = 3500 \times Q_1$，且根据式 $\Delta Q = 0.55 \times \Delta p \times \frac{Q_1}{P_1}$，同样可以计算出 $I_2 = \left[0.8(1 - 0.6\frac{p_1 - 3500}{3500})Q_1\right] \times p_1 + 0.2Q_1 \times p_2$，这里再次强调房地产商的利益同样需要保障，我们按照通常的“保八”的提法，认为房地产商在下一年的收入应该大于这一年的 108%，即 $I_2 \geqslant I_1 \times 1.08$，即：

$$\left[0.8(1 - 0.55\frac{p_1 - 3500}{3500})\right] \times p_1 + 0.2p_2 \geqslant 3500 \times 1.08$$

当然我们还需要一些条件，虽然说这是一个“不公平”的模型，但是我们也不能像对待土豪劣绅那样对待有钱人，根据在互联网上查到的一些数据，设 $k=0.4$，即购买第二套住房每平米比正常贵 40%。

我们也不能太便宜房地产商了，所以令 k 中只有 k_1 是给开发商的，其余的部分作为国家的税收。显然有 $k_1 \leqslant 0.4$，则有：

$$\left[0.8(1-0.6\frac{p_1-3500}{3500})\right]\times p_1+0.2(1+k_1)p_1 \geqslant 3780$$

最后，在房价变动不太大的情况下，为了计算简便，我们设：

$$p \approx 0.8p_1+0.2p_2$$

好了，综上所述，我们要建立的模型一是：

$$\min p_1$$

$$s.t.$$

$$\begin{cases} \left[0.8(1-0.6\frac{p_1-3500}{3500})\right]\times p_1+0.2p_2 \geqslant 3780; \\ p < 3900; \\ k_1 \leqslant 0.4; \\ p_2=(1+k_1)p_1; \end{cases}$$

采用 LINGO 求解，编程如下：

```
min=x1;    !目标;
0.8* (1-0.000171428* (x1-3500)) *x1+0.2* (1+x2) *x1>=3780;    !目标约束条件
x1*0.8+0.2* (1+x2) *x1<3900;                                   !目标约束条件
  x2<0.4;                                                      !目标约束条件
```

程序结果如下：

```
 Local optimal solution found.
 Objective value:                              3500.000
 Infeasibilities:                             0.1099097E-06
 Extended solver steps:                               5
 Total solver iterations:                           120


                     Variable           Value        Reduced Cost
                           X1        3500.000            0.000000
                           X2       0.4000000            0.000000

                          Row    Slack or Surplus      Dual Price
                            1        3500.000           -1.000000
                            2      -0.1099097E-06       -1.666662
                            3        120.0000            0.000000
                            4        0.000000            1166.664
```

这个模型的意义在于，既保证了房地产商的收入，并且降低了购买第一套住房的价格。而且如果 k_1 小于 0.4，还可以为国家增加收入。

当讨论需求的价格弹性时，我们使用的基数是 3500 元，即 2009 年的房价。如果我们考虑到经济的增长，老百姓可以接受的价格可能会比 3500 元高。于是我们不妨重新把这个值设置的大一些，如 3780 元，即比 3500 元高 8%，这样做是有道理的，因为之前我们在

讨论房地产开发商的利润时就使用到了 8%这个数值。

除了这一点，模型一还有一个需要改进的地方，即我们一开始认为房价不会对富人的消费造成影响，但是就如我们在假设中说的那样，房价的上涨虽然对富人影响不大，但是毕竟还是有影响的，所以我们不妨重新认为房屋需求的价格弹性对富人为 0.5。

所以我们的模型变为：

$$\min p_1$$

$$s.t.$$

$$\begin{cases} \left[0.8(1-0.6\dfrac{p_1-3780}{3780})\right]\times p_1+\left[0.2(1-0.5\dfrac{p_2-3780}{3780})\right]\times p_2\geqslant 3780; \\ p\ <3900; \\ k_1\leqslant 0.4; \\ p_2=(1+k_1)p_1; \end{cases}$$

LINGO 编程如下：

```
min=x1;      !目标
0.8* (1-0.000159* (x1-3800)) *x1+0.2* (1-0.0001322* ((1+x2) *x1-3800)) *
(1+x2) *x1>=3780;    !目标约束条件
x2<=0.4;     !目标约束条件
```

程序结果如下：

```
 Local optimal solution found.
 Objective value:                              3520.013
 Infeasibilities:                             0.3903060E-06
 Extended solver steps:                              5
 Total solver iterations:                          315


                    Variable           Value        Reduced Cost
                          X1        3520.013            0.000000
                          X2       0.4000000            0.000000

                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                           1        3520.013           -1.000000
                           2      -0.3903060E-06       -2.253784
                           3        0.000000            316.3690
```

15.8.3　问题三模型的求解

根据模型一求得 $p_1=3500$ 元，k_1=0.4 的结论，也就是说，在 2010 年的房价模型中，2010 年的购买第一套房的房价维持在 2009 年的水平上，而购买第二套房的价格提高 40%，即 $p_2=4900$ 元。而这个结果可以保证房地产商的收入比前一年增加 8%。

而在模型二中，求得 $p_1=3520$，k_1=0.4，$p_2=4928$。这个模型同样可以保证房地产商的收入比前一年增加 8%。

15.8.4　问题三结果的分析及验证

在模型一中，我们主要保证了百姓购买第一套住房的价格最低，在此基础上保证了房

地产商的利益。虽然求解出 k_1 等于 0.4，即政府没有直接从这套政策中获得额外的税收，但是由于房地产商的收入增加了 8%，自然的房地产税收也会因此增加，这样，对政府来说也是满意的。

如果不讨论弹性系数对第一套住房销量的影响，我们还可以大致估计一下该年真正平均住房的价格大约为 $p=0.2\times3500\times1.4+0.8\times3500=3780$（元），考虑到我们在问题一中计算出的结果，$p=3887\pm\varepsilon$，$\varepsilon=100$，而这里算出的 p 几乎是落在了这个范围内的，也就是说，我们的结果是可接受的。

15.9　模型的评价

在问题一中，我们不仅建立了房价的预测模型，而且找出了模型与实际数据间的误差，而后对这些误差进行了参数估计并且大致找到了误差的分布函数。这样，我们预测出的房价就不只是一个“光秃秃”的值，而是一个范围，大大增加了模型的可信度。

在问题二中，由于房价和 GDP 之间微妙的关系，我们建立了两个模型，先将 GDP 看成是房价的函数，然后将房价看成是 GDP 的函数，分别进行回归分析，最后以误差的大小来判断模型的优劣，这样做比单纯建立一个模型要好得多。

在处理问题三的时候，本章创造性地将购房的人群分为了两类，并分别对两类人建立了房价的模型。显然这样的处理方法更加精细。

本章的模型还有很多不足，在问题三的第二个模型中，当讨论到 2010 年老百姓的经济接受能力时，我们只假设了它随经济的增长而有所提高，显然这个做法比较粗糙。

第 16 章　发电机安排计划

发电机安排计划和人员安排计划类似。涉及安排问题，一般均属于 NP 问题，只能是尽可能地去满足模型需要，求出尽可能优化的解。为了满足日常用电需求，且需要满足发电机厂的发电机使用规划，发电机安排计划需要解决成本和用电需求之间的平衡，从而使成本最小。本模型涉及分段函数处理以及混合整数规划模型求解等。

学习目标：

（1）学习和掌握 LINGO 求解发电机安排计划问题等；

（2）掌握分段函数的处理方法；

（3）掌握混合整数规划问题的求解等。

16.1　问 题 提 出

为了满足每日电力需求（单位：兆瓦），可以选用四种不同类型的发电机。每日电力需求如表 16-1 所示。

表 16-1　每日用电需求（兆瓦）

时段	0 点—6 点	6 点—9 点	9 点—12 点	12 点—14 点	14 点—18 点	18 点—22 点	22 点—24 点
需求	12000	32000	25000	36000	25000	30000	18000

每种发电机都有一个最大发电能力，当接入电网时，其输出功率不应低于某一最小输出功率。所有发电机都存在一个启动成本，以及工作于最小功率状态时固定的每小时成本，并且如果功率高于最小功率，则超出部分的功率每兆瓦每小时还存在一个成本，即边际成本。这些数据均列于表 16-2 中。

表 16-2　发电机数据

	可用数量	最小输出功率（兆瓦）	最大输出功率（兆瓦）	固定成本（元/小时）	每兆瓦边际成本（元/小时）	启动成本（元）
型号 1	10	750	1750	2250	2.7	5000
型号 2	4	1000	1500	1800	2.2	1600
型号 3	8	1200	2000	3750	1.8	2400
型号 4	3	1800	3500	4800	3.8	1200

只有在每个时段开始才允许启动或关闭发电机。与启动发电机不同，关闭发电机不需要付出任何代价。问题是：

（1）在每个时段应分别使用哪些发电机才能够使每天的总成本最小？

（2）如果型号 2 的发电机的可用数量变为 6，问发电机的使用计划是否发生改变？

（3）如果要求在任意时刻，正在工作的发电机组必须留出 20%的发电能力余量，以防用电量突然上升，问发电机的使用计划如何？

16.2 摘　　要

本题研究了发电机使用计划的最优化问题，利用每个时段发电机所花费的成本的最小值建立数学模型。使用 LINGO 程序求出 7 个时段总成本的最优解的方法，得到了最优解的结果。最优解的思想在实际生活中可用性比较强，可进行模型推广。

问题一中，对数据进行初步分析后，由于数据的复杂性及多样性，将每天分为 7 个时段，建立一个分段函数，本章对该分段函数作一定的变换，将其表示为一个函数，采用分支定界法进行求解，通过 LINGO 程序分别计算出每个时段使用发电机的数量和总功率，得到所花费成本的最小值为 1 449 030 元。

问题二与问题一求解原理相似，但由于型号 2 发电机的可用数量发生变化，导致数量上出现改变，因此修改问题一的模型参数即可，得出所花费成本的最小值为 1 446 990 元。

问题三中，要求在任意时刻，正在工作的发电机组必须留出 20%的发电能力余量，将模型中的约束条件 $\sum_{i=1}^{4} M_i n_{ij} \geqslant F_j$ （$\sum_{i=1}^{4} M_i n_{ij}$ 当前运行的每台发电机的最大输出功率之和，供电需要 F_j）改为 $0.8 * \sum_{i=1}^{4} M_i n_{ij} \geqslant F_j$，则得出所花费成本的最小值为 1 460 980 元。

关键词：混合整数规划、分段函数、分支定界法、最优化思想。

16.3 问 题 假 设

（1）各发电机在需要时都能够正常运行；

（2）发电机的启动与停止可以瞬间完成。

16.4 符 号 说 明

A_i：第 i 类发电机的总台数，i=1、2、3、4 表示四类发电机；

C_i：第 i 类发电机在最低功率级以上每兆瓦小时需付出的费用（元/h/MW），i=1、2、3、4 表示四类发电机；

D_i：第 i 类发电机运行在最低功率级上每小时的费用（元/h）；

E_i：第 i 类发电机的启动费用；

F_j：第 j 个时间段规定的需要量，$j=1,2,\dots,7$ 是问题中给出的全天 7 个时间段；

m_i：第 i 类发电机规定的最小输出量；

M_i：第 i 类发电机规定的最大输出量；

t_j：第 j 个时间段的时间长度；

n_{ij}：第 j 个时间段中运转的第 i 类发电机数量，整数变量；

s_{ij}：第 j 个时间段中所新启动的第 i 类发电机的台数，整数变量；

x_{ij}：第 j 个时间段中第 i 类发电机送出的总输出功率，连续变量；

z：各发电机每天的总费用。

16.5　问题分析与建模

16.5.1　问题分析

本问题是希望建立一个数学模型来解决若干发电机在一天中 7 个时段各自出力多少，即使用多少台发电机发电，使得总的成本最低。由于供电是一个不间断进行的过程，因此在考虑此问题时应该注意两天之间的衔接，体现在此处就是第一个时段（午夜 12 点至上午 6 点）与第 7 个时段（晚上 10 点至 12 点）之间的衔接，我们将它与其他时间段之间的衔接做同样处理，此过程可以用图 16-1 表示。

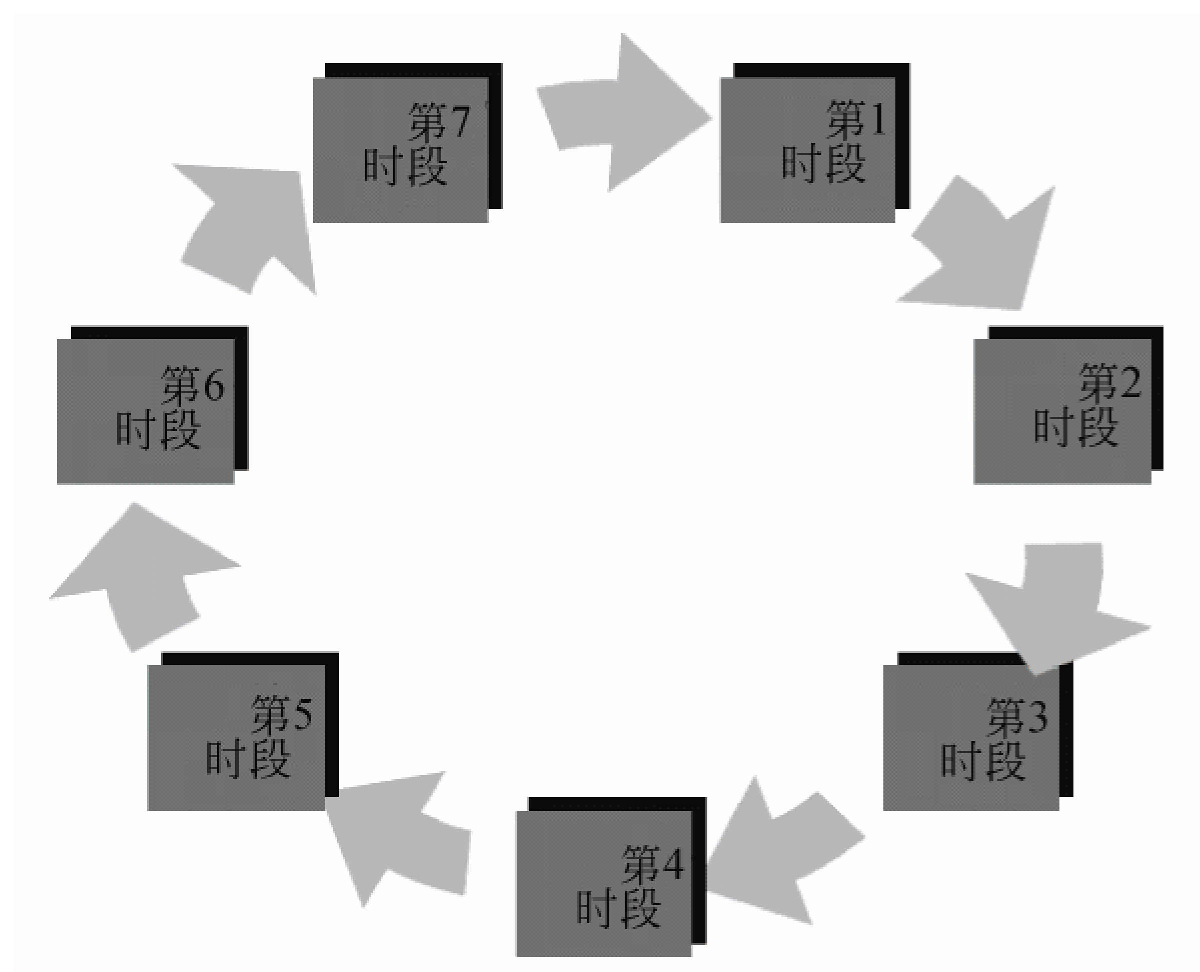


图 16-1　运转示意图

在第 j 个时段内，第 i 类的发电机中有 n_{ij} 台在工作，由此会产生的费用有三项：

（1）为满足需要启动新的发电机时产生的费用 E_i，新启动的第 i 类发电机台数为 s_{ij}，则该时段内启动新发电机所产生的费用为 $E_i s_{ij}$；

（2）每台发电机运行在最低功率 m_i 时每小时产生的费用 D_i，则该时段内产生的此项费用为 $D_i n_{ij} t_j$；

（3）如果发电机输出功率超过最低功率级，每小时每兆瓦要产生一定的费用 C_i，超出的功率可表示为 $x_{ij} - m_i n_{ij}$，则该时段内产生的此项费用为 $C_i(x_{ij} - m_i n_{ij})t_j$。

因此，各发电站全天产生的总费用即为：

$$z = \sum_{i,j} C_i (x_{ij} - m_i n_{ij}) t_j + \sum_{i,j} D_i t_j n_{ij} + \sum_{i,j} E_i s_{ij}$$

我们的目标就是使这个总费用最小。

在每个时段，发电机在工作过程中还应该满足相应的约束。例如供电需求，每类发电机的发电能力约束和发电机数量约束等，具体将有下面几种类型的约束。

（1）每个时段不需满足供电需要，第 j 个时段第 i 类发电机的总输出功率为 x_{ij}，则在第 j 个时段三类发电机的总的输出功率为 $\sum_{i=1}^{4} x_{ij}$，它应该大于等于供电需要 F_j，即有：

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \geqslant F_j$$

（2）由于市场的供电需求不完全确定，因此每个时段发电机总的输出功率应该满足额外的保险负荷要求，并且满足这些额外的需求应在不多启动发电机的情况下得到满足，即只能调整现有运行的发电机的输出功率来得到满足，换句话讲当前运行的每台发电机的最大输出功率之和 $\sum_{i=1}^{4} M_i n_{ij}$ 应该大于等于 F_j，即有：

$$\sum_{i=1}^{4} M_i n_{ij} \geqslant F_j$$

（3）每类发电机的输出功率一定要在发电机安全工作的范围内：

$$m_i n_{ij} \leqslant x_{ij} \leqslant M_i n_{ij} \quad ,i = 1,2,3,4$$

（4）可供使用的发电机总数满足条件：

$$0 \leqslant n_{ij} \leqslant A_i$$

（5）在时段 j 中新启动的发电机台数必须等于发电机增加的台数：

$$s_{i,j} = \begin{cases} n_{i,j} - n_{i,j-1}, & n_{i,j} \geqslant n_{i,j-1} \\ 0 & , \ others \end{cases} ,i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4,5,6,7$$

式中 n_{ij} 为在周期 j 中所起动的发电机台数（当 j =1 时，周期 j -1 取 7）。

16.5.2　数学模型

根据上述分析，可以建立原问题的优化数学模型：

$$\begin{cases} \min \ z = \sum_{i,j} C_i (x_{ij} - m_i n_{ij}) t_j + \sum_{i,j} D_i t_j n_{ij} + \sum_{i,j} E_i s_{ij} \\ s.t. \\ \quad \sum_{i=1}^{4} x_{ij} \geqslant F_j \ , \quad j = 1,2,\ldots,7 \\ \quad \sum_{i=1}^{4} M_i n_{ij} \geqslant F_j \ , \ j = 1,2,\ldots,7 \\ \quad m_i n_{ij} \leqslant x_{ij} \leqslant M_i n_{ij} \ ,i = 1,2,3,4 \, ; j = 1,2,\ldots,7 \\ \quad 0 \leqslant n_{ij} \leqslant A_i \quad , \ i = 1,2,3,4 \, ; j = 1,2,\ldots,7 \\ \quad s_{i,j} = \begin{cases} n_{i,j} - n_{i,j-1}, & n_{i,j} \geqslant n_{i,j-1} \\ 0 & , \ others \end{cases} ,i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4,5,6,7 \end{cases}$$

这是一个混合整数规划问题。

16.6 模 型 求 解

16.6.1 求解方法

在上述模型中，由于：

$$s_{i,j}=\begin{cases}n_{i,j}-n_{i,j-1}, & n_{i,j}\geqslant n_{i,j-1}\\ 0 & , \quad others\end{cases}, i=1,2,3,4; j=1,2,\dots,7$$

是一个分段函数，因此要做一定的变换将其表示成一个函数。根据 s_{ij} 的定义，可以将其表示为：$s_{i,j}=\frac{1}{2}(n_{i,j}-n_{i,j-1}+|n_{i,j}-n_{i,j-1}|)$ ，也可以采用 $s_{i,j}=\max\{n_{i,j}-n_{i,j-1},0\}$,也可以将此约束条件替换为 $s_{i,j}>=n_{i,j}-n_{i,j-1}$ 和 $s_{i,j}>=0$ 。

为了求解此模型，可以采用分支定界法或者割平面法，该方法能够求出局部最优解。在 LINGO 软件中有关于此类算法的实现方法，因此可以直接利用 LINGO 软件进行求解。

16.6.2 问题一的求解

在每个时段应分别使用哪些发电机才能够使每天的总成本最小，由数学模型编写 LINGO 程序如下：

```
model:  !模型开始
sets:    !变量设置
  elect/1..4/:mincap,maxcap,maxnum,beginmoney,overmoney,lowcapmoney;    !
变量初始化
  timepiece/1..7/:time,timetotalcap;  !变量初始化
  links(elect,timepiece):num,svar,x;  !变量初始化
endsets
min=@sum(links(i,j):overmoney(i)*(x(i,j)-mincap(i)*num(i,j))*time(j))+@s
um(links(i,j):lowcapmoney(i)*num(i,j)*time(j))+@sum(links(i,j):beginmone
y(i)*svar(i,j));  !目标函数

@for(timepiece(j):@sum(elect(i):x(i,j))>=timetotalcap(j));      !约束条件
@for(links(i,j):  mincap(i)*num(i,j)<=x(i,j));                  !约束条件
@for(links(i,j):  maxcap(i)*num(i,j)>=x(i,j));                  !约束条件
@for(timepiece(j):@sum(elect(i):maxcap(i)*num(i,j))>=timetotalcap(j));    !
约束条件

! 问题 1;
@for(elect(i):svar(i,1)=@smax(0,num(i,1)-num(i,7)));    !约束条件,@smax 为取
                                                          大值操作
@for(elect(i):svar(i,2)=@smax(0,num(i,2)-num(i,1)));    !约束条件,@smax 为取
                                                          大值操作
@for(elect(i):svar(i,3)=@smax(0,num(i,3)-num(i,2)));    !约束条件,@smax 为取
                                                          大值操作
```

```
@for(elect(i):svar(i,4)=@smax(0,num(i,4)-num(i,3)));    !约束条件,@smax 为取大值操作
@for(elect(i):svar(i,5)=@smax(0,num(i,5)-num(i,4)));    !约束条件,@smax 为取大值操作
@for(elect(i):svar(i,6)=@smax(0,num(i,6)-num(i,5)));    !约束条件,@smax 为取大值操作
@for(elect(i):svar(i,7)=@smax(0,num(i,7)-num(i,6)));    !约束条件,@smax 为取大值操作
@for(links(i,j):@bnd(0,num(i,j),maxnum(i)));      !约束条件, @bnd 为取值范围设置操作
@for(links(i,j):@gin(num(i,j)));            !约束条件, @gin 为变量整数设置操作
@for(links(i,j):@gin(svar(i,j)));           !约束条件, @gin 为变量整数设置操作
!@for(links(i,j):@gin(x(i,j)));             !约束条件, @gin 为变量整数设置操作

data:
!常数设置
mincap=750 1000 1200 1800;
maxcap=1750 1500 2000 3500;
maxnum=10 4 8 3;
beginmoney=5000 1600 2400 1200;
overmoney=2.7 2.2 1.8 3.8;
lowcapmoney=2250 1800 3750 4800;
time=6 3 3 2 4 4 2;
timetotalcap=12000 32000 25000 36000 25000 30000 18000;
enddata
end
```

程序运行结果如下：

```
 Local optimal solution found.
 Objective value:                         1449030.
 Objective bound:                         1449030.
 Infeasibilities:                        0.3616151E-08
 Extended solver steps:                          1
 Total solver iterations:                    13318


                                  Variable           Value
                                MINCAP( 1)        750.0000
                                MINCAP( 2)        1000.000
                                MINCAP( 3)        1200.000
                                MINCAP( 4)        1800.000
                           TIMETOTALCAP( 4)        36000.00
                                  ……
                                NUM( 3, 5)        8.000000
                                  ……
                               SVAR( 3, 7)        0.000000
                               SVAR( 4, 1)        0.000000
                               SVAR( 4, 2)        3.000000
                               SVAR( 4, 3)        0.000000
                               SVAR( 4, 4)        3.000000
                               SVAR( 4, 5)        0.000000
                               SVAR( 4, 6)        3.000000
                               SVAR( 4, 7)        0.000000
                                  X( 1, 1)        2000.000
                                  X( 1, 2)        3500.000
                                  X( 1, 3)        3000.000
                                  X( 1, 4)        3500.000
                                  X( 1, 5)        3000.000
```

```
X( 1, 6)      2600.000
X( 1, 7)      2000.000
……
X( 4, 1)      0.000000
X( 4, 2)      6500.000
X( 4, 3)      0.000000
X( 4, 4)      10500.00
X( 4, 5)      0.000000
X( 4, 6)      5400.000
X( 4, 7)      0.000000
```

根据程序的输出结果，我们知道发电站每天的总成本最低为：1 449 030 元。而在各个不同的时段上实际运行的发电机数量见表 16-3 所示。

表 16-3　一天中各个时段运行的不同种类的发电机的数量

类型		型号 1	型号 2	型号 3	型号 4
时段 1	数量	3	4	2	0
	总功率	2250	5750	4000	0
时段 2	数量	3	4	8	3
	总功率	4600	6000	16000	5400
时段 3	数量	3	4	8	0
	总功率	3000	6000	16000	0
时段 4	数量	3	4	8	3
	总功率	5250	6000	16000	8750
时段 5	数量	3	4	8	0
	总功率	3000	6000	16000	0
时段 6	数量	3	4	8	2
	总功率	4400	6000	16000	3600
时段 7	数量	3	4	5	0
	总功率	2250	5750	10000	0

注，表中数量的单位为：台；总功率的单位为：MW。

16.6.3　问题二的求解

对于问题二，如果型号 2 的发电机的可用数量变为 6，需要将模型中的参数 A_i 赋予新的值，重新计算即可。相应的 LINGO 程序如下：

```
model:        !模型开始
sets:         !变量设置
  elect/1..4/:mincap,maxcap,maxnum,beginmoney,overmoney,lowcapmoney;
                                                !变量初始化
  timepiece/1..7/:time,timetotalcap;            !变量初始化
  links(elect,timepiece):num,svar,x;            !变量初始化
endsets
min=@sum(links(i,j):overmoney(i)*(x(i,j)-mincap(i)*num(i,j))*time(j))+@s
um(links(i,j):lowcapmoney(i)*num(i,j)*time(j))+@sum(links(i,j):beginmone
y(i)*svar(i,j));  !目标函数

@for(timepiece(j):@sum(elect(i):x(i,j))>=timetotalcap(j));!约束条件
```

```
@for(links(i,j):  mincap(i)*num(i,j)<=x(i,j));              !约束条件
@for(links(i,j):  maxcap(i)*num(i,j)>=x(i,j));              !约束条件
@for(timepiece(j):@sum(elect(i):maxcap(i)*num(i,j))>=timetotalcap(j));
                                                 !约束条件

!问题 2
@for(elect(i):svar(i,1)>=num(i,1)-num(i,7));   !约束条件操作
@for(elect(i):svar(i,2)>=num(i,2)-num(i,1));   !约束条件操作
@for(elect(i):svar(i,3)>=num(i,3)-num(i,2));   !约束条件操作
@for(elect(i):svar(i,4)>=num(i,4)-num(i,3));   !约束条件操作
@for(elect(i):svar(i,5)>=num(i,5)-num(i,4));   !约束条件操作
@for(elect(i):svar(i,6)>=num(i,6)-num(i,5));   !约束条件操作
@for(elect(i):svar(i,7)>=num(i,7)-num(i,6));   !约束条件操作
@for(links(i,j):svar(i,j)>=0);                 !约束条件操作

@for(links(i,j):@bnd(0,num(i,j),maxnum(i))); !约束条件，@bnd 为取值范围设置操作
@for(links(i,j):@gin(num(i,j)));             !约束条件，@gin 为变量整数设置操作
@for(links(i,j):@gin(svar(i,j)));            !约束条件，@gin 为变量整数设置操作
!@for(links(i,j):@gin(x(i,j)));              !约束条件，@gin 为变量整数设置操作

data:
!常数设置
mincap=750 1000 1200 1800;
maxcap=1750 1500 2000 3500;
maxnum=10 4 8 3;
beginmoney=5000 1600 2400 1200;
overmoney=2.7 2.2 1.8 3.8;
lowcapmoney=2250 1800 3750 4800;
time=6 3 3 2 4 4 2;
timetotalcap=12000 32000 25000 36000 25000 30000 18000;
enddata
end
```

程序运行结果如下：

```
 Global optimal solution found.
 Objective value:                              1446990.
 Objective bound:                              1446990.
 Infeasibilities:                             0.6184564E-10
 Extended solver steps:                              2
 Total solver iterations:                          244


                    Variable           Value        Reduced Cost
                  MINCAP( 1)        750.0000            0.000000
                  MINCAP( 2)        1000.000            0.000000
                  MINCAP( 3)        1200.000            0.000000
                  MINCAP( 4)        1800.000            0.000000
                  MAXCAP( 1)        1750.000            0.000000
                  MAXCAP( 2)        1500.000            0.000000
                  MAXCAP( 3)        2000.000            0.000000
                  MAXCAP( 4)        3500.000            0.000000
                  MAXNUM( 1)        10.00000            0.000000
                  NUM( 4, 2)        3.000000           -180.0000
                  NUM( 4, 3)        0.000000           -6120.000
                  NUM( 4, 4)        3.000000           -4080.000
                  NUM( 4, 5)        0.000000           -8160.000
                  NUM( 4, 6)        2.000000           -240.0000
```

```
NUM( 4, 7)        0.000000        -4080.000
SVAR( 1, 1)       0.000000         5000.000
……
X( 1, 1)          2250.000         0.000000
X( 1, 2)          4600.000         0.000000
X( 1, 3)          3000.000         0.000000
X( 1, 4)          5250.000         0.000000
X( 1, 5)          3000.000         0.000000
X( 1, 6)          4400.000         0.000000
X( 1, 7)          2250.000         0.000000
X( 2, 1)          5750.000         0.000000
X( 2, 2)          6000.000         0.000000
X( 2, 3)          6000.000         0.000000
X( 2, 4)          6000.000         0.000000
X( 2, 5)          6000.000         0.000000
X( 2, 6)          6000.000         0.000000
X( 2, 7)          5750.000         0.000000
X( 3, 1)          4000.000         0.000000
X( 3, 2)          16000.00         0.000000
X( 3, 3)          16000.00         0.000000
X( 3, 4)          16000.00         0.000000
X( 3, 5)          16000.00         0.000000
X( 3, 6)          16000.00         0.000000
X( 3, 7)          10000.00         0.000000
X( 4, 1)          0.000000         9.600000
X( 4, 2)          5400.000         0.000000
X( 4, 3)          0.000000         3.300000
X( 4, 4)          8750.000         0.000000
X( 4, 5)          0.000000         4.400000
X( 4, 6)          3600.000         0.000000
X( 4, 7)          0.000000         3.200000
```

根据程序的输出结果，我们知道发电站每天的总成本最低为：1 446 990 元。而在各个不同的时段上实际运行的发电机数量见表 16-4。

表 16-4　一天中各个时段运行的不同种类的发电机的数量

类型		型号 1	型号 2	型号 3	型号 4
时段 1	数量	1	6	1	0
	总功率	1000	9000	2000	0
时段 2	数量	1	6	8	3
	总功率	1600	9000	16000	5400
时段 3	数量	1	6	8	0
	总功率	750	8250	16000	0
时段 4	数量	1	6	8	3
	总功率	1750	9000	16000	9250
时段 5	数量	1	6	8	0
	总功率	750	8250	16000	0
时段 6	数量	1	6	8	2
	总功率	1400	9000	16000	3600
时段 7	数量	1	6	4	0
	总功率	1000	9000	8000	0

注，表中数量的单位为：台；总功率的单位为：MW。

16.6.4　问题三的求解

对于问题三，如果要求在任意时刻，正在工作的发电机组必须留出 20%的发电能力余量，以防用电量突然上升，需要将模型中的约束条件 $\sum_{i=1}^{4} M_i n_{ij} \geqslant F_j$ 改为 $0.8*\sum_{i=1}^{4} M_i n_{ij} \geqslant F_j$，重新计算即可。LINGO 编程如下：

```
model:        !模型开始
sets:         !变量设置
  elect/1..4/:mincap,maxcap,maxnum,beginmoney,overmoney,lowcapmoney;     !
变量初始化
  timepiece/1..7/:time,timetotalcap;                       !变量初始化
  links(elect,timepiece):num,svar,x;                       !变量初始化
endsets
min=@sum(links(i,j):overmoney(i)*(x(i,j)-mincap(i)*num(i,j))*time(j))+@s
um(links(i,j):lowcapmoney(i)*num(i,j)*time(j))+@sum(links(i,j):beginmone
y(i)*svar(i,j));  !目标函数

@for(timepiece(j):@sum(elect(i):x(i,j))>=timetotalcap(j));     !约束条件
@for(links(i,j):  mincap(i)*num(i,j)<=x(i,j));                 !约束条件
@for(links(i,j):  maxcap(i)*num(i,j)>=x(i,j));                 !约束条件
@for(timepiece(j):@sum(elect(i):maxcap(i)*num(i,j))>=timetotalcap(j));
                                                               !约束条件

!问题 3
@for(elect(i):svar(i,1)=((num(i,1)-num(i,7))+@abs(num(i,1)-num(i,7)))*0.5);
                                                               !约束条件
@for(elect(i):svar(i,2)=((num(i,2)-num(i,1))+@abs(num(i,2)-num(i,1)))*0.5);
                                                               !约束条件
@for(elect(i):svar(i,3)=((num(i,3)-num(i,2))+@abs(num(i,3)-num(i,2)))*0.5);
                                                               !约束条件
@for(elect(i):svar(i,4)=((num(i,4)-num(i,3))+@abs(num(i,4)-num(i,3)))*0.5);
                                                               !约束条件
@for(elect(i):svar(i,5)=((num(i,5)-num(i,4))+@abs(num(i,5)-num(i,4)))*0.5);
                                                               !约束条件
@for(elect(i):svar(i,6)=((num(i,6)-num(i,5))+@abs(num(i,6)-num(i,5)))*0.5);
                                                               !约束条件
@for(elect(i):svar(i,7)=((num(i,7)-num(i,6))+@abs(num(i,7)-num(i,6)))*0.5);
                                                               !约束条件

@for(links(i,j):@bnd(0,num(i,j),maxnum(i)));!约束条件,@bnd 为取值范围设置操作
@for(links(i,j):@gin(num(i,j)));          !约束条件,@gin 为变量整数设置操作
@for(links(i,j):@gin(svar(i,j)));         !约束条件,@gin 为变量整数设置操作
!@for(links(i,j):@gin(x(i,j)));           !约束条件,@gin 为变量整数设置操作

data:
!常数设置
mincap=750 1000 1200 1800;
maxcap=1750 1500 2000 3500;
maxnum=10 4 8 3;
beginmoney=5000 1600 2400 1200;
overmoney=2.7 2.2 1.8 3.8;
```

```
lowcapmoney=2250 1800 3750 4800;
time=6 3 3 2 4 4 2;
timetotalcap=12000 32000 25000 36000 25000 30000 18000;
enddata
end
```

程序运行结果如下：

```
 Local optimal solution found.
 Objective value:                          1460980.
 Objective bound:                          1460980.
 Infeasibilities:                         0.1091394E-10
 Extended solver steps:                          5
 Total solver iterations:                      1758

                                  Variable           Value
                                MINCAP( 1)        750.0000
                                MINCAP( 2)        1000.000
                                 ……
                                  X( 1, 3)        1500.000
                                  X( 1, 4)        3500.000
                                  X( 1, 5)        1500.000
                                  X( 1, 6)        2600.000
                                  X( 1, 7)        2000.000
                                  X( 2, 1)        6000.000
                                  X( 2, 2)        6000.000
                                  X( 2, 3)        4000.000
                                  X( 2, 4)        6000.000
                                  X( 2, 5)        4000.000
                                  X( 2, 6)        6000.000
                                  X( 2, 7)        6000.000
                                  X( 3, 1)        4000.000
                                  X( 3, 2)        16000.00
                                  X( 3, 3)        15900.00
                                  X( 3, 4)        16000.00
                                  X( 3, 5)        14100.00
                                  X( 3, 6)        16000.00
                                  X( 3, 7)        10000.00
                                  X( 4, 1)        0.000000
                                  X( 4, 2)        6500.000
                                  X( 4, 3)        3600.000
                                  X( 4, 4)        10500.00
                                  X( 4, 5)        5400.000
                                  X( 4, 6)        5400.000
                                  X( 4, 7)        0.000000
```

根据程序的输出结果，我们知道发电站每天的总成本最低为：1 460 980 元。而在各个不同的时段上实际运行的发电机数量见表 16-5。

表 16-5　一天中各个时段运行的不同种类的发电机的数量

类型		型号 1	型号 2	型号 3	型号 4
时段 1	数量	5	4	1	0
	总功率	4000	6000	2000	0
时段 2	数量	5	4	8	3
	总功率	4600	6000	16000	5400
时段 3	数量	5	4	7	1
	总功率	3750	5450	14000	1800

续表

类型		型号 1	型号 2	型号 3	型号 4
时段 4	数量	8	4	8	3
	总功率	8600	6000	16000	5400
时段 5	数量	5	4	7	1
	总功率	3750	5450	14000	1800
时段 6	数量	5	4	7	3
	总功率	4600	6000	14000	5400
时段 7	数量	5	4	4	0
	总功率	4000	6000	8000	0

注，表中数量的单位为：台；总功率的单位为：MW。

第 17 章　大气污染问题

人类生活在大气里，洁净大气是人类赖于生存的必要条件。然而大气却逐渐地被现在的人为行为所污染，主要表现为大气中 SO_2 、 NO_2 和悬浮颗粒物（主要为 PM_{10} ）等的浓度的变换，超出了人的健康所接受的范围，因此研究大气评价模型以及分析城市的空气质量（指 SO_2 、 NO_2 和 PM_{10} 的浓度）与气象参数之间的关系显得尤为重要。本章将以大气中 SO_2 、 NO_2 和 PM_{10} 的浓度为指标，进行灰色关联度计算和神经网络预测等。

学习目标：

（1）学习和掌握动态加权综合评价方法；

（2）掌握灰色关联度分析方法；

（3）掌握 BP 神经网络预测等方法。

17.1　问 题 提 出

大气是指包围在地球外围的空气层，是地球自然环境的重要组成部分之一。人类生活在大气里，洁净大气是人类赖以生存的必要条件。一个人在 5 个星期内不吃饭或 5 天内不喝水，尚能维持生命，但超过 5 分钟不呼吸空气，便会死亡。随着地球上人口的急剧增加，地球上的大气污染日趋严重，其影响也日趋严重，如由于一些有害气体的大量排放，不仅造成局部地区大气的污染，而且影响到全球性的气候变化。因此，加强大气质量的监测和预报是非常必要的。目前对大气质量的监测主要是监测大气中 SO_2 、NO_2 和悬浮颗粒物（主要为 PM_{10} ）等的浓度。

附件 1（见程序文档）给出了城市 A、B、C、D 从 2009 年 6 月 1 日至 2009 年 7 月 25 日测量的污染物含量及城市 A 的气象参数的数据；附件 2 给出了城市 A 从 2009 年 7 月 26 日至 2009 年 7 月 30 日测量的污染物含量及气象参数的数据。请解决下面两个问题：

（1）建立由污染物浓度评价空气质量的数学模型，然后利用附件 1 中的数据对四个城市的空气质量进行排序。

（2）分析城市 A 的空气质量（指 SO_2 、 NO_2 和 PM_{10} 的浓度）与气象参数之间的关系，并利用附件 2（见程序文档）中的数据进行检验。

17.2　摘　　要

本文针对大气污染问题，采用动态加权综合评价方法建立了合理的空气质量评价模型，同时，采用灰色关联度分析方法和 BP 神经网络模型较好地研究了空气质量和气象参数之间的关系。

问题一中，考虑到污染物浓度这一评价指标的“质的差异”和“量的差异”，采用动态加权综合评价方法建立评价模型。首先对评价指标数据进行归一化处理，然后选取偏大型正态分布函数作为动态加权函数建立评价模型，从而对评价指标每天的观测值进行排序，最后用决策分析中的 Borda 数方法对四个城市的空气质量综合排序。得到的最终排序结果为：空气质量最差的是 B 城市，其次是 C 城市，排在第三位的是 D 城市，而 A 城市的空气质量最好。

问题二中，对于空气质量与气象参数关系的问题，采用灰色关联度分析方法和 BP 神经网络模型进行探讨。首先，通过灰色关联度分析确定了大气污染物浓度与气象参数强弱的主次关系，然后针对其复杂非线性关系建立 BP 神经网络预测模型，预测 2009 年 7 月 26 日至 30 日的污染物浓度。最后用实际值对预测值进行了误差分析，结果表明预测值与实际值的误差较小，即 BP 神经网络模型的预测值具有较高的精度。

本章最大的特色是采用了动态加权综合评价方法建立评价模型，增大了评价结果的客观性，比定常加权模型更科学合理。其次，鉴于空气质量与气象参数复杂的非线性关系，建立了 BP 神经网络模型，较好地讨论了大气污染物浓度与气象参数的关系，经过检验分析知此模型是解决非线性问题的有力工具。

关键词：动态加权综合评价、灰色关联度分析、BP 神经网络模型、 MATLAB 。

17.3　基 本 假 设

（1）假设评价空气质量的各指标间相互作用关系忽略不计；
（2）假设空气质量仅与附件 1、2 中的四个气象参数有关；
（3）假设题中数据为每天的统计平均值，能客观反映当天空气污染物浓度的实际情况；
（4）假设在预测模型中，在未来一年没有发生重大自然突变。

17.4　符 号 说 明

符　　号	意　　义	备　　注
x_{ij}	表示第 j 个评价指标的第 i 个观测值的原始值	$(i=1,2,\cdots,55; j=1,2,3)$
x'_{ij}	表示第 j 个评价指标的第 i 个观测值归一后的值	$(i=1,2,\cdots,55; j=1,2,3)$
$w_i(x)$	表示动态加权函数	$(i=1,2,3)$
$X_k(j)$	表示第 k 个评价对象的第 j 个综合评价指标值	$(k=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,N)$
$B_i(u_j)$	表示第 i 个排序方案中排在第 j 个被评价对象后的个数	$(i=1,2,\cdots,55; j=1,2,3,4)$
$\eta_i(k)$	表示第 i 个气象参数对评价指标的第 k 个点的关联系数	$(i=1,2,3,4; k=1,2,\cdots,55)$
r_i	表示第 i 个气象参数与评价指标的关联度	$(i=1,2,3,4)$

17.5　问 题 分 析

大气污染问题愈加严重，加强大气质量的监测和预报十分必要。问题中要求解决两个

问题：一是建立由污染物浓度评价空气质量的数学模型，据此对四个城市的空气质量进行排序；二是需要分析空气质量与气象参数之间的关系，并利用数据检验分析。

针对问题一，查阅国标（GB 3095-1996）规定，环境空气质量标准分为三级。每一等级对每一项指标都有相应的标准值，且同一等级的空气在污染物的含量上也有差别。这种既有“质的差异”又有“量的差异”的问题可采用动态加权评价方法建立评价模型，并利用决策分析中的 Borda 函数方法确定最终的排序方案。

针对问题二，通过观察附件 1、2 中的数据可知，需要利用附件 1 中数据建立预测模型，并用问题二中数据检验分析。故可先利用灰色关联度分析方法讨论四种气象参数分别对三种污染物浓度的影响程度，为了进一步讨论空气质量与气象参数的关系，建立 BP 神经网络预测模型，并利用附件 2 中数据检验分析。

17.6　问　题　一

17.6.1　问题一的分析

问题一要求建立由污染物浓度评价空气质量的数学模型，并对四个城市空气质量进行排序。查阅国标（GB 3095-1996）规定知，环境空气质量标准分为三级，每一个级别对每一项指标都有相应的标准值（相关数据见表 17-1）。也就是说对于每一个评价指标（即 SO_2、NO_2 和 PM_{10} 的浓度），既有同级别的差异，同级别又有不同量值的差异。对于这种既有“质差”，又有“量差”的问题，采用定常加权法显然是不合理的，故合理有效的方法是动态加权综合评价方法。

表 17-1　国标GB 3095-1996 中 3 个主要项目标准限值（单位：mg/m^3）

污染物名称	日平均浓度限值范围		
	一级标准	二级标准	三级标准
SO_2	(0,0.05]	(0.05,0.15]	(0.15,0.25]
NO_2	(0,0.08]	(0,0.08]	(0.08,0.12]
PM_{10}	(0,0.05]	(0.05,0.15]	(0.15,0.25]

17.6.2　问题一模型的建立

1．评价指标的规范化处理

因为评价指标可能有极大型的、极小型的、中间型或区间型四种情况，且可能各有不同的量纲，故需要对不同类型的指标变换成统一的、无量纲的标准化指标。

1）评价指标类型的一致化处理

通过判断可知 SO_2 、 NO_2 和 PM_{10} 的浓度这三类指标均为极小型指标，即总是期望指标的取值越小越好。故在此不需要将指标类型一致化处理。

2）评价指标无量纲化处理

一般来说，数据的无量纲化处理有标准差方法、极值差方法和功效系数方法等。在此，选取极值差方法对三类指标进行标准化处理。处理方法为：

$$x'_{ij}=\frac{x_{ij}-m_j}{M_j-m_j}\ (i=1,2,\cdots,55;j=1,2,3)$$

其中，$M_j=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 55}\{x_{ij}\},m_j=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 55}\{x_{ij}\}(j=1,2,3)$，则 $x'_{ij}\in[0,1]$ 是无量纲的指标观测值。经过此处理我们可以得到评价指标经标准化处理后的三级区间。

2．动态加权函数的确定

根据空气质量问题的实际问题，各项指标 x_i 对综合评价的影响比较符合随着类别 $p_i(i=1,2,3)$ 的增加呈现先缓慢增加，中间快速增长，最后平缓增加趋于最大。于是不妨选取呈正态分布曲线的偏大型正态分布函数作为动态加权函数，即：

$$w_i(x)=\begin{cases}0\ , & \text{当}\,x\leqslant\beta_i\text{时},\\ 1-e^{-\left(\frac{x-\beta_i}{\sigma_i}\right)^2}, & \text{当}\,x>\beta_i\text{时},\end{cases}$$

其中 β_i 在这里取指标 x_i 的第一级浓度标准区间的中值，即 $\beta_i=(b_1^{(i)}-a_1^{(i)})/2$，$\sigma_i$ 由 $w_i(a_3^{(i)})=0.9(1\leqslant i\leqslant 3)$ 确定。

MATLAB 编程如下：

```
clc,clear,close all
x=[0.6,0.67,0.6];
ca=[0.1,0.335,0.1];                  % βi
ca1=x-ca./sqrt((-log(0.1)))         % σ 计算
    ca1 =

   0.5341    0.4492    0.5341
```

由标准化处理后的实际数据经计算可得 $\beta_1=0.1$，$\beta_2=0.335$，$\beta_3=0.1$，$\sigma_1=0.5341$，$\sigma_2=0.4492$，$\sigma_3=0.5341$，则代入上式可以得到 SO_2、NO_2 和 PM_{10} 三项指标的动态加权函数。

3．建立综合评价模型

为了给每次的检测值进行排序，在基于上述模型的同时，取综合评价模型为各评价指标的动态加权和，即：

$$X=\sum_{i=1}^{m}w_i(x_i)\cdot x_i\quad (i=1,2,3)$$

由此综合评价指标函数可以求出每个评价对象的 N 个综合评价指标值 $X_k(j)\ (k=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,N)$，且据此大小排序，可得到 n 个评价对象的 N 个排序方案。

利用决策分析中的 Borda 函数方法来确定综合排序方案。若在第 i 个排序方案中排在第 j 个被评价对象后的个数为 $B_i(u_j)$，令 $B_i(u_j)=n-k$，则被评价对象 u_j 的 Borda 数为：

$$B(u_j)=\sum_{i=1}^{m}B_i(u_j)\ \ (j=1,2,3,4)$$

根据此式的计算结果大小进行排序，便可得到 n 个被评价对象的总排序结果。

综合以上的数据处理、权的求法及排序函数的数学模型，建立以下由污染物浓度评价空气质量的数学模型：

$$
\begin{cases}
x'_{ij}=\dfrac{x_{ij}-m_j}{M_j-m_j},(i=1,2,\cdots,55;j=1,2,3)\\
w_i(x)=\begin{cases}0\ , & 当 x\leqslant\beta_i 时,\\ 1-e^{-\left(\frac{x-\beta_i}{\sigma_i}\right)^2}, & 当 x>\beta_i 时,\end{cases}\\
X=\sum\limits_{i=1}^{m}w_i(x_i)\cdot x_i,\ (i=1,2,3)\\
B(u_j)=\sum\limits_{i=1}^{m}B_i(u_j)\ (j=1,2,3,4)
\end{cases}
$$

17.6.3　问题一模型的求解与分析

1．算法

1）运用极值差法，将数据先归一化化成可比较的[0,1]区间上的数值。

2）根据偏大型正态分布函数，确定三类指标的动态加权函数。

3）i 从 1 开始到 3，k 从 1 到 4，j 从 1 到 55，对 2）得到的新数值矩阵进行加权求和，得到不同的 i 的分数。

4）对分数进行从大到小的排序，得到 4 个评价对象的 55 个排序方案。

5）利用 Borda 函数计算 4 个被评价对象的 Borda 数，并根据 Borda 数从大到小进行排序，得到最终排序结果。

2．求解及分析

运用 MATLAB 软件编程（见附件 1）对各次检测值进行加权求和，得到各综合评价指标值：

```
clc,clear,close all
load('A.mat')
ca=[0.1,0.335,0.1];                                  %中值
ca1=[0.5341  0.4492  0.5341];                        %δ的值
B=[0.2 0.6 1;0.67 0.67 1;0.2 0.6 1];                 %标准分级
a=size(A,1);                                         %A 的行数
b=size(A,2);                                         %A 的列数
MX=max(A);                                           %A 的每列的最大值
MN=min(A);                                           %A 的每列的最小值
f1=1;                                                %B 的行变量
f2=1;                                                %B 的列变量
for j=1:b                                            %将 A 里面的值标准化
    for i=1:a
        A(i,j)=(A(i,j)-MN(j))/(MX(j)-MN(j));
    end
end
```

```
X=zeros(a,4);                    %建立放置每个城市每天空气质量的值矩阵
for i=1:a                        %计算每个城市每天的空气质量
    h=1;
    k=1;
    flag0=1;                     %算完每个城市每天的空气质量后，跳到下一个城市
(h=h+1)
    for j=1:b
        for flag=1:3
            if A(i,j)<=ca(k)
              w=0;
              X(i,h)=X(i,h);
              break;
            elseif A(i,j)>ca(k)&&A(i,j)<B(f1,f2)
                w=1-exp(-(A(i,j)-ca(k)/ca1(k))^2);
                X(i,h)=X(i,h)+w*A(i,j);%加权
                break;
            else
                k=k+1;           %对应每个中值
                f2=f2+1;         %对应每个等级值
            end
        end
        f1=f1+1;                 %对应每个属性
        k=1;                     %每循环完一次，跳到第一个中值
        f2=1;                    %每循环完一次，又从第一级开始
        if flag0==3              %判断是否算完了一个城市每天的空气质量
            h=h+1;
            flag0=1;
            f1=1;
        else
        flag0=flag0+1;
        end
    end
end
```

部分结果如表 17-2 所示。

表 17-2　四个城市的综合评价指标值

	A	*B*	*C*	*D*
2009/6/1	0.03403	0.00064	0.09808	0.34854
2009/6/2	0.00276	0.10305	0.23795	0.23921
2009/6/3	0.00039	0.00020	0.05998	0.06132
2009/6/4	0.05217	0.12363	0.24007	0.66614
……	……	……	……	……
2009/7/24	0.00503	0.01414	0.00664	0.01162
2009/7/25	0.00039	0.01734	0.00652	0.00379

根据表 17-2 的结果进行排序得到 55 个排序方案后，利用 Borda 函数编程计算可得 *A*、*B*、*C*、*D* 的 Borda 数及总排序结果。

```
a=size(X,1);               %X 的行数
```

```
b=size(X,2);            %X 的列数
h=1;
C=zeros(1,b);           %建立总体排序矩阵
for k=1:b%将所有城市总体排序
    for i=1:a
        for j=1:b
            if(A(h)>A(i,j))
                C(k)= C(k)+1;
            else
            end
        end
        h=h+1;
    end
end
```

得到 C 矩阵（Borda 数）如下：

```
>> C
C =
    68    92    89    81
```

整理结果如表 17-3 所示。

表 17-3　按各城市空气污染物浓度总排序结果

	A	B	C	D
Borda 数	68	92	89	81
总排序	4	1	2	3

由表 17-3 知四个城市的空气污染物浓度排序为：$B>C>D>A$，可见空气污染最严重的是 B 城市，其次是 C 城市，排在第三位的是 D 城市，而空气质量最好的是 A 城市。

17.7　问　题　二

17.7.1　问题二的分析

问题二要求解决以下两个问题：一是分析城市 A 的空气质量与气象参数之间的关系，二是利用附件 2 中的数据进行检验分析。

根据常识，大气污染物与气象条件有着紧密联系，特别是风速对其影响非常明显，而大气压、温度、湿度对大气污染物浓度的影响并不明确。故可以通过灰色关联分析方法分析大气污染物 SO_2 、 NO_2 和 PM_{10} 的浓度与气象参数之间的强弱主次关系。

通过观察附件 1 和附件 2 中数据的关系，可知需要建立空气质量与气象参数相关的预测模型。而空气质量与气象参数之间存在着复杂的非线性关系，对于非线性关系研究，可以通过神经网络模型，二次多项式逼近等方法解决。故在此刻建立 BP 神经网络预测模型，并利用附件 2 中数据对预测值进行检验分析。

17.7.2　问题二模型的建立

1. 灰色关联分析方法模型的建立

灰色关联度分析法是灰色系统理论中一种定量描述因素间发展势态的相似或相异程度的量化比较方法。它的基本思想是根据序列曲线几何形状的相似程度来判断其联系是否紧密。一般地，曲线越接近，相应序列之间的关联度就越大，反之就越小。灰色关联度分析法的步骤与模型如下。

1）分别选取大气污染物 SO_2 、NO_2 和 PM_{10} 的日平均浓度数列为参考数列，气象参数数列为比较数列，其中参考数列记为 $x_0(k)$ ，比较数列记为 $x_i(k)$ 。

2）由于气象参数数列中变量的量纲不同，为消除量纲对分析结果的影响，需要进行无量纲化处理。常用的有标准化、初始化、极差法和最大值化等，在此也选用极差法进行处理，如下：

$$令\ x'_{ij}=\frac{x_{ij}-m_j}{M_j-m_j}\quad (i=1,2,\cdots,55;\ j=1,2,3,4)$$

其中 $M_j=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 55}\{x_{ij}\},m_j=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 55}\{x_{ij}\}(j=1,2,3)$ ，则 $x'_{ij}\in[0,1]$ 是无量纲的指标观测值。

3）计算关联度系数，公式为：

$$\eta_i(k)=\frac{\min\limits_i\min\limits_k|x_i(k)-x_0(k)|+\rho\max\limits_i\max\limits_k|x_i(k)-x_0(k)|}{|x_i(k)-x_0(k)|+\rho\max\limits_i\max\limits_k|x_i(k)-x_0(k)|}$$

其中，$|x_i(k)-x_0(k)|$ 为 $x_0(k)$ 和 $x_i(k)$ 第 k 个点的绝对误差； $\min\limits_i\min\limits_k|x_i(k)-x_0(k)|$ 为两级最小差； ρ 为分辨率， $0<\rho<1$ ，一般取 $\rho=0.5$ ； ρ 越大，分辨率越小， ρ 越小，分辨率越大。

4）计算关联度，其公式为：

$$r_i=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_i(k)$$

其中， r_i 即为 x_i 对 x_0 的关联度。

2. BP神经网络进行预测模型的建立

通过上述灰色关联度分析，明确了大气污染物 SO_2 、 NO_2 和 PM_{10} 的浓度与气象参数之间的强弱主次关系。但是大气污染物浓度与气象参数存在复杂的非线性关系，故在此建立 BP 神经网络模型进一步研究。

本章采用的是多层感知器的误差反向传播算法（Error Back Proragation），即 BP 算法。其基本思想是，学习过程由信号的正向传播与误差的反向传播两个过程组成。正向传播时，输入样本从输入层传入，经各隐层逐层处理后，传向输出层。若输出层的实际输出与期望的输出不符，则转入误差的反向传输阶段。误差反传是将输出误差以某种形式通过隐层向输入层逐层反传，并将误差分摊给各层的所有单元，从而获得各层单元的误差信号，该误差信号即作为修正各单元权值的依据。信号正向传播与误差反向传播的各层权值的调整是反复进行的，直至网络输出的误差减少到可接受的程度，或是进行到预先设定的学习次数，

结构图如图 17-1 所示。

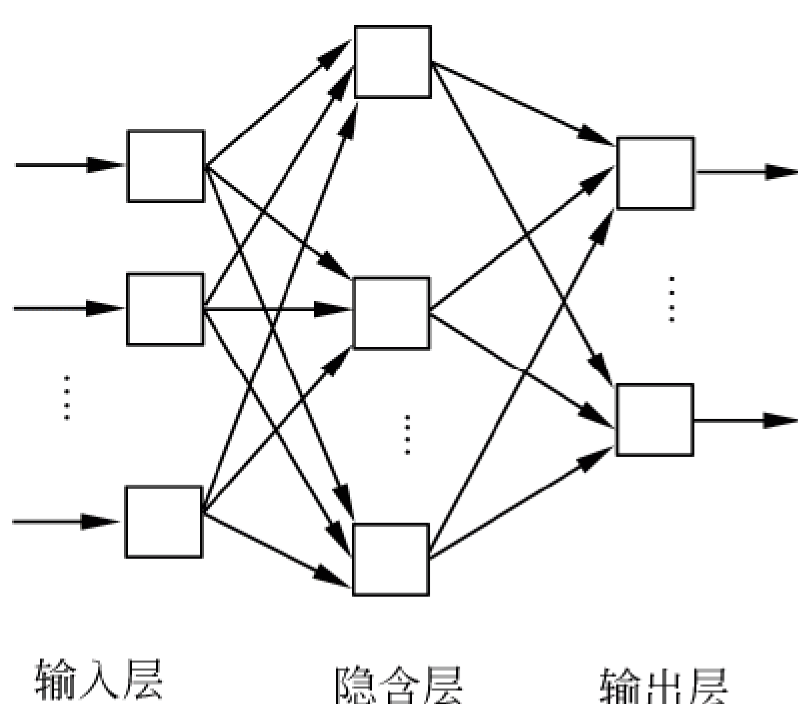


图 17-1　BP 网络结构图

符号说明：

$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$　　输入变量向量组（四个变量）

$Y=(y_1,y_2,\ldots y_i,\ldots y_m)^T$　　隐层输出变量（m 为隐变量个数）向量组

$H=(h_1,h_2,h_3)^T$　　输出层输出向量组（大气污染物浓度指标）

$D=(d_1,d_2,d_3)^T$　　期望输出向量组（为常向量组）

$W=(w_1,w_2,\ldots w_i,\ldots w_m)^T$　　输入层到隐层之间的权值矩阵

$V=(v_1,v_2,v_3)^T$　　隐层到输出层之间的权值矩阵

$\eta\in(0,1)$　　比例常数，表示学习速率

用 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$ 表示四个气象参数变量（大气压、温度、湿度和风速），隐层输出变量设为 7 个，用 $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7)^T$ 表示，输出层输出向量（大气污染物浓度）用 $H=(h_1,h_2,h_3)^T$ 表示，而期望输出为常向量 $D=(d_1,d_2,d_3)^T$ 。

根据 BP 神经网络原理，对于输出层，有：

$$h_k=f(net_k)\qquad k=1,2,3$$

$$net_k=\sum_{j=1}^{m}v_{jk}y_j\qquad k=1,2,3$$

对于隐层，有：

$$y_j=f(net_j)\qquad j=1,2\ldots m$$

$$net_j=\sum_{i=1}^{m6}w_{ij}x_i\qquad j=1,2\ldots m$$

其中：

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

17.7.3　问题二模型的求解

灰色关联度分析模型求解

首先，将 $\rho=0.5$ 代入公式，用 MATLAB 编程可计算得到大气污染物 SO_2 、NO_2 和 PM_{10}

浓度与各气象要素的关联系数。

MATLAB 编程如下：

```
clc,clear,close all
load('A1.mat')
A=A1;              % 赋值
%级差法进行量纲化
a=size(A,1);       % 矩阵行
b=size(A,2);       % 矩阵列
MX=max(A);         % 最大值
MN=min(A);         % 最小值
f1=1;
f2=1;
for j=1:b
    for i=1:a
        A(i,j)=(A(i,j)-MN(j))/(MX(j)-MN(j));   % 归一化处理
    end
end
%计算关联度系数
A1=[A(:,1) A(:,1) A(:,1) A(:,1)];
SO2=abs(A(:,4:7)-A1);          % SO2 关联度计算
A1=[A(:,2) A(:,2) A(:,2) A(:,2)];
NO2=abs(A(:,4:7)-A1);          % NO2 关联度计算
A1=[A(:,3) A(:,3) A(:,3) A(:,3)];
PH=abs(A(:,4:7)-A1);           % PH 关联度计算
p=0.5;                                                                  %分辨率

MX=max(SO2);       % 最大值
MX=max(MX);        % 最大值
MN=min(SO2);       % 最小值
MN=min(MN);        % 最小值
SO2=(MN.*ones(55,4)+p*MX.*ones(55,4))./(SO2+p*MX.*ones(55,4))   %关联系数
SO21=sum(SO2,1)./55;                                            % 关联度

MX=max(NO2);       % 最大值
MX=max(MX);        % 最大值
MN=min(NO2);       % 最小值
MN=min(MN);        % 最小值
NO2=(MN.*ones(55,4)+p*MX.*ones(55,4))./(NO2+p*MX.*ones(55,4))   %关联系数
NO21=sum(NO2,1)./55;                                            %关联度

MX=max(PH);        % 最大值
MX=max(MX);        % 最大值
MN=min(PH);        % 最小值
MN=min(MN);        % 最小值
PH=(MN.*ones(55,4)+p*MX.*ones(55,4))./(PH+p*MX.*ones(55,4))     %关联系数
PH1=sum(PH,1)./55;                                              %关联度
result=[SO21;NO21;PH1]
result =

    0.6218    0.7056    0.6398    0.6651
    0.6491    0.7010    0.6629    0.6311
    0.6265    0.6990    0.6703    0.6997
```

部分结果如表 17-4 所示。

表 17-4　大气污染物与各个气象参数的关联系数

	SO_2				NO_2				PM_{10}			
	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}
$\eta(1)$	0.75393	0.77474	0.64815	0.58368	0.92497	0.96051	0.52839	0.65986	0.76856	0.74699	0.44973	0.90936
$\eta(2)$	0.92832	0.69518	0.73009	0.75471	0.94925	0.74431	0.64038	0.82228	0.89968	0.7922	0.62947	0.87515
$\eta(3)$	0.45359	0.64119	0.87792	0.4984	0.49135	0.7628	0.67973	0.55168	0.43381	0.61536	0.90056	0.47706
$\eta(4)$	0.71248	0.95544	0.6274	0.68124	0.96975	0.67935	0.47929	0.51415	0.68116	0.99459	0.63195	0.68985
……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
$\eta(54)$	0.53203	0.45412	0.5764	0.53078	0.74529	0.58693	0.84796	0.74255	0.55428	0.4664	0.60548	0.55286
$\eta(55)$	0.38271	0.61289	0.46498	0.42054	0.43893	0.84996	0.56843	0.49643	0.38904	0.65111	0.48007	0.43055

然后计算得大气污染物 SO_2、NO_2 和 PM_{10} 浓度与各气象要素的关联度，如表 17-5 所示。

表 17-5　大气污染物浓度与各气象参数的关联度

	X_1	X_2	X_3	X_4
$r(SO_2)$	0.62183	0.70560	0.63975	0.66509
$r(NO_2)$	0.64906	0.70104	0.66289	0.63107
$r(PM_{10})$	0.62654	0.69898	0.67028	0.69972

对表 17-5 中的数据分析如下。

影响 SO_2 浓度的气象参数排序为：

温度>风速>湿度>大气压

影响 NO_2 浓度的气象参数排序为：

温度>湿度>大气压>风速

影响 PM_{10} 浓度的气象参数排序为：

风速>温度>湿度>大气压

综上可知，四种气象参数对大气污染物 SO_2、NO_2 和 PM_{10} 浓度的影响程度不同，其中对 SO_2 和 NO_2 影响程度最大的是温度，而风速则是影响 PM_{10} 浓度的主要因子。

17.7.4　BP 神经网络模型求解

1．算法

Step1：初始化。对权值矩阵 W 和 V 赋随机数，将样本模式计数器 P 和训练次数计数 q 置为 1，误差 E 置 0，学习率 η 设为 0~1 内的小数，网络训练后达到的精度 E_{min} 设为一个正的小数。

Step2：输入训练样本对，计算各层输出。用当前样本对向量数组 X 和 D 赋值，并计算 Y 和 H 各分量。

Step3：计算网络输出误差。共有 6 对训练样本，网络对于第 i 个样本具有误差。

$$E^i = \sqrt{\sum_{k=1}^{4}(d_k{}^p - h_k{}^p)^2}$$

总输出误差（均方根误差）为：

$$E_{RME} = \sqrt{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(E^i)^2}$$

Step4：计算各层误差信号。

$$\delta_k{}^o = -\frac{\partial E}{\partial net_k} = -\frac{\partial E}{\partial h_k}\frac{\partial h_k}{\partial net_k} = (d_k - h_k)h_k(1-h_k)$$

$$\delta_j{}^y = -\frac{\partial E}{\partial net_j} = -\frac{\partial E}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial net_j} = \sum_{k=1}^{4}\delta_k{}^o v_{jk} y_j(1-y_j)$$

Step5：调整各层权值。权值调整量为：

$$\Delta w_{jk} = -\eta\frac{\partial E}{\partial w_{jk}} \quad j=1,2\ldots,4;\ k=1,2,\cdots,m$$

$$\Delta v_{jk} = -\eta\frac{\partial E}{\partial v_{jk}} \quad j=1,2\ldots m;\ k=1,2,3$$

Step:6：检查是否对所有样本完成一次轮训。若 $p<4$，计数器 p,q 加 1，返回 Step2，否则进行下一步。

Step7：检查网络总误差是否达到精度要求。若 $E_{RME} < E_{\min}$，训练结束，否则 E 置 0，p 置 1，返回 Step2。

2. 结果

使用 MATLAB 编程计算：

```
clc,clear,close all
load('P.mat')   % 加载数据
%输出变量
load('T.mat')   % 加载数据
%创建一个 BP 神经网络，每一个输入向量的取值范围为[0 ,1]，隐含层有 7 个神经
%元，输出层有一个 3 神经元，隐含层的激活函数为 tansig，输出层的激活函数为
%purelin，训练函数为 trainc 函数
net=newff([0 700;0 30;0 20;0 2],[7,3],{'tansig','purelin'},'trainbr');
net.trainParam.epochs=100;          %设置训练次数
net.trainParam.goal=0.0001;         %设置训练预测误差终止条件
%设置学习速率为 0.1
LP.lr=0.1;                 % 学习率
net=train(net,P,T);        % 训练网络
P1=[
670.31  665.35  668.56  667.21  676.68
22.521  22  18.93   20.488  22.5
44.208  57.917  72.233  72.65   63.682
1.25    1.542   1   0.932   1.591
];                   % 预测参数
T1=[
0.031   0.021   0.025   0.024   0.026
0.037   0.022   0.034   0.035   0.033
0.047   0.03    0.034   0.035   0.081
];                   % 实际值
```

```
T test=sim(net,P1);  % 预测值
T test
T1
```

训练后的神经网络模拟的指标与实际数据几乎完全吻合，最终得到的 SO_2、NO_2 和 PM_{10} 浓度预测值如表 17-6 所示。

表 17-6　大气污染物浓度预测值

	SO_2	NO_2	PM_{10}
2009/7/26	0.0346	0.027922	0.065657
2009/7/27	0.032385	0.028886	0.063906
2009/7/28	0.027693	0.025716	0.057313
2009/7/29	0.030456	0.028572	0.061749
2009/7/30	0.032595	0.029826	0.064669

17.7.5　问题二结果的分析及验证

由于通过神经网络模型预测出了 2009 年 7 月 26 日至 2009 年 7 月 30 日的大气污染物浓度，故可通过附件 2 中这五天的实际值进行检验分析。实际值与预测值对比如表 17-7～表 17-9 所示。

表 17-7　SO_2 浓度实际值与预测值的统计比较结果

	实际值	预测值	绝对误差
2009/7/26	0.031	0.0346	0.0035999
2009/7/27	0.021	0.032385	0.011385
2009/7/28	0.025	0.027693	0.0026929
2009/7/29	0.024	0.030456	0.0064557
2009/7/30	0.026	0.032595	0.0065946

表 17-8　NO_2 浓度实际值与预测值的统计比较结果

	实际值	预测值	绝对误差
2009/7/26	0.037	0.027922	-0.009078
2009/7/27	0.022	0.028886	0.0068861
2009/7/28	0.034	0.025716	-0.0082842
2009/7/29	0.035	0.028572	-0.006428
2009/7/30	0.033	0.029826	-0.0031743

表 17-9　PM_{10} 浓度实际值与预测值的统计比较结果

	实际值	预测值	绝对误差
2009/7/26	0.047	0.065657	0.018657
2009/7/27	0.03	0.063906	0.033906
2009/7/28	0.034	0.057313	0.023313
2009/7/29	0.035	0.061749	0.026749
2009/7/30	0.081	0.064669	-0.016331

由上述所得的绝对误差，用 MATLAB 编程绘制出误差曲线，程序如下：

```
%预测值与实际值的误差
for j=1:3
    for i=1:5
       error(j,i)=T test(j,i)-T1(j,i);  % 误差
    end
end
error
%绘制误差图
plot(1:5,error(1,:),'-*');   % 画图
hold on;                % 在同一个图形句柄下画图
plot(1:5,error(2,:),'-+');   % 画图
hold on;                % 在同一个图形句柄下画图
plot(1:5,error(3,:),'-h');   % 画图
hold on;                % 在同一个图形句柄下画图
```

运行程序输出结果如图 17-2 所示。

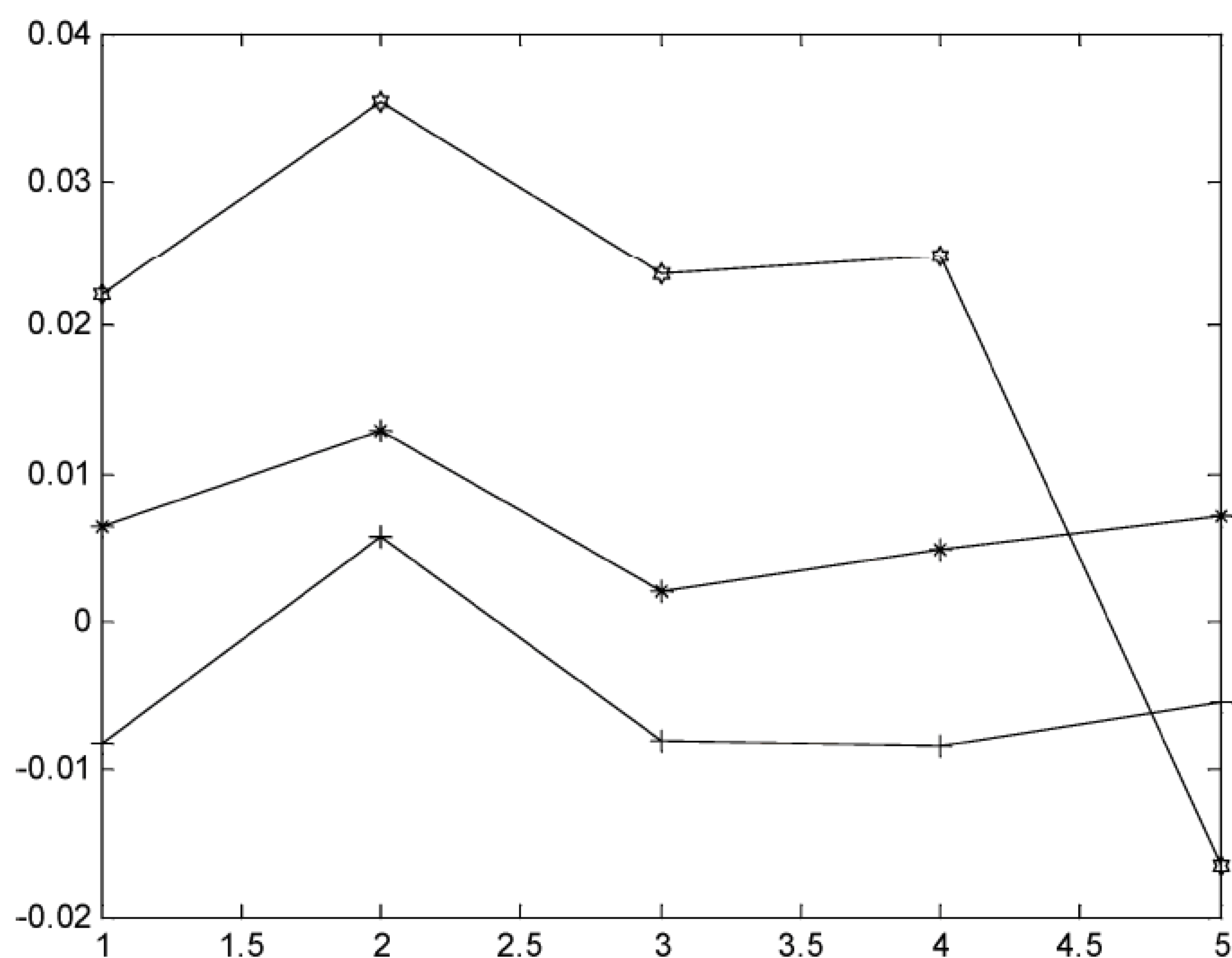


图 17-2　误差曲线图

从图 17-2 中可见 5 天内 SO_2 、 NO_2 和 PM_{10} 浓度的预测值与实际值的绝对误差波动不大，通过计算得 SO_2 浓度的平均绝对误差为 0.0061， NO_2 浓度的平均绝对误差为−0.004， PM_{10} 浓度的平均绝对误差为 0.017。故 BP 神经网络模型预测值的误差较小，且波动相对稳定，预测效果理想。而通过图中残差平方和 SSE 、T 检验值及组内均差平方和 SSW 判断可知此模型的拟合优度较高，预测精度较高。

17.8　模型的评价与推广

17.8.1　模型的评价

问题一中，考虑到大气污染物浓度这一评价指标的“质差”和“量差”的关系，采用

了动态加权综合评价的方法建立模型，最后利用 Borda 函数得到了四个城市空气质量的总排序。这一模型不仅充分考虑到了每一因素每一属性的所有“差异”的影响和作用，使得评价结果科学合理；而且增加了综合评价的客观性，与定常加权法相比大大淡化了评价人主观因素的影响。

问题二中，灰色关联度分析模型清晰明了地反映了大气污染物 SO_2 、 NO_2 和 PM_{10} 的浓度与气象参数之间的强弱主次关系。而 BP 神经网络预测模型则更进一步对污染物浓度与气象参数间复杂的非线性关系进行了研究，用实际值对预测值检验分析后知该模型精度较高，预测结果理想。但是，BP 神经网络模型也存在一定的缺点：隐层节点数需要经过多次尝试，学习速度慢，易于陷入局部极小点。

17.8.2　模型的推广

问题一中的动态加权综合评价模型不仅可以科学地评价空气质量问题，还可以推广到水质评价问题及经济、军事等领域的许多综合评价问题，具有广泛的应用价值。

问题二中的 BP 神经网络模型是目前最为广泛应用的神经网络模型之一，在气象预报中得到了广泛应用。该模型是一种解决非线性问题的有力工具，可以推广其他领域的应用。但由于 BP 神经网络模型自身的局限性，在实际应用中需要进行一定的改进和修正，本章中的 BP 神经网络模型若进行改进效果会更好。

第 3 篇　数学建模分析与提高

第 18 章　交巡警服务平台的设置与调度问题

"有困难找警察"是家喻户晓的一句流行语。本章以某地方交通网络图为例，进行网络优化平台设置，主要针对交巡警平台进行设计，从而达到合理的调度各处的交巡警，使得各处的交巡警工作量尽可能的相当，并且执行任务相应的更快，从而提高执行效率。

学习目标：

（1）学习和掌握图论处理方法；

（2）掌握 MATLAB 求解交巡警服务平台设置问题等；

（3）掌握 LINGO 优化设置平台点位置问题等；

（4）学习和掌握优化设计交巡警服务网络平台设置。

18.1　问 题 提 出

警察肩负着刑事执法、治安管理、交通管理和服务群众四大职能。为了更有效地贯彻实施这些职能，需要在市区的一些交通要道和重要部位设置交巡警服务平台。每个交巡警服务平台的职能和警力配备基本相同。由于警务资源是有限的，如何根据城市的实际情况与需求合理地设置交巡警服务平台、分配各平台的管辖范围及调度警务资源是警务部门面临的一个实际课题。

试就某市设置交巡警服务平台的相关情况，建立数学模型分析研究下面的问题：

（1）程序文档中附件 1 中的附图 1 给出了该市中心城区 A 的交通网络和现有的 20 个交巡警服务平台的设置情况示意图，相关的数据信息见程序文档中的附件 2。请为各交巡警服务平台分配管辖范围，使其在所管辖的范围内出现突发事件时，尽量能在 3 分钟内有交巡警（警车的时速为 60km/h）到达事发地。

对于重大突发事件，需要调度全区 20 个交巡警服务平台的警力资源，对进出该区的 13 条交通要道实现快速全封锁。实际中一个平台的警力最多封锁一个节点，请给出该区交巡警服务平台警力合理的调度方案。

根据现有交巡警服务平台的工作量不均衡和有些地方出警时间过长的实际情况，拟在该区内再增加 2～5 个平台，请确定需要增加平台的具体个数和位置。

（2）针对全市（主城六区 A、B、C、D、E 和 F）的具体情况，按照设置交巡警服务平台的原则和任务，分析研究该市现有交巡警服务平台设置方案（参见附件 1、2，见程序文档）的合理性。如果有明显不合理，请给出解决方案。

18.2　摘　　要

本文研究了交巡警服务平台的设置与调度问题。

问题一中，要求在 A 区现有的 20 个交巡警服务平台的基础上，建立一种数学模型，通过对模型的求解得出一种最优调度。根据实际情况，我们首先需要对数据进行处理，利用 Floyd 算法，借助 MATLAB 软件对其进行求解，求出 20 个交巡警服务平台到各节点的实际距离。然后建立优化模型，找出目标函数，并找出其相应的约束条件，借助 LINGO 对其进行求解，得出结论。

特别对于问题一的求解，很明显有些节点到所有的交巡警服务平台的距离都不会小于 3km，所以很显然不能满足每个地方发生突发事件时都会有交巡警在 3 分钟内到达，本章考虑到交巡警平台的重新铺设，将 20 个交巡警平台重新在网络中铺设，得到最优结果。对于增设平台数，增设平台后，各交巡警平台最大的得分为 3.4529，而最小的为 2.7016，很明显之间的差距缩小了，可以看出增加平台是有必要的也是有效的。

对于问题二，针对全市（主城六区 A、B、C、D、E 和 F）的具体情况，按照设置交巡警服务平台的原则和任务，分析研究该市现有交巡警服务平台设置方案，首先先建立模型确定 B 区 8 个平台的管辖范围，以各交巡警平台的工作量和人口密度为指标进行打分，可求得 C、D、E 和 F 区的得分情况。针对于不平衡这个问题我们仅从增加平台的角度考虑，没有考虑原有平台的移动，而解决不平衡的问题可以考虑在不增加平台数量的基础上将现有平台进行移动来实现。本章针对移动和不移动以及增设平台问题给出了求解模型以及 LINGO 求解程序，可有效解决各交巡警平台设置问题。

关键词：目标规划、LINGO、Flod 算法、交巡警平台、优化设计。

18.3　基 本 假 设

（1）车辆只能沿着街道跑；
（2）交巡警接到紧急事件不考虑其反应时间；
（3）交通要道被封锁时任何车辆都不能通过，交巡警除外；
（4）逃犯的逃跑速度与交巡警的车速大致相等；
（5）每个区的交巡警只能在本区内巡逻；
（6）忽略自然灾害等突发事件对发案率的影响。

18.4　符 号 说 明

符　　号	意　　义
L_{ij}	第 i,j 节点的的最短距离
A_0	A_0 是 0-1 矩阵
x_{ij}	x_{ij} 是 0-1 变量
f_j	是 j 节点的发案率

18.5　问　题　一

将各点的编号标注在图中，如图 18-1 所示。

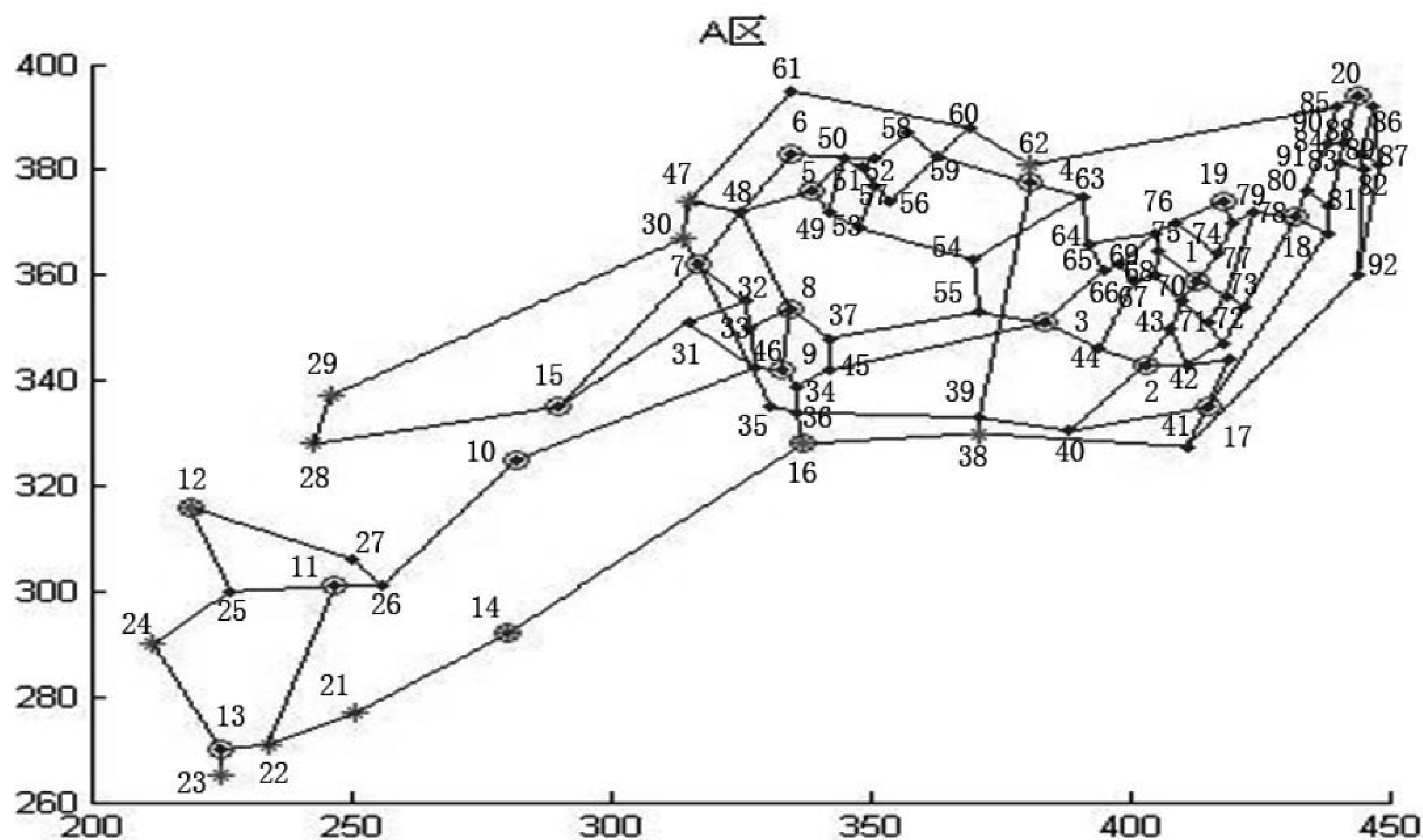


图 18-1　A 区

问题一中，要求在 A 区现有的 20 个交巡警服务平台的基础上，建立一种数学模型，通过对模型的求解得出一种最优调度。根据实际情况，我们首先需要对数据进行处理，利用 Floyd 算法，借助 MATLAB 软件对其进行求解，求出 20 个交巡警服务平台到各节点的实际距离。然后建立优化模型，找出目标函数，并找出其相应的约束条件，借助 Lingo 对其进行求解，得出结论。

在 A 区现有的 20 个交巡警服务平台的基础上，建立一种数学模型，通过对模型的求解得出一种最优调度。根据实际情况，交巡警服务平台并不是与每个节点都是直接相连的，所以我们首先需要对数据进行处理，找出各交巡警服务平台到各节点的实际最短路程，并利用 Flod 算法，借助 MATLAB 软件对其进行求解。然后通过分析，建立优化模型，以所有节点到其所受管辖的交巡警服务平台的途径的最小值为目标函数，并结合实际找出所有的约束条件，借助 Lingo 对其进行求解，找出各个交巡警服务平台所管辖的节点。

18.5.1　模型一数据的处理

由于实际距离的单位和坐标单位不统一，所以我们必须对数据进行标准化，将实际距离化为与坐标单位相统一的单位，即将 m 化为 mm，所以题中所说的尽量能在 3 分钟内有交巡警（警车的时速为 60km/h）到达事发地，也就是说两地的坐标距离要尽量的小于等于 30 毫米。

考虑到路径的实际情况，即交巡警服务平台与各节点的最短路程并不是两点之间的距离，所以为了模型的建立必须对数据进行处理，利用 Flod 算法求解出它们之间的实际最短路程。

Flod 算法如下。

Step1：构造 0-1 矩阵为 A_0：

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

来存放各个节点之间的关系，其中，

$a_{ij}=0$ 表示 i,j 两个节点之间没有直接相连；

$a_{ij}=1$ 表示 i,j 两个节点之间直接相连。

Step2：递推产生一个矩阵序列 $A_0, A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n$，其中 $A_k(i,j)$ 表示从顶点 v_i 到顶点 v_j 的路径上所经过的顶点序号不大于 k 的最短路径长度。

计算时用迭代公式：

$$A_k(i,j) = \min(A_{k-1}(i,j), A_{k-1}(i,k) + A_{k-1}(k,j))$$

k 是迭代次数，$i,j,k = 1,2,\cdots,n$。

最后，当 $k=n$ 时，A_n 即是各顶点之间的最短通路值。

Flod 计算结果：

通过 MATLAB 编程求解得出 20 个交巡警服务平台到各个节点实际最短距离的途径如表 18-1 所示。

```
Clear                    % 清除工作区变量
x=zeros(92,92);          % 初始化
x(1,75)=1;x(1,78)=1;x(2,44)=1;x(3,45)=1;x(3,65)=1;x(4,39)=1;x(4,63)=1;x
(5,49)=1;
x(5,50)=1;x(6,59)=1;x(7,32)=1;x(7,47)=1;x(8,9)=1;x(8,47)=1;x(9,35)=1;x(
10,34)=1;x(11,22)=1;x(11,26)=1;
x(12,25)=1;x(14,21)=1;x(15,7)=1;x(15,31)=1;x(16,14)=1;x(16,38)=1;
x(17,40)=1;x(17,42)=1;x(17,81)=1;x(18,81)=1;x(18,83)=1;
x(19,79)=1;x(20,86)=1;x(21,22)=1;x(22,13)=1;x(23,13)=1;x(24,13)=1;x(24,
25)=1;
x(25,11)=1;x(26,27)=1;x(26,10)=1;x(27,12)=1;x(28,29)=1;x(28,15)=1;x(29,
30)=1;
x(30,7)=1;x(30,48)=1;x(31,32)=1;x(31,34)=1;x(32,33)=1;x(33,34)=1;x(33,8
)=1;x(34,9)=1;
x(35,45)=1;x(36,35)=1;x(36,37)=1;x(36,16)=1;x(36,39)=1;x(37,7)=1;x(38,3
9)=1;
x(38,41)=1;x(39,40)=1;x(40,2)=1;x(41,17)=1;x(41,92)=1;x(42,43)=1;x(43,2
)=1;x(43,72)=1;
x(44,3)=1;x(45,46)=1;x(46,8)=1;x(46,55)=1;x(47,48)=1;x(47,6)=1;x(47,5)=
1;x(48,61)=1;
x(49,50)=1;x(49,53)=1;x(50,51)=1;x(51,52)=1;x(51,59)=1;x(52,56)=1;x(53,
52)=1;x(53,54)=1;
x(54,55)=1;x(54,63)=1;x(55,3)=1;x(56,57)=1;x(57,58)=1;x(57,60)=1;x(57,4
)=1;
x(58,59)=1;x(60,62)=1;x(61,60)=1;x(62,4)=1;x(62,85)=1;x(63,64)=1;x(64,6
5)=1;x(64,76)=1;
x(65,66)=1;x(66,67)=1;x(66,76)=1;x(67,44)=1;x(67,68)=1;x(68,69)=1;x(68,
75)=1;x(69,70)=1;
x(69,71)=1;x(69,1)=1;x(70,2)=1;x(70,43)=1;x(71,72)=1;x(71,74)=1;x(72,73
)=1;
x(73,74)=1;x(73,18)=1;x(74,1)=1;x(74,80)=1;x(75,76)=1;x(76,77)=1;x(77,7
8)=1;
```

```
x(77,19)=1;x(78,79)=1;x(79,80)=1;x(80,18)=1;x(81,82)=1;x(82,83)=1;x(82,
90)=1;x(83,84)=1;
x(84,85)=1;x(85,20)=1;x(86,87)=1;x(86,88)=1;x(87,88)=1;x(87,92)=1;x(88,
89)=1;
x(88,91)=1;x(89,20)=1;x(89,84)=1;x(89,90)=1;x(90,91)=1;x(91,92)=1;     %
构建网络
x1=x';       % 转置
x2=x1+x;     % 叠加
x3=[413 403 383.5  381 339 335 317 334.5  333 282 247 219 225 280 290 337
415 432 418 444 251 234 225 212 227 256 250.5  243 246 314 315 326 327 328
336 336 331 371 371 388.5  411 419 411 394 342 342 325 315 342 345 348.5
351 348 370 371 354 363 357 351 369 335 381 391 392 395 398 401 405 410 408
415 418 422 418.5  405.5  405 409 417 420 424 438 438.5  434 438 440 447
448 444.5  441 440.5  445 444
359 343 351 377.5  376 383 362 353.5  342 325 301 316 270 292 335 328 335
371 374 394 277 271 265 290 300 301 306 328 337 367 351 355 350 342.5  339
334 335 330 333 330.5  327.5  344 343 346 342 348 372 374 372 382 380.5
377 369 363 353 374 382.5  387 382 388 395 381 375 366 361 362 359 360 355
350 351 347 354 356 364.5  368 370 364 370 372 368 373 376 385 392 392 381
383 385 381.5  380 360];
n=length(x3);   % 长度
x4(n,n)=0;      % 初始化
for i=1:n
   for j=i:(n-1)
        x4(i,j+1)=sqrt((x3(1,j+1)-x3(1,i)).^2+(x3(2,j+1)-x3(2,i)).^2);
% 求距离
   end
end
x5=x4';         % 转置
x6=x5+x4;       % 转置后叠加
x7=x6.*x2;      % 点乘
for i=1:n
   for j=1:n
if x7(i,j)==0
        x7(i,j)=99999;   % 距离等于 0，表示网络中节点之间不相连，则距离无穷大
end
end
end
for i=1:n
    if x7(i,i)==99999;
       x7(i,i)=0;   % 自身到自身节点距离等于 0
end
end
n=length(x7);
path=zeros(n);
for k=1:n
   for i=1:n
      for j=1:n
         if x7(i,j)>x7(i,k)+x7(k,j)
            x7(i,j)=x7(i,k)+x7(k,j);  % 最短距离
            path(i,j)=k;              % 路径
         end
      end
   end
end
```

整理如表 18-1 所示。

表 18-1　最短距离途径

	1	2	3	• • •	90	91	92
1	0	70	69	• • •	83	90	91
2	70	0	44	• • •	83	90	43
3	69	44	0	• • •	83	90	44
• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •
18	80	73	80	• • •	83	90	91
19	79	79	77	• • •	83	90	91
20	85	85	85	• • •	89	88	91

同时也给出了实际最短距离，如表 18-2 所示。

表 18-2　实际最短距离

	1	2	3	• • •	90	91	92
1	0	18.987	38.839	• • •	45.171	49.915	69.94
2	18.987	0	21.117	• • •	63.373	68.117	80.728
3	38.839	21.117	0	• • •	78.475	83.218	101.84
• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •
18	25.646	43.848	58.949	• • •	19.526	24.269	44.294
19	17.583	36.571	41.943	• • •	36.532	41.276	61.301
20	52.632	70.834	85.935	• • •	13.022	15.988	36.013

表 18-2 的结果是所求出的最小距离，表 18-1 是具体的路径。如表 18-2 中的 a_{ij} 表示第 i 个交巡警服务平台距离第 j 个节点的最短距离，而要达到这个最小的距离需要经过表 18-1 中所对应的元素。

18.5.2　模型一的建立及求解

根据以上分析及数据的处理很明显有些节点到所有的交巡警服务平台的距离都不会小于 3km，所以很显然不能满足每个地方发生突发事件时都会有交巡警在 3 分钟内到达这个条件。所以需要对条件进行适当修改。根据表 18-2 可以看出第 29 个节点到交巡警服务平台的最短距离为 5.0557km，为尽量满足条件，我们将这个条件分为两类，其中满足能够实现 3 分钟到达的必须满足这个要求，而对于少数不能赶到的我们尽量使其趋于最短时间。

$$\text{Model}: \min = \sum_{i=1}^{20} x_{ij} L_{ij}, (j = 1, 2, \ldots, 92)$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{20} x_{ij} = 1, (j = 1, 2, \ldots, 92) \\ \sum_{j=1}^{92} x_{ij} \geqslant 1, (i = 1, 2, \ldots, 20) \\ x_{ij} L_{ij} \leqslant 30, (i = 1, 2, \ldots, 20; j = 1, 2, \ldots, 92) \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

其中：

（1）目标函数为 $\sum_{i=1}^{20} x_{ij} L_{ij}, (j=1,2,\ldots,92)$ 表示第 j 个节点距离第 x 个交巡警服务平台距离最近时，就将第 j 个节点分配在第 i 个交巡警服务平台的管辖内；

（2）$\sum_{i=1}^{20} x_{ij} = 1, (j=1,2,\ldots,92)$ 表示每个节点只能归属于一个交巡警服务平台的管辖内；

（3）$\sum_{j=1}^{92} x_{ij} \geqslant 1, (i=1,2,\ldots,20)$ 表示每个交巡警服务平台至少管辖一个节点；

（4）$x_{ij} L_{ij} \leqslant 30, (i=1,2,\ldots,20; j=1,2,\ldots,92)$ 各交巡警服务平台分配管辖范围，使其在所管辖的范围内出现突发事件时，尽量能在 3 分钟内有交巡警到达事发地；

（5）$x_{ij} \in \{0,1\}$，当 $x_{ij}=1$ 时表示第 j 个节点分配在第 i 个交巡警服务平台的管辖内；当 $x_{ij}=0$ 时表示第 j 个节点没有分配在第 i 个交巡警服务平台的管辖内。

借助 Lingo 软件对其进行求解。

```
model:  !模型初步
sets:   !变量设置
count/1..92/:b;           !变量初始化
ss(count,count):x,L,p;  !变量初始化
endsets
min=@sum(ss:x*L*p);                !所有交警服务平台管辖范围最小，节约警力资源
@for(ss:@bin(x));                  !每个交警服务平台是否管辖某路口，是为 1，否为 0
@for(count(j):@sum(count(i):x(i,j))=1);     !每个路口只属于一个警务站
@for(ss(i,j):x(i,j)<=b(i));                 !约束条件
@for(count(j):@bin(b(j)));                  !0-1 变量
@for(count(j)|j#LE#20:b(j)=1);              !规定地图中已知的 20 个节点等于 1
@sum(count(j):b(j))=23;                     !规定总共 23 个节点等于 1
Data:
!已知量设置
L=
0   18.987  38.839  45.352  93.743  95.375  115 90.226  92.254  146.5
    190.88  222.36  220.02  160.28  142.49  92.868  35.912  25.646  17.583
    52.632  192.93  210.96  225.02  228.93  210.9   181.88  189.31  190.01
    195.16  120.83  112.81  103.6   98.503  97.279  88.012  90.824  95.923
    58.809  55.809  38.132
;
p=
1.7 2.1 2.2 1.7 2.1 2.5 2.4 2.4 2.1 1.6 2.6 2.4 2.2 2.5 2.1 2.6 2.5 1.9
    1.8 1.9 1.4 1.4 2.4 1.1 1.6 1.2 0.8 1.3 1.4 2.1 1.6 1.5 1.4 1.7 1.4
    1.1 0.1 1.2 1.4 1.7 1.4 1.4 1.7 1.1 1.4 1.2 1.6 1.4 1.2 1.1 0.8 0.6
    1.4 0.9 1   0.5 0.8 1.1 0.9 0.7 0.6 1.2 1.4 0.8 0.7 0.8 0.8 0.9 1.1
    0.9 1.1 0.8
;

enddata
end
```

求解过程及具体答案见本书附录程序文档（A 区），将结果进行整理如表 18-3 所示。

表 18-3　各交巡警服务平台及其管辖范围

第 *i* 个服务平台	所管辖的节点	第 *i* 个服务平台	所管辖的节点
1	1,67,68,69,71,73, 74,75,76,78	11	11,26，27
2	2,39,40,43,44,70,72	12	12,25
3	3,54,55,65，66	13	13,21，22,23,24
4	4,57,60,62,63,64	14	14
5	5,49,50,51,52,53,56,58，59	15	15,28，29
6	6	16	16,36,37,38
7	7,30,32,47,48,61	17	17,41,42
8	8,33,46	18	18,60，81,82,83
9	9,31,34,35,45	19	19，77,79
10	10	20	20,84,85,86,87,88, 89,90,91,92

如图 18-1 所示，我们可以很直观的看出每个节点的相对位置，比如第 11 个交巡警服务平台所管辖的节点应该为 11、26 和 27。将结果与上述模型所求解的结果进行对比，完全符合，充分说明了结果的可靠性。

18.5.3　模型二的建立与求解

本问题针对重大突发事件，通过建立相关的模型来研究如何调度 20 个交巡警服务平台的警力，使得能够对进出该区的 13 条交通要道实现快速全封锁。根据上一问中所得出的 20 个交巡警服务平台与各节点的实际最短距离将本章所需要的数据进行筛选，结合实际情况，我们以这 13 条交通要道到交巡警服务平台距离和的最小值为目标函数建立相应的优化模型，找出其约束条件，借助 Lingo 对其进行求解。但考虑到题中所说的快速这点，而时间的长短是由距离最长的决定，而上述所建立的模型是路程最短，并不是时间最短的，所以需要对其进行改进，建立一个时间最短的模型，并借助 Lingo 对其进行求解。

根据第一问中的表 18-2 进行收集整合得到表 18-4。

表 18-4　13 个节点与各平台的距离

	1（12）	2（14）	· · ·	11（38）	12（48）	13（62）
1	222.36	160.28	· · ·	58.809	118.5	48.852
2	204.64	141.3	· · ·	39.822	103.1	60.351
3	183.52	127.67	· · ·	60.938	81.979	43.934
· · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·
19	225.47	169.61	· · ·	76.393	119.99	50.337
20	269．46	212.13	· · ·	110.66	141.8	64.489

注：表 18-4 中为了模型的建立，所以对 13 个节点进行重新编号。

根据对数据的整合，并结合实际情况，以最短路程为目标函数建立相应的优化模型：

$$\text{Model}:\min=\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{13}x_{ij}L_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{13}x_{ij}\leqslant 1,(i=1,2,\ldots,20)\\ \sum_{i=1}^{20}x_{ij}=1,(j=1,2,\ldots,13)\\ x_{ij}\in\{0,1\}\end{cases}$$

其中：

（1）x_{ij} 表示第 i 个交巡警服务平台派出警力对第 j 个节点进行封锁（这里的第 i 个节点是与 j 对应的节点）；

（2）目标函数为 $\min=\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{13}x_{ij}L_{ij}$ 表示所有的路径最小；

（3）$\sum_{j=1}^{13}x_{ij}\leqslant 1,(i=1,2,\ldots,20)$ 表示交巡警服务平台只能封锁一个节点；

（4）$\sum_{i=1}^{20}x_{ij}=1,(j=1,2,\ldots,13)$ 表示每个节点都必须有交巡警进行封锁；

（5）$x_{ij}=1$ 表示第 i 个交巡警服务平台对第 j 个节点派出警力进行封锁；$x_{ij}=0$ 表示第 i 个交巡警服务平台没有派出警力对第 j 个节点进行封锁。

利用 Lingo 对其进行求解（具体过程见本书程序附录 A 区文档）：

```
model:
sets:
member/1..20/;       !变量设置
count/1..13/;        !变量设置
ss(member,count):x,L;   !p 表示发生频率，表示是否管辖该路口
endsets
min=@sum(ss(i,j)|i#ne#j:x*L);   !所有交警服务平台共管辖范围最小，节约警力资源
@for(ss:@bin(x));               !每个交警服务平台是否管辖某路口，是为 1，否为 0
@for(member(i):@sum(count(j)|i#ne#j:x(i,j))<=1);   !每个交警服务平台最多管
                                                     辖一个路口
@for(count(j):@sum(member(i)|i#ne#j:x(i,j))=1);    !每个路口只需要一个警务站
                                                     去管辖
Data:
!已经量设置
L=
0    18.987  38.839  45.352  93.743  95.375  115 90.226  92.254  146.5
     190.88  222.36  220.02  160.28  142.49  92.868  35.912  25.646  17.583
     52.632  192.93  210.96  225.02  228.93  210.9   181.88  189.31  190.01
     195.16  120.83  112.81  103.6   98.503  97.279  88.012  90.824  95.923
     58.809  55.809  38.132
;
p=
1.7 2.1 2.2 1.7 2.1 2.5 2.4 2.4 2.1 1.6 2.6 2.4 2.2 2.5 2.1 2.6 2.5 1.9
    1.8 1.9 1.4 1.4 2.4 1.1 1.6 1.2 0.8 1.3 1.4 2.1 1.6 1.5 1.4 1.7 1.4
    1.1 0.1 1.2 1.4 1.7 1.4 1.4 1.7 1.1 1.4 1.2 1.6 1.4 1.2 1.1 0.8 0.6
    1.4 0.9 1   0.5 0.8 1.1 0.9 0.7 0.6 1.2 1.4 0.8 0.7 0.8 0.8 0.9 1.1
    0.9 1.1 0.8
```

```
;

enddata
end
```

将结果整理得表 18-5。

表 18-5　最短路程方案

节点	12	14	16	21	22	23	24	28	29	30	38	48	62
平台	12	14	16	9	11	13	10	15	8	7	2	5	4
最短距离	0	0	0	115.39	32.7	5	82.436	47.52	104.93	5.831	39.822	24.758	3.5
最短时间	0	0	0	11.539	3.27	0.5	8.2436	4.752	10.493	0.5831	3.982	2.4758	0.35

表 18-5 中可以很明显的表示由哪个交巡警服务平台派出警力去封锁哪条交通要道，并且可以很明显看出两者之间的距离及所需时间。

由表 18-5 很明显可以看出虽然上述调度实现了将各个交通要道全部封锁的要求，但是很显然由于第 21 节点的距离太大，所以不能完成快速封锁。所以需要对模型进行改进，在满足各个节点都被封锁的基础上，以时间最短为目标建立优化模型。

18.5.4　模型二的改进

为了改进上一模型的缺陷，更好的达到快速这个要求。而制约时间的是并非所有路程之和而是其中最长路径，所以我们需要建立一种时间最短的模型，利用穷举法将最优解求出。

所以建立的模型为：

$$\text{Model}:\min = L1$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{13} x_{ij} \leqslant 1,(i=1,2,\dots,20)\\ \sum_{i=1}^{20} x_{ij} = 1,(j=1,2,\dots,13)\\ x_{ij}L_{ij} < L1,(i=1,2,\dots,20;j=1,2,\dots,13)\\ L1 > 50.005\end{cases}$$

其中 L_1 是最小距离中的最大值，根据表 18-4 可以看出 $L1 > 50.005$ 显然成立。

利用 Lingo 对其进行求解：

```
model:
sets:
member/1..20/;         !变量设置
count/1..13/;          !变量设置
ss(member,count):x,L;   !p 表示发生频率，表示是否管辖该路口
endsets
min=L1;                        !所有交警服务平台共管辖范围最小，节约警力资源
@for(ss:@bin(x));              !每个交警服务平台是否管辖某路口，是为 1，否为 0
@for(member(i):@sum(count(j)|i#ne#j:x(i,j))<=1);   !每个交警服务平台最多管
```

```
                                                     辖一个路口
@for(count(j):@sum(member(i)|i#ne#j:x(i,j))=1);!每个路口只需要一个警务站
                                                     去管辖
@for(ss(i,j)|i#ne#j:x(i,j)*L(i,j)<L1);              !L1 应为最小路径中的最大值，从
                                                     而保证快速封闭所用时间最短
L1>50.005;
Data:
!已知量设置
L=
0    18.987  38.839  45.352  93.743  95.375  115 90.226  92.254  146.5
     190.88  222.36  220.02  160.28  142.49  92.868  35.912  25.646  17.583
     52.632  192.93  210.96  225.02  228.93  210.9   181.88  189.31  190.01
     195.16  120.83  112.81  103.6   98.503  97.279  88.012  90.824  95.923
     58.809  55.809  38.132
;
p=
1.7 2.1 2.2 1.7 2.1 2.5 2.4 2.4 2.1 1.6 2.6 2.4 2.2 2.5 2.1 2.6 2.5 1.9
    1.8 1.9 1.4 1.4 2.4 1.1 1.6 1.2 0.8 1.3 1.4 2.1 1.6 1.5 1.4 1.7 1.4
    1.1 0.1 1.2 1.4 1.7 1.4 1.4 1.7 1.1 1.4 1.2 1.6 1.4 1.2 1.1 0.8 0.6
    1.4 0.9 1   0.5 0.8 1.1 0.9 0.7 0.6 1.2 1.4 0.8 0.7 0.8 0.8 0.9 1.1
    0.9 1.1 0.8
;

enddata
end
```

得到 $L_1 = 80.155$，并得出在此条件下的其他调度情况，结果以表格的形式给出，如表 18-6 所示。

表 18-6　最短时间方案

节点	12	14	16	21	22	23	24	28	29	30	38	48	62
平台	10	16	2	11	14	13	12	15	7	9	19	4	20
最短距离	75.866	67.417	73.881	50.723	50.68	5	35.916	47.52	80.155	34.923	76.393	73.959	64.489
最短时间	7.5866	6.7417	7.3881	5.0723	5.068	0.5	3.5916	4.752	8.0155	3.4923	7.6393	7.3959	6.489

由表 18-6 可以看出最长的路程为第 29 个节点，但是只有 8015.5m，并且满足将各个节点全部封锁的条件。所以从时间的角度来看改进后的模型比改进前能够节约 5.8725min。所以改进后的模型是值得肯定的。

18.5.5　模型三的建立与求解

问题一的三小问考虑到不同交巡警服务工作量的不均衡。根据第一小问所得出的交巡警服务平台所管辖的范围，结合每个节点的发案率对其进行分析，为了消除单位的影响和由大数吃小数引起的误差，所以我们首先对数据进行了无量纲化，使得数据具有可比性，然后以标准化后的最短距离与发案率的乘积来刻画他们的工作量。以工作量的方差和时间的长短为指标对其进行打分，以他们的得分情况来进行分析。针对这种工作量的不平衡，我们可以在适当的位置再增加 2～5 个交巡警服务平台来解决这个问题，然后以以上两个指标为目标函数建立双目标优化模型，借助 LINGO 软件对其进行求解，得出增加平台的具体情况，同时与之前的工作量进行对比来说明增加的必要性。

Step1：对距离进行无量纲化处理。

根据公式：

$$L'_{ij}=\frac{\max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant 20\\1\leqslant j\leqslant 90}}\{L_{ij}\}-L_{ij}}{\max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant 20\\1\leqslant j\leqslant 90}}\{L_{ij}\}-\min\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant 20\\1\leqslant j\leqslant 90}}\{L_{ij}\}}$$

对数据进行无量纲化，得到表 18-7（全部数据见附件 2）。

表 18-7　距离标准化情况

	1	2	• • •	91	92
1	1	0.9323	• • •	0.822	0.7506
2	0.9323	1	• • •	0.7571	0.7122
• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •
19	0.9373	0.8696	• • •	0.8528	0.7814
20	0.8123	0.7474	• • •	0.943	0.8716

Step2：对发案率进行无量纲化。

根据公式：

$$f'_j=\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 92}\{f_j\}-f_j}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 92}\{f_j\}-\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 92}\{f_j\}}$$

对相关数据进行无量纲化得到表 18-8（全部数据见附件 2）。

表 18-8　标准化后各节点的发案率

节点编号	1	2	• • •	91	92
发案率	0.3462	0.1923	• • •	0.6538	0.6923

根据标准化后的数据建立一种模型对其进行分析，在这里我们考虑各平台工作量的均衡度和出警时间的长短两个方面。以距离与发案率的乘积来刻画他们的工作量，用工作量的方差 y_{1i} 来刻画他们之间的均衡度。而出警时间的长短 y_{2i} 用平台到所管辖的节点距离之和来刻画。

$$y_{1i}=\left[\sum_{j=1}^{92}x_{ij}L_{ij}f_{ij}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{20}\sum\limits_{j=1}^{92}x_{ij}L_{ij}f_{ij}}{N}\right]^2,(i=1,2,\ldots,20)$$

$$y_{2i}=\sum_{j=1}^{92}x_{ij}L_{ij}f_{ij},(i=1,2,\ldots,20)$$

其中：

$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}\sum\limits_{j=1}^{92}x_{ij}L_{ij}f_{ij}}{N}=2.0775408$ 表示平均每个平台的工作量，且为定值；

$\sum\limits_{j=1}^{92}x_{ij}L_{ij}f_{ij}$ 表示第 i 个平台的实际工作量。

根据上述两种目标，确定相应的权重，分别为α、β，所以根据上述关系可以得到一种衡量他们总体均衡度的数学函数表达式：

$$Y_i = \alpha \times y_{1i} + \beta \times y_{2i}, (i = 1,2,...,20)$$

用上式来刻画他们的得分，根据实际情况我们假设$\alpha = 0.8, \beta = 0.2$，并借助软件对其进行求解，MATLAB 编程如下：

```
clc,clear,close all
ysw18 1;     % 加载运行文件
a=max(x7)    % 最大值
a=max(a');   % 最大值
b=min(x7);   % 最小值
b=min(b');   % 最小值
for i=1:92
    for j=1:92
        x7(i,j)=(a-x7(i,j))/a;     % 标准化
    end
end
freq=[1.7  2.1 2.2 1.7 2.1 2.5 2.4 2.4 2.1 1.6 2.6 2.4 2.2 2.5 2.1 2.6
     2.5 1.9 1.8 1.9 1.4 1.4 2.4 1.1 1.6 1.2 0.8 1.3 1.4 2.1 1.6 1.5 1.4
     1.7 1.4 1.1 0.1 1.2 1.4 1.7 1.4 1.4 1.7 1.1 1.4 1.2 1.6 1.4 1.2 1.1
     0.8 0.6 1.4 0.9 1   0.5 0.8 1.1 0.9 0.7 0.6 1.2 1.4 0.8 0.7 0.8 0.8
     0.9 1.1 0.9 1.1 0.8 0.9 1.1 0.8 1.1 0.8 0.8 0.8 0.8 1.4 1.1 0.9 1
     1.2 1.4 1.1 0.9 1.4 0.9 0.9 0.8];
c = max(freq');      % 最大值
d = min(freq');      % 最小值
for i=1:92
    freq(1,i)=(c-freq(1,i))/c;      % 标准化
end
i=1;
% 计算工作量
x8(1,1)=x7(i,1)*freq(1,1)+x7(i,67)*freq(1,67)+x7(i,68)*freq(1,68)+x7(i,6
9)*freq(1,69)+x7(i,71)*freq(1,71)+x7(i,73)*freq(1,73)+x7(i,74)*freq(1,74
)+x7(i,75)*freq(1,75)+x7(i,76)*freq(1,76)+x7(i,78)*freq(1,78);
x8(2,1)=x7(2,2)*freq(1,2)+x7(2,39)*freq(1,39)+x7(2,40)*freq(1,40)+x7(2,4
3)*freq(1,43)+x7(2,44)*freq(1,44)+x7(2,70)*freq(1,70)+x7(2,72)*freq(1,72
);
x8(3,1)=x7(3,3)*freq(1,3)+x7(3,54)*freq(1,54)+x7(3,55)*freq(1,55)+x7(3,6
5)*freq(1,65)+x7(3,66)*freq(1,66);
x8(4,1)=x7(4,4)*freq(1,4)+x7(4,57)*freq(1,57)+x7(4,60)*freq(1,60)+x7(4,6
2)*freq(1,62)+x7(4,63)*freq(1,63)+x7(4,64)*freq(1,64);
x8(5,1)=x7(5,5)*freq(1,5)+x7(5,49)*freq(1,49)+x7(5,50)*freq(1,50)+x7(5,5
1)*freq(1,51)+x7(5,52)*freq(1,52)+x7(5,53)*freq(1,53)+x7(5,56)*freq(1,56
)+x7(5,58)*freq(1,58)+x7(5,59)*freq(1,59);
x8(6,1)=x7(6,6)*freq(1,6);
x8(7,1)=x7(7,7)*freq(1,7)+x7(7,30)*freq(1,30)+x7(7,32)*freq(1,32)+x7(7,4
7)*freq(1,47)+x7(7,48)*freq(1,48)+x7(7,61)*freq(1,61);
x8(8,1)=x7(8,8)*freq(1,8)+x7(8,33)*freq(1,33)+x7(8,46)*freq(1,46);
x8(9,1)=x7(9,9)*freq(1,9)+x7(9,31)*freq(1,31)+x7(9,34)*freq(1,34)+x7(9,3
5)*freq(1,35)+x7(9,45)*freq(1,45);
x8(10,1)=x7(10,10)*freq(1,10);
x8(11,1)=x7(11,11)*freq(1,11)+x7(11,26)*freq(1,26)+x7(11,27)*freq(1,27);
x8(12,1)=x7(12,12)*freq(1,12)+x7(12,35)*freq(1,35);
x8(13,1)=x7(13,13)*freq(1,13)+x7(13,21)*freq(1,21)+x7(13,22)*freq(1,22)+
x7(13,23)*freq(1,23)+x7(13,24)*freq(1,24);
x8(14,1)=x7(14,14)*freq(1,14);
```

```
x8(15,1)=x7(15,15)*freq(1,15)+x7(15,28)*freq(1,28)+x7(15,29)*freq(1,29);
x8(16,1)=x7(16,16)*freq(1,16)+x7(16,37)*freq(1,37)+x7(16,38)*freq(1,38)+
x7(16,39)*freq(1,39);
x8(17,1)=x7(17,17)*freq(1,17)+x7(17,41)*freq(1,41)+x7(17,42)*freq(1,42);
x8(18,1)=x7(18,18)*freq(1,18)+x7(18,60)*freq(1,60)+x7(18,81)*freq(1,81)+
x7(18,82)*freq(1,82)+x7(18,83)*freq(1,83);
x8(19,1)=x7(19,19)*freq(1,19)+x7(19,77)*freq(1,77)+x7(19,79)*freq(1,79);
x8(20,1)=x7(20,20)*freq(1,20)+x7(20,84)*freq(1,84)+x7(20,85)*freq(1,85)+
x7(20,86)*freq(1,86)+x7(20,87)*freq(1,87)+x7(20,88)*freq(1,88)+x7(20,89)
*freq(1,89)+x7(20,90)*freq(1,90)+x7(20,91)*freq(1,91)+x7(20,92)*freq(1,9
2);
```

运行程序得到结果如表 18-9 所示。

表 18-9　各平台的得分情况

平台编号	得分	平台编号	得分	平台编号	得分	平台编号	得分
1	2.84917	6	3.45294	11	3.27492	16	2.96009
2	2.93553	7	2.93097	12	2.801359	17	3.35934
3	2.95682	8	3.35540	13	3.119246	18	2.70165
4	2.96523	9	3.27021	14	3.452941	19	3.34351
5	2.68127	10	3.45294	15	2.920729	20	2.66035

由表 18-9 可以看出，最大的得分为 3.452941，而最小的为 2.660345，所以很显然第 6、10 和 14 交巡警服务平台的工作量太大，第 8、9、11、17 和 19 交巡警服务平台的工作量偏大，而第 5 和 20 交巡警服务平台的工作量偏小，所以很显然不平衡。

针对这种不平衡的问题，结合题目允许增加平台的数目，所以我们考虑增加 5 个，再加上平台的基础上，以上边的两个指标建立双目标优化模型，找出相应的约束条件，然后借助 Lingo 对其进行求解，得到增加的平台的具体信息。

根据上述内容建立相关模型如下：

$$\text{Model1}:\min=\left[\sum_{j=1}^{92}x_{ij}L_{ij}f_{ij}-\frac{\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{92}x_{ij}L_{ij}f_{ij}}{N}\right]^2$$

$$\text{Model2}:\min=\sum_{j=1}^{92}x_{ij}L_{ij}f$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{92}b_i=25,(i=1,2,\dots,92)\\ b_k=1,(k=1,2,\dots,20)\\ b_i\in\{0,1\},x_{ij}\in\{0,1\},(i=1,2,\dots,92;j=1,2,\dots,92)\\ x_{ij}\leqslant b_i,(i,j=1,2,\dots,92)\\ \sum_{i=1}^{92}x_{ij}=1,(j=1,2,\dots,92)\end{cases}$$

其中：

（1） $\sum_{i=1}^{92}x_{ij}=1,(j=1,2,\dots,92)$　表示每个节点只受一个平台管辖；

（2）$x_j=1$　表示第 j 个节点设平台；$b_j=0$　表示第 j 个节点不设平台；

（3）$\sum_{i=1}^{92} b_i = 25$ 表示一共设置 25 个平台；

（4）$x_{ij}=1$ 表示第 j 个节点由第 i 个平台管辖；$x_{ij}=0$　表示第 j 个节点不在第 i 个平台的管辖范围内；

（5）$x_{ij}\leqslant b_i$ 保证平台不存在时不会管辖任何节点。

利用 Lingo 求解，由于方差为非线性的不利于求解，所以为了简化运算，我们用绝对值代替方差，然后将双目标函数分别确定相应的权重最终转化为单目标函数进行求解。

```
model:
sets:
count/1..92/:b;                    !变量设置
ss(count,count):x,L,p;             !变量设置
endsets
min=@sqrt(@sum(count(i):@sum(count(j):(x(i,j)*L(i,j)*p(i,j)-2)^2)));
                                   !所有交警服务平台共管辖范围最小，节约警力资源
@for(ss:@bin(x));                  !每个交警服务平台是否管辖某路口，是为 1，否为 0
@for(count(j):@sum(count(i):x(i,j))=1);     !每个路口只属于一个警务站
@for(ss(i,j):x(i,j)<=b(i));        !约束条件
@for(count(j):@bin(b(j)));         !0-1 变量
@for(count(j)|j#LE#20:b(j)=1);     !已知的前 20 个节点为 1
@sum(count(j):b(j))=23;            !所有的为 1 的节点等于 23
Data:
!已知量设置
L=
0   18.987  38.839  45.352  93.743  95.375  115 90.226  92.254  146.5
    190.88  222.36  220.02  160.28  142.49  92.868  35.912  25.646  17.583
    52.632  192.93  210.96  225.02  228.93  210.9   181.88  189.31  190.01
    195.16  120.83  112.81  103.6   98.503  97.279  88.012  90.824  95.923
    58.809  55.809  38.132
;
p=
1.7 2.1 2.2 1.7 2.1 2.5 2.4 2.4 2.1 1.6 2.6 2.4 2.2 2.5 2.1 2.6 2.5 1.9
    1.8 1.9 1.4 1.4 2.4 1.1 1.6 1.2 0.8 1.3 1.4 2.1 1.6 1.5 1.4 1.7 1.4
    1.1 0.1 1.2 1.4 1.7 1.4 1.4 1.7 1.1 1.4 1.2 1.6 1.4 1.2 1.1 0.8 0.6
    1.4 0.9 1   0.5 0.8 1.1 0.9 0.7 0.6 1.2 1.4 0.8 0.7 0.8 0.8 0.9 1.1
    0.9 1.1 0.8
;

enddata
end
```

运行程序输出结果如表 18-10 所示。

表 18-10　新增平台编号相关信息

新增平台的编号	所管辖的节点编号
29	28　29
39	38　39　40
88	84　87　88　89　90　91　92
66	64　65　66　67　68　76
51	50　51　52　56　57　58　59

分析上述的模型求解出的结果，对其进行相同的得分模型，并进行求解，得出各个平

台的得分情况，并与未增加前的得分进行比较，加后的得分如表 18-11 所示。

表 18-11　增加后的得分情况

平台编号	得分	平台编号	得分	平台编号	得分	平台编号	得分
1	3.1207	7	2.9310	13	3.1192	19	3.3435
2	3.1809	8	3.3554	14	3.4529	20	3.4078
3	3.2060	9	3.2702	15	3.4529	29	3.4003
4	3.2412	10	3.4529	16	3.1506	39	3.3674
5	3.3690	11	3.27492	17	3.3593	88	3.1130
6	3.4530	12	2.80136	18	2.7016	51	3.0952
66	3.2100						

将表 18-11 与表 18-9 对比，最大的得分为 3.4529，而最小的为 2.7016，很明显之间的差距缩小了，而且表 18-11 中的得分更加集中，所以可以看出增加平台是有必要的也是有效的。

18.6　问　题　二

针对全市的具体情况，考虑到六个区的特殊性，所以我们采取局部最优模型来进行求解。首先按照问题一中的研究方法来对其他地方进行研究，根据各区内部之间得分的比较以及各区之间的比较来说明其不合理性。为解决这种不合理的设置，我们首先要分析表格数据，确定要增加的平台数量，然后建立一种以工作量的方差和路程的长短为指标的双目标优化模型，根据相应的约束条件求出应该增加的平台的具体情况。

根据对问题的分析，我们采取对局部进行分析的方法，同样按照问题一的原则进行约束，而后对其进行打分，根据得分情况来对其合理性进行评价。现在以 B 区为例进行研究。

Step1：首先先建立模型确定 B 区 8 个平台的管辖范围：

$$\text{Model}:\min=\sum_{i=1}^{20}x_{ij}L_{ij},(j=1,2,\ldots,92)$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{20}x_{ij}=1,(j=1,2,\ldots,92)\\ \sum_{j=1}^{92}x_{ij}\geqslant 1,(i=1,2,\ldots,20)\\ x_{ij}L_{ij}\leqslant 30,(i=1,2,\ldots,20;j=1,2,\ldots,92)\\ x_{ij}\in\{0,1\}\end{cases}$$

借助 Lingo 软件对其进行求解：

```
model:
sets:
member/1..8/;         !变量初始化
count/1..73/;         !变量初始化
ss(member,count):x,L,p;      !变量初始化
endsets
min=@sum(ss:x*L*p);          !所有交警服务平台共管辖范围最小，节约警力资源
@for(ss:@bin(x));            !每个交警服务平台是否管辖某路口，是为 1，否为 0
@for(count(j):@sum(member(i):x(i,j))=1);     !每个路口只属于一个警务站
Data:
!已知量变换
L=
```

```
0   47.393  94.961  121.07  132.18  85.47   144.53  123.43  40.08   26.927
    19.647  17.464  26.684  39.837  35.228  45.92   56.474  60.393  52.002
    73.393  70.441  74.813  82.093  71.874  58.874  46.709  57.833  51.508
    44.297  53.241  59.754  71.92   69.366  60.851  72.851  71.04   79.154
    81.04   89.352  108.2   100.87  105.04  109.35  118.28  122.69  126.46
    131.95  126.95  135.01  137.1   135.01  147.66  143.1   145.78  156.78
    162 174.65  163.18  181.62  185.54  207.63  43.813  57.955  41.96
    81.279  63.345  51.18   61.95   72.72   71.345  82.659  79.47   127.99
;
p=
1.6 1.6 1.6 2.1 1.8 1.6 2.6 2.6 1.1 0.9 0.5 0.7 0.4 0.8 0.2 0.8 0.6 0.9
    0.8 1.1 0.8 0.4 0.7 1.2 0.8 0.9 0.5 0.6 0.6 0.8 0.9 0.4 0.7 1.1 0.8
    0.8 0.7 0.6 0.7 1.2 0.8 1.1 0.8 0.9 1.1 0.6 0.7 0.8 0.4 1.1 0.8 1.1
    0.7 0.6 0.8 1.1 0.6 0.4 0.8 0.5 0.1 0.6 0.7 1.1 1.4 1.6 0.8 0.6 0.8
    0.6 0.7 1.1 1.1
1.6 1.6 1.6 2.1 1.8 1.6 2.6 2.6 1.1 0.9 0.5 0.7 0.4 0.8 0.2 0.8 0.6 0.9
    0.8 1.1 0.8 0.4 0.7 1.2 0.8 0.9 0.5 0.6 0.6 0.8 0.9 0.4 0.7 1.1 0.8
    0.8 0.7 0.6 0.7 1.2 0.8 1.1 0.8 0.9 1.1 0.6 0.7 0.8 0.4 1.1 0.8 1.1
    0.7 0.6 0.8 1.1 0.6 0.4 0.8 0.5 0.1 0.6 0.7 1.1 1.4 1.6 0.8 0.6 0.8
    0.6 0.7 1.1 1.1
;
enddata
end
```

求解过程及具体答案见本书程序附录 B 区文档，将结果进行整理得表 18-12。

表 18-12　B区管辖范围

平台编号	所管辖的范围
1	1,9,10,11,12,28,29,31,62,64
2	2,13,14,15,16,17,18,19,20,25,26,27
3	3,21,22,23,24,34,36,37，39,44
4	4,32,35,38,41,42,46,47,48,49,50,53,54,55,58,59
5	5,43,45,51,52
6	6,63,65,66,67,68,69,70,71,72,73
7	7,56,57,60,61
8	8,33,40

（注：表中的编号并非实际编号，是为了简化运算而对实际编号的处理，是对应于该区的编号。）

Step2：模型前的准备工作

考虑到除工作量会影响得分外，人口密度也会影响，但两者的重要性不同，还需要对其进行权重的处理。所以我们以他们的工作量和人口密度为指标进行打分。

（1）利用 EXCLE 对数据进行处理得到六个区的人口密度，如表 18-13 所示。

表 18-13　各区相关信息

	A	B	C	D	E	F
面积（平方公里）	22	103	221	383	432	274
人口数（万人）	60	21	49	73	76	53
人口密度	2.72723	0.20384	0.22172	0.19060	0.17593	0.19343

（2）对距离进行无量纲化处理。

根据公式：

$$L'_{ij}=\frac{\max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant 20\\1\leqslant j\leqslant 90}}\{L_{ij}\}-L_{ij}}{\max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant 20\\1\leqslant j\leqslant 90}}\{L_{ij}\}-\min\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant 20\\1\leqslant j\leqslant 90}}\{L_{ij}\}}$$

（3）对案发率进行无量纲化处理。

根据公式：

$$f'_j=\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 92}\{f_j\}-f_j}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 92}\{f_j\}-\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 92}\{f_j\}}$$

Step3：模型的建立

根据上述思路以人口密度和工作量两个指标对其进行打分，且假定工作量的权重值为 0.8，人口密度的权重值为 0.2。依照下列公式为其进行打分：

$$Y_i=0.8*\sum_{j=1}^{N}x_{ij}L'_{ij}+0.2*\sum_{j=1}^{N}x_{ij}f'_j,(i=1,2,\ldots,20)$$

其中，N 是指该区节点的总和。

Step4：模型的求解

利用 MATLAB 对其进行求解，得到其得分情况，利用同样的办法对其他几个区也进行相同的分析。

```
% 工作量
clc,clear,close all
a2=max(B4);      % 最大值
a2=max(a2');     % 最大值
b2=min(B4);      % 最小值
b2=min(b2');     % 最小值
n=length(B4);    % 长度
for i=1:n
    for j=1:n
        B4(i,j)=(a2-B4(i,j))/(a2-b2);  % 归一化
    end
end
freqb=[1.6  1.6 1.6 2.1 1.8 1.6 2.6 2.6 1.1 0.9 0.5 0.7 0.4 0.8 0.2 0.8
     0.6 0.9 0.8 1.1 0.8 0.4 0.7 1.2 0.8 0.9 0.5 0.6 0.6 0.8 0.9 0.4 0.7
     1.1 0.8 0.8 0.7 0.6 0.7 1.2 0.8 1.1 0.8 0.9 1.1 0.6 0.7 0.8 0.4 1.1
     0.8 1.1 0.7 0.6 0.8 1.1 0.6 0.4 0.8 0.5 0.1 0.6 0.7 1.1 1.4 1.6 0.8
     0.6 0.8 0.6 0.7 1.1 1.1];
c2=max(freqb');   % 最大值
d2=min(freqb');   % 最小值
for i=1:n
    freqb(1,i)=(c2-freqb(1,i))/(c2-d2);  % 归一化
end
% 案发率计算
B5(1,1)=B4(1,1)*freqb(1,1)+B4(1,9)*freqb(1,9)+B4(1,10)*freqb(1,10)+B4(1,
11)*freqb(1,11)+B4(1,12)*freqb(1,12)+B4(1,28)*freqb(1,28)+B4(1,29)*freqb
(1,29)+B4(1,30)*freqb(1,30)+B4(1,31)*freqb(1,31);+B4(1,62)*freqb(1,62)+B
4(1,64)*freqb(1,64);
B5(2,1)=B4(2,2)*freqb(1,2)+B4(2,13)*freqb(1,13)+B4(2,14)*freqb(1,14)+B4(
2,15)*freqb(1,15)+B4(2,16)*freqb(1,16)+B4(2,17)*freqb(1,17)+B4(2,18)*fre
qb(1,18)+B4(2,19)*freqb(1,19)+B4(2,20)*freqb(1,20)+B4(2,25)*freqb(1,25)+
B4(2,26)*freqb(1,26)+B4(2,27)*freqb(1,27);
B5(3,1)=B4(3,3)*freqb(1,3)+B4(3,21)*freqb(1,21)+B4(3,22)*freqb(1,22)+B4(
```

```
3,23)*freqb(1,23)+B4(3,24)*freqb(1,24)+B4(3,34)*freqb(1,34)+B4(3,36)*fre
qb(1,36)+B4(3,37)*freqb(1,37)+B4(3,39)*freqb(1,39)+B4(3,44)*freqb(1,44);
B5(4,1)=B4(4,4)*freqb(1,4)+B4(4,32)*freqb(1,32)+B4(4,35)*freqb(1,35)+B4(
4,38)*freqb(1,38)+B4(4,41)*freqb(1,41)+B4(4,42)*freqb(1,42)+B4(4,46)*fre
qb(1,46)+B4(4,47)*freqb(1,47)+B4(4,48)*freqb(1,48)+B4(4,49)*freqb(1,49)+
B4(4,50)*freqb(1,50)+B4(4,53)*freqb(1,53)+B4(4,54)*freqb(1,54)+B4(4,55)*
freqb(1,55)+B4(4,58)*freqb(1,58)+B4(4,59)*freqb(1,59);
B5(5,1)=B4(5,5)*freqb(1,5)+B4(5,43)*freqb(1,43)+B4(5,45)*freqb(1,45)+B4(
5,51)*freqb(1,51)+B4(5,52)*freqb(1,52);
B5(6,1)=B4(6,6)*freqb(1,6)+B4(6,63)*freqb(1,63)+B4(6,65)*freqb(1,65)+B4(
6,66)*freqb(1,66)+B4(6,67)*freqb(1,67)+B4(6,68)*freqb(1,68)+B4(6,69)*fre
qb(1,69)+B4(6,70)*freqb(1,70)+B4(6,71)*freqb(1,71)+B4(6,72)*freqb(1,72)+
B4(6,73)*freqb(1,73);
B5(7,1)=B4(7,7)*freqb(1,7)+B4(7,56)*freqb(1,56)+B4(7,57)*freqb(1,57)+B4(
7,60)*freqb(1,60)+B4(7,61)*freqb(1,61);
B5(8,1)=B4(8,8)*freqb(1,8)+B4(8,33)*freqb(1,33)+B4(8,40)*freqb(1,40);
```

同理可求得 C、D、E 和 F 区，得到各区得分情况，以表格形式给出，如表 18-14 所示（因为 A 区在第一问中已经讨论过，所以这里不再研究 A 区）。

表 18-14　各区得分情况

平台编号	B 区	C 区	D 区	E 区	F 区
1	4.394856699	2.176023891	1.994187117	0.0991852	4.326058
2	6.440696699	5.110343891	6.484132986	1.4669445	5.947943
3	4.896616699	2.940343891	0.281782065	4.841114	16.74713
4	8.158376699	0.658615891	2.137121804	4.6683552	6.533871
5	2.310376699	4.831303891	1.622507195	0.0351852	123.4683
6	5.016056699	5.349783891	0.166120104	0.3349697	3.141025
7	2.101816699	2.637303891	0.855357292	0.8831216	2.768742
8	0.950856699	4.702583891	2.224384055	2.2382454	1.747197
9		3.743703891	3.811295574	5.1506014	0.918848
10		4.258263891		3.7897614	1.3459
11		2.672983891		6.7895257	1.334585
12		1.970663891		5.3387163	
13		6.368343891		2.0335025	
14		7.940983891		2.3160679	
15		12.06594389		4.0883679	
16		2.354343891			
17		2.707863891			

（表 18-14 中的编号并非实际编号，是为了简化运算而对实际编号的处理，是对应于该区的编号。）

根据得分情况我们可以分析出他们之间的不平衡程度，如表 18-14 中 B 区中 2、3、4 和 6 所对应的平台的工作量偏大，所以我们应该再增加四个平台来平衡这四个平台的任务，使得 B 区中所有的平台趋于平衡。

18.6.1　模型一的建立与求解

根据上述思路建立双目标优化模型如下：

$$\text{Model1}: \min = \sum_{j=1}^{N} x_{ij} L'_{ij}, (i=1,2,\ldots,12)$$

$$\text{Model2}: \min = \sum_{j=1}^{N} x_{ij} f'_{j}, (i=1,2,\ldots,12)$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} b_i = 12, (i=1,2,\ldots,N) \\ b_k = 1, (k=1,2,\ldots,8) \\ b_i \in \{0,1\}, x_{ij} \in \{0,1\}, (i,j=1,2,\ldots,N) \\ x_{ij} \leqslant b_i, (i,j=1,2,\ldots,N) \\ \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, (j=1,2,\ldots,N) \end{cases}$$

利用 Lingo 将多元目标优化转化为单目标优化问题进行求解。

```
model:
sets:
count/1..73/:b;              !变量设置
ss(count,count):x,L,p;       !变量设置
endsets
min=@sum(ss:x*L*p);          !所有交警服务平台共管辖范围最小，节约警力资源
@for(ss:@bin(x));            !每个交警服务平台是否管辖某路口，是为 1，否为 0
@for(count(j):@sum(count(i):x(i,j))=1);     !每个路口只属于一个警务站
@for(ss(i,j):x(i,j)<=b(i));                 !约束条件
@for(count(j):@bin(b(j)));                  !0-1 变量
@for(count(j)|j#LE#8:b(j)=1);               !规定地图中已知的 8 个节点等于 1
@sum(count(j):b(j))=12;                     !规定总共 12 个节点等于 1
data:
L=
0    47.393  94.961  121.07  132.18  85.47   144.53  123.43  40.08   26.927
     19.647  17.464  26.684  39.837  35.228  45.92   56.474  60.393  52.002
     73.393  70.441  74.813  82.093  71.874  58.874  46.709  57.833  51.508
     44.297  53.241  59.754  71.92   69.366  60.851  72.851  71.04   79.154
     81.04   89.352  108.2   100.87  105.04  109.35  118.28  122.69  126.46
     131.95  126.95  135.01  137.1   135.01  147.66  143.1   145.78  156.78
     162 174.65  163.18  181.62  185.54  207.63  43.813  57.955  41.96
     81.279  63.345  51.18   61.95   72.72   71.345  82.659  79.47   127.99
;
p=
1.6 1.6 1.6 2.1 1.8 1.6 2.6 2.6 1.1 0.9 0.5 0.7 0.4 0.8 0.2 0.8 0.6 0.9
    0.8 1.1 0.8 0.4 0.7 1.2 0.8 0.9 0.5 0.6 0.6 0.8 0.9 0.4 0.7 1.1 0.8
    0.8 0.7 0.6 0.7 1.2 0.8 1.1 0.8 0.9 1.1 0.6 0.7 0.8 0.4 1.1 0.8 1.1
    0.7 0.6 0.8 1.1 0.6 0.4 0.8 0.5 0.1 0.6 0.7 1.1 1.4 1.6 0.8 0.6 0.8
    0.6 0.7 1.1 1.1
1.6 1.6 1.6 2.1 1.8 1.6 2.6 2.6 1.1 0.9 0.5 0.7 0.4 0.8 0.2 0.8 0.6 0.9
    0.8 1.1 0.8 0.4 0.7 1.2 0.8 0.9 0.5 0.6 0.6 0.8 0.9 0.4 0.7 1.1 0.8
    0.8 0.7 0.6 0.7 1.2 0.8 1.1 0.8 0.9 1.1 0.6 0.7 0.8 0.4 1.1 0.8 1.1
    0.7 0.6 0.8 1.1 0.6 0.4 0.8 0.5 0.1 0.6 0.7 1.1 1.4 1.6 0.8 0.6 0.8
    0.6 0.7 1.1 1.1
;
enddata
end
```

得到应该增加的点为 61、69、71 和 73，它们所对应的 B 区的真实编号为 153、161、

163 和 165。

以同样的方法对其他几个区也进行类似的分析，得到的增加数及增加的具体信息见表 18-15。

表 18-15　增加平台后的情况

区号	增加数量	平台的实际编号
B 区	4	93 94 95 96 97 98 99 100 153 161 163 165
C 区	5	166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 193 194 195 254
D 区	3	320 321 322 323 324 325 326 327 328 330 332 371
E 区	4	372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 418 420 444
F 区	5	475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 578 579 580 581 582

18.6.2　模型一的改进

针对不平衡这个问题我们仅从增加平台的角度考虑，没有考虑原有平台的移动，而解决不平衡的问题可以考虑在不增加平台数量的基础上将现有平台进行移动来实现。

由于移动的复杂性，所以我们换一种思路，即不考虑现有平台的位置，进行虚拟一种最优情况，然后对其进行调整。

根据以上分析建立的双目标优化模型为：

$$\text{Model1}: \min = \sum_{j=1}^{N} x_{ij} L'_{ij}, (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{Model2}: \min = \sum_{j=1}^{N} x_{ij} f'_{j}, (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} b_i = n, (i = 1, 2, \dots, N) \\ b_i \in \{0,1\}, x_{ij} \in \{0,1\}, (i, j = 1, 2, \dots, N) \\ x_{ij} \leqslant b_i, (i, j = 1, 2, \dots, N) \\ \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, (j = 1, 2, \dots, N) \end{cases}$$

其中 N 表示该区总节点数，n 表示该区现有平台的个数。

对 B 区进行分析：

```
model:
sets:
count/1..52/:b;          !变量设置
ss(count,count):x,L,p;   !变量设置
endsets
min=@sum(ss:x*L*p);      !所有交警服务平台共管辖范围最小，节约警力资源
@for(ss:@bin(x));        !每个交警服务平台是否管辖某路口，是为 1，否为 0
@for(count(j):@sum(count(i):x(i,j))=1);    !每个路口只属于一个警务站
@for(ss(i,j):x(i,j)<=b(i));                !约束条件
```

```
@for(count(j):@bin(b(j)));                    !0-1 变量
!@for(count(j)|j#LE#9:b(j)=1);                !规定地图中已知的 9 个节点等于 1
@sum(count(j):b(j))=9;                        !规定总共 9 个节点等于 1
data:
!已知量赋值
L=
0    47.393  94.961  121.07  132.18  85.47   144.53  123.43  40.08   26.927
     19.647  17.464  26.684  39.837  35.228  45.92   56.474  60.393  52.002
     73.393  70.441  74.813  82.093  71.874  58.874  46.709  57.833  51.508
     44.297  53.241  59.754  71.92   69.366  60.851  72.851  71.04   79.154
     81.04   89.352  108.2   100.87  105.04  109.35  118.28  122.69  126.46
     131.95  126.95  135.01  137.1   135.01  147.66  143.1   145.78  156.78
     162 174.65  163.18  181.62  185.54  207.63  43.813  57.955  41.96
     81.279  63.345  51.18   61.95   72.72   71.345  82.659  79.47   127.99
;
p=
1.6 1.6 1.6 2.1 1.8 1.6 2.6 2.6 1.1 0.9 0.5 0.7 0.4 0.8 0.2 0.8 0.6 0.9
    0.8 1.1 0.8 0.4 0.7 1.2 0.8 0.9 0.5 0.6 0.6 0.8 0.9 0.4 0.7 1.1 0.8
    0.8 0.7 0.6 0.7 1.2 0.8 1.1 0.8 0.9 1.1 0.6 0.7 0.8 0.4 1.1 0.8 1.1
    0.7 0.6 0.8 1.1 0.6 0.4 0.8 0.5 0.1 0.6 0.7 1.1 1.4 1.6 0.8 0.6 0.8
    0.6 0.7 1.1 1.1
1.6 1.6 1.6 2.1 1.8 1.6 2.6 2.6 1.1 0.9 0.5 0.7 0.4 0.8 0.2 0.8 0.6 0.9
    0.8 1.1 0.8 0.4 0.7 1.2 0.8 0.9 0.5 0.6 0.6 0.8 0.9 0.4 0.7 1.1 0.8
    0.8 0.7 0.6 0.7 1.2 0.8 1.1 0.8 0.9 1.1 0.6 0.7 0.8 0.4 1.1 0.8 1.1
    0.7 0.6 0.8 1.1 0.6 0.4 0.8 0.5 0.1 0.6 0.7 1.1 1.4 1.6 0.8 0.6 0.8
    0.6 0.7 1.1 1.1
;
enddata
end
```

利用 Lingo 对其进行求解得出结果如下，并把其他几个区的结果整合到表 18-16 中。

表 18-16　各区虚拟平台编号

区号	该区在现有平台个数的基础上虚拟的服务平台编号
A 区	3 4 6 10 11 12 13 14 15 17 18 29 30 33 35 39 51 69 76 89
B 区	93 98 125 146 153 156 163 165
C 区	170 171 172 173 175 176 179 183 188 190 194 197 200 201 202 203
D 区	320 325 328 329 330 332 353 360 371
E 区	372 378 385 387 395 402 409 417 420 424 432 439 446 454 461
F 区	475 479 510 562 576 577 578 579 580 581 582

如表 18-16 所示，可以看出不考虑现有位置及搬迁费用的基础上的最佳平台的设置。根据虚拟出的平台然后与现有的平台进行对比，找出不同的平台，然后根据其位置关系进行搬迁。

18.7　模型的评价与推广

18.7.1　模型的评价

本章在解决交巡警服务平台设置和调度问题上，利用了多种模型进行求解，建立了不

同情形的不同模型，有单目标优化模型，也有多目标优化模型。尤其是模型的改进方案，更加符合实际情况。而且模型的建立也是从多角度进行建立的，有实际的也有虚拟的。

18.7.2　模型的推广

如问题二中的模型，我们首先考虑了仅增设平台的情况，建立了相应的模型，而后又考虑到迁移因素，所以又进行了模型的改进，但是模型的改进仅仅考虑了原有数量，单对这一个目标进行了优化，并未考虑既增设平台数又进行移动这种情况，如果能够将两者结合起来考虑的话，或许会相互弥补他们之间的不足，达到更好的效果。

第 19 章　风电功率预测问题

本章以某风电场为例，该风电场由 58 台风电机组构成，分为 A、B、C 和 D 四种型号，每台机组的额定输出功率为 850kW。风电机组功率预测问题是一个较复杂的问题，由于采集的数据的波动，呈现无规律特性，使得预测下一时刻的风电功率显得较困难。本章综合选取了三次指数平滑预测、BP 神经网络预测、马尔科夫链模型预测及 NAR 时间序列的动态神经网络来进行分析，将风电功率分为短期预测和长期预测，从整体来看，算法预测结果较好，能够较好的拟合实际结果。

学习目标：

（1）学习和掌握马尔科夫链预测方法；

（2）掌握三次指数平滑预测方法；

（3）掌握 BP 神经网络预测方法；

（4）掌握用 NAR 时间序列的动态神经网络进行预测等。

19.1　问 题 提 出

某风电场由 58 台风电机组构成，每台机组的额定输出功率为 850kW。附件 2（见程序文档）中给出了 2006 年 5 月 10 日～2006 年 6 月 6 日时间段内该风电场中指定的四台风电组（A、B、C 和 D）输出功率数据（分别记为 PA、PB、PC 和 PD；另设该四台机组总输出功率为 $P4$）及全场 58 台机组总输出功率数据（记为 $P58$）。

问题 1：风电功率实时预测及误差分析。

请对给定数据进行风电功率实时预测并检验预测结果是否满足附件 1 中（见程序文档）的关于预测精度的相关要求。具体要求：

（1）采用不少于三种预测方法（至少选择一种时间序列分析类的预测方法）；

（2）预测量：

a．PA，PB，PC，PD；　　b．$P4$；　　c．$P58$。

（3）预测时间范围分别为（预测用的历史数据范围可自行选定）：

a.　5 月 31 日 0 时 0 分至 5 月 31 日 23 时 45 分；

b.　5 月 31 日 0 时 0 分至 6 月 6 日 23 时 45 分。

（4）试根据附件 1 中关于实时预测的考核要求分析你所采用方法的准确性；

（5）你推荐哪种方法？

问题 2：试分析风电机组的汇聚对于预测结果误差的影响。

在我国主要采用集中开发的方式开发风电，各风电机组功率汇聚通过风电场或风电场群（多个风电场汇聚而成）接入电网。众多风电机组的汇聚会改变风电功率波动的属性，

从而可能影响预测的误差。

在问题 1 的预测结果中，试比较单台风电机组功率（*PA*、*PB*、*PC*、*PD*）的相对预测误差与多机总功率（*P*4、*P*58）预测的相对误差，其中有什么带有普遍性的规律吗？从中你能对风电机组汇聚给风电功率预测误差带来的影响做出什么样的预期？

问题 3：进一步提高风电功率实时预测精度的探索。

提高风电功率实时预测的准确程度对改善风电联网运行性能有重要意义。请你在问题 1 的基础上，构建有更高预测精度的实时预测方法（方法类型不限），并用预测结果说明其有效性。

通过求解上述问题，请分析论证阻碍风电功率实时预测精度进一步改善的主要因素。风电功率预测精度能无限提高吗？

19.2　摘　　要

本章针对风电功率预测这个实际问题，建立了一系列实时预测模型：Marlov 链模型、三次指数平滑法模型、BP 神经网络模型和动态神经网络时间序列预测法，且针对给定数据进行风电功率实时预测及误差分析，最终给出一种相对最优化的预测模型——动态神经网络时间序列预测法。

问题一，至少用三种预测方法（包括至少一种时间序列预测）实时预测各风电机组每天 96 个时点的值，使之与真实值对比，从而考核所建模型的合理性和准确性；我们分别采用了时间序列中的 Marlov 链模型、三次指数平滑法模型和 BP 神经网络模型三种预测方法。本问中，主要依赖于 BP 神经网络模型的长期预测功能，而借助于 Marlov 链模型和三次指数平滑法模型主要是预测中短期的数据，进而实现对各机组的长期或短期预测；分别用上述三种方法预测了 PA、PB、PC、PD、$P4$ 和 $P58$ 对应的时点值，通过准确率和合格率的分析对比，BP 神经网络模型对于预测离散的和随机波动的数据有较好的效果，其准确率为 $0.6 \leqslant r_1 \leqslant 0.85$，合格率为 $0.61 \leqslant r_1 \leqslant 0.86$，最终我们确定了 BP 神经网络模型来实时预测。

问题二，要求分析风电机组的汇聚对于预测结果误差的影响。亦即通过比较单台风电机组功率相对预测误差与多机总功率预测的相对误差，以找出普遍性规律，从而对风电机组汇聚给风电功率预测误差带来的影响做出相应的预测。根据问题一的比较结果，我们采用准确率较高的 BP 神经网络模型，运用最速下降 BP 算法计算出各个机组及总功率的预测值和他们的相对误差。然后通过 MATLAB 软件绘出单机和多机相对误差随各时点变化的相对误差图。最后经过观察分析相对误差图以及机理分析得出了较合理的结论：众多风电机组汇聚后会使某个时点的预测误差突然陡增，亦即在某些“异常”时点处，多机风电输出总功率值会突然减小。

问题三，主要是在问题一的基础上，进一步深化，进一步提高风电功率实时预测精度，使其更精确的对风电功率进行实时预测。在本问中，本章采用了动态神经网络时间序列预测法，借助其记忆功能（反馈作用）和动态神经网络易处理波动变化无规律的数据等特点，分别对 PA、PB、PC、PD、$P4$ 和 $P58$ 在 5月31日、6月1日、6月2日……6月6日的预测。通过对其隐层神经元个数以及对其与前面的输出、当前的输入的个数进行反复调整、反复校验、反复训练，进而得出各电机组功率预测的相对最优值，并直观的给出了各预测值与真

实值的对比图。最后，得出了风电功率预测精度不能无限提高的结论，并找出了阻碍精度改善的主要因素：模型本身、风速、风力、气温和气压等。

本章最大的特色在于采用了适于具有随机波动性、离散型的时间序列的 Marlov 链模型、BP 神经网络及高精度的动态神经网络时间序列预测模型。

关键词：实时预测、三次指数平滑、Marlov 链、BP 神经网络和动态神经网络时间序列。

19.3　基 本 假 设

（1）假设所给数据具有代表性和真实性；

（2）该风电场所对应的供电区域用电户数量不会发生很大调整；

（3）假设风电场系统硬件设备可靠性高，不会发生严重的机器瘫痪；

（4）假设风电场发电功率范围具有连续性且预测的值均在其有效范围内；

（5）不考虑自然灾害等不可预期的重大事件对风电机运行情况产生的重大冲击影响。

19.4　符 号 说 明

符　　号	意　　义	单　　位	备　　注
$S_t^{(n)}$	第 t 期的 n 次指数平滑值		$n=1,2,3$
P_i	标识为 i 的风电机的功率	kW	$i=A,B,C,D,4,58$
α	加权常数		$\alpha\in(0,1)$
y_t	第 t 期的风电机组功率实际值	kW	

19.5　问　题　一

19.5.1　问题一分析

问题一是关于风电场发电机组输出功率预测的研究，题目已经给出了 2006 年 5 月 10 日～2006 年 6 月 6 日时间段内该风电场中指定的四台风电机组（A、B、C 和 D）输出功率数据（分别记为 PA、PB、PC 和 PD，另设该四台机组总输出功率为 $P4$）及全场 58 台机组总输出功率数据（记为 $P58$）。

问题一要对所设定的时段先进行短期预测。例如某一天，即 α；然后对假定的 5 月 31 日～6 月 6 日进行长期预测，方能满足题意。本章中，将用 Marlov 链模型、三次指数平滑法模型和 BP 神经网络模型三种预测方法先对其进行短期预测，然后单独利用 BP 神经网络进行长期的预测。

问题一是对风电功率实时预测及误差分析。由于题目已给出了 2006 年 5 月 10 日～2006 年 6 月 6 日时间段内各机组的数据，通过分析题目所给数据，首先通过 MATLAB 软件绘出电机输出功率及多机总功率输出功率图以观察分析其特点走势，做出大致走势图，然后

根据图示，建立相应的数学模型。各发电机组输出功率曲线，编程如下：

```
clc,clear,close all
load('data.mat')
a = 23;  % 某一天
subplot(321),plot(PA(a,:));grid on   %新建窗口画图
xlabel('时点');ylabel('PA 输出功率');
title('PA 发动机输出功率曲线')
subplot(322),plot(PB(a,:));grid on
xlabel('时点');ylabel('PB 输出功率');
title('P5 发动机输出功率曲线')
subplot(323),plot(PC(a,:));grid on
xlabel('时点');ylabel('PC 输出功率');
title('PC 发动机输出功率曲线')
subplot(324),plot(PD(a,:));grid on
xlabel('时点');ylabel('PD 输出功率');
title('PD 发动机输出功率曲线')
subplot(325),plot(P4(a,:));grid on
xlabel('时点');ylabel('P4 输出功率');
title('P4 发动机输出功率曲线')
subplot(326),plot(P58(a,:));grid on
xlabel('时点');ylabel('P58 输出功率');
title('P58 发动机输出功率曲线')
```

运行程序输出结果如图 19-1 所示。

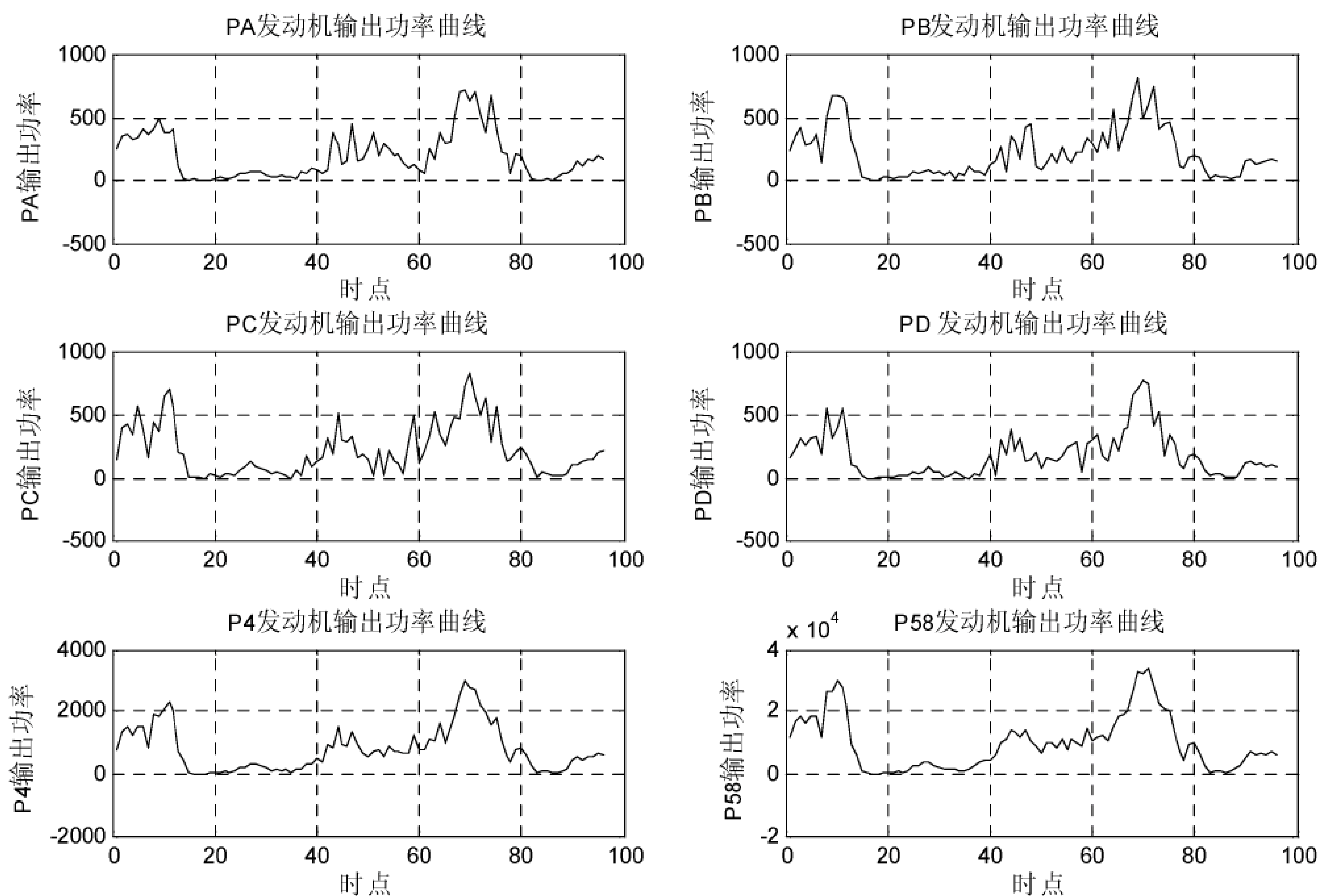


图 19-1　各发电机组输出功率曲线

由图 19-1 可看出，同一天内每一时点风电机组输出功率并无较强的规律性，且具有一定的随机波动性。同样地也可看出不同天内的各电机输出功率具有相似的特性，亦即具有周期性。因此，针对问题一，我们建立 Marlov 链模型、时间序列中的三次指数平滑法模型

和 BP 神经网络模型三个模型。其具体分析流程图如图 19-2 所示。

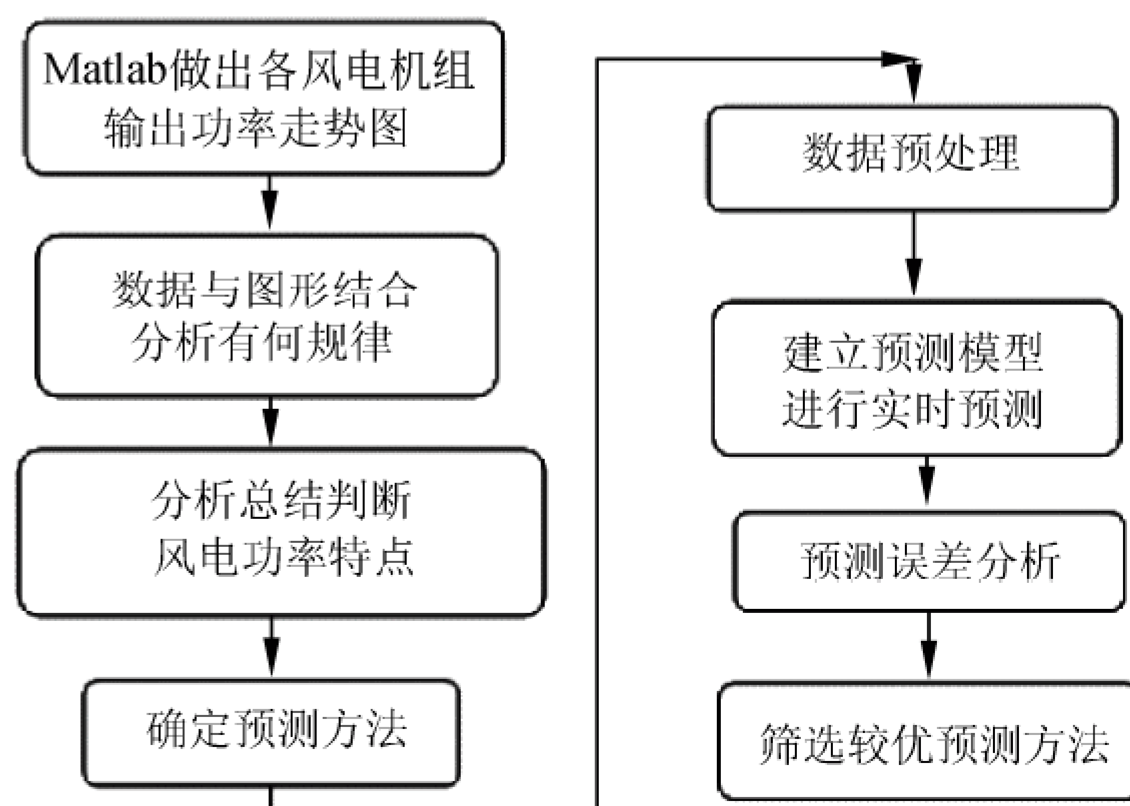


图 19-2　问题一分析流程图

19.5.2　马尔科夫链模型一

1．模型一分析

由问题一的分析，由于近地风的随机波动性和间歇性，因而风电功率变化也有不确定性。针对未来一段时间内的风电功率既对历史数据有一定的依赖性，又具有一定的随机变化性的特点，我们引入 Marlov 链的概念来对 5 月 31 日 0 时 0 分～6 月 6 日 23 时 45 分各发电机组输出功率 PA、PB、PC 和 PD 及总输出功率为 P4 和全场 58 台机组总输出功率数据（记为 P58）的变化趋势进行预测。

首先，题目所给数据为 5 月 10 日～6 月 6 日时间段内该风电场中指定的四台风电机组（A、B、C 和 D）每隔 15 分钟的输出功率数据。本章中，在该 Marlov 链模型中我们选用 5 月 29 日～6 月 6 日的数据作为滚动预测数据使用。预测 5 月 31 日的风电机功率，使用 5 月 29 日和 5 月 30 日的实际值，预测 6 月 1 日的风电机功率，使用 5 月 30 日和 5 月 31 日的实际值，以此递推。

由题目附件 2 中已给出了各天每隔 15 分钟的各机组风电功率值，我们定义增长率 A 机组的增长率为：

$$s_A = \frac{P_A(n+1) - P_A(n)}{P_A(n)} \quad (n = 1 \cdots 191)$$

为确保预测的精度和准确率较高，根据 s 的范围可将风电功率按其增长率划分为 5 种状态，即：

E1—快速上升，增长率 s>0.3，在程序中用“2”表示；

E2—缓慢上升，增长率 $0 < s < 0.3$，在程序中用“1”表示；

E3—相对不变，增长率 s=0，在程序中用“0”表示；

E4—缓慢下降，增长率 $-0.3 < s < 0$，在程序中用“-1”表示；

E5—快速下降，增长率 s<-0.3 在程序中用“-2”表示。

以 A 机组的输出功率为例，可绘出其增长率变化趋势图，编程如下：

```
%PA 5 月 31:0:0   计算的 MATLAB 程序如下：马儿克夫链预测
clc,clear;
load('data.mat')          %原始数据以列向量的方式存放在 workplace 文件中
PA=PA(2:29,:);
yt=PA(22:28,:); n=length(yt);
%增长率波动情况
for j=1:7
    for i=1:n-1
       y(j,i)=(yt(j,i+1)-yt(j,i))/yt(j,i);       % 增长率
    end
end
t=1:n-1;y1=-0.5;y2=-0.3;y3=0;y2=0.3;y3=0.5;
plot(t,y(1,:),t,y1,'-r',t,y2,'-r',t,y3,'-r')   % 画图
grid on                                % 栅格化
xlabel('时点 t'),ylabel('发电功率增长率 y');
title('PA5.31.0.0-5.31.23.45 发电功率随时点变化图像')
```

运行程序输出结果如图 19-3 所示。

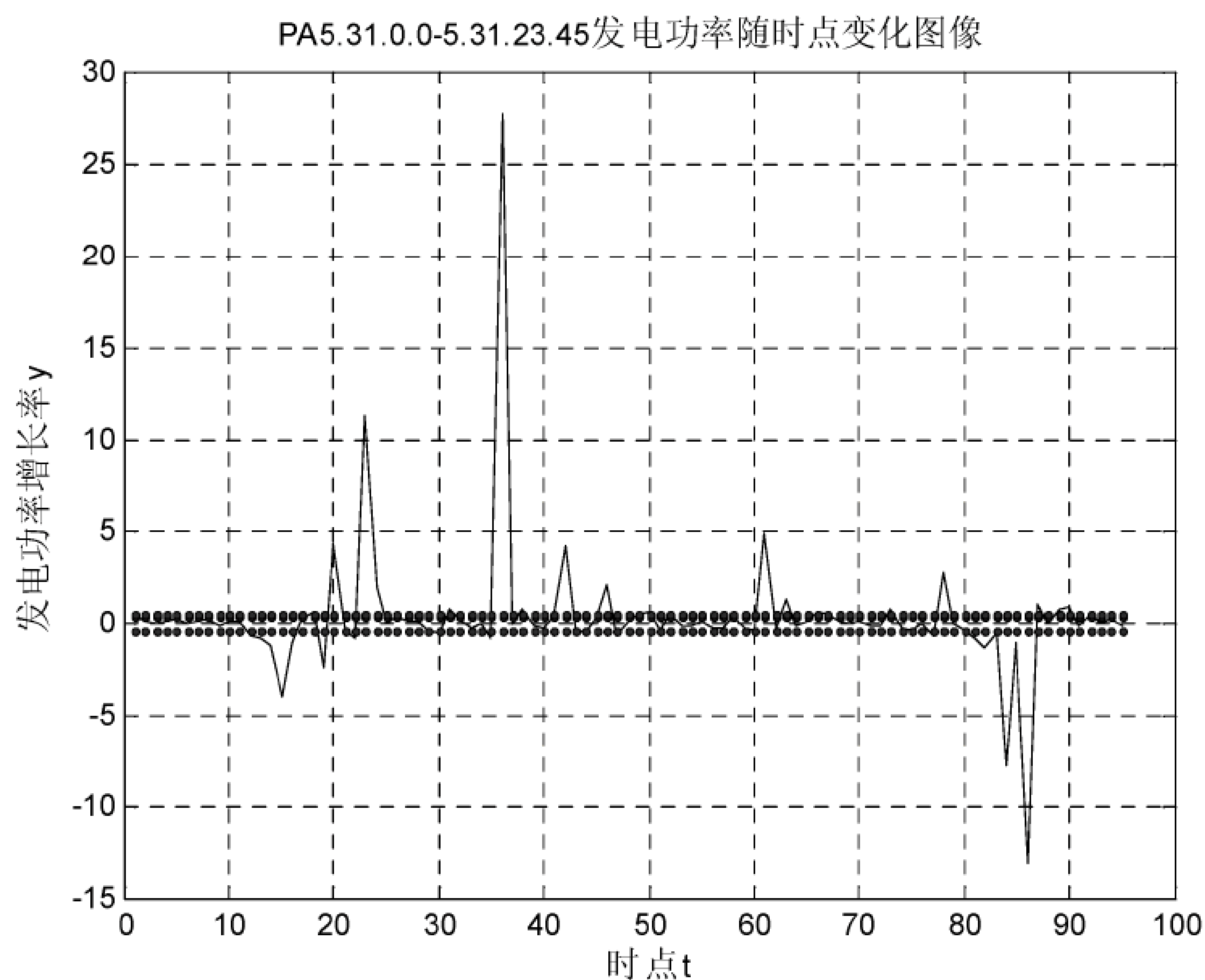


图 19-3　PA 机组增长率变化趋势图

于是对于任意一个状态 E_i 有状态转移方程：

$$P_i(n) = P_i(n-1)P \quad (4.1)$$

其中，P_i 为状态 E_i 的状态概率向量，P 为一步转移概率矩阵。

以 A 机组为例，取 2006-5-29～2006-5-30 之间 191 组增长率数值参加计算，其余机组求解类似。

Step1：由 A 机组 2006-5-29～2006-5-30 之间的数据得到各时点增长状态，如表 19-1 所示。

表 19-1　2006-5-29～2006-5-30 之间A机组风电功率增长状态

时　　点	状　　态	时　　点	状　　态
5-29-0-00	——	5-30-0-00	快速上升
5-29-0-15	缓慢上升	5-30-0-15	缓慢下降
5-29-0-30	缓慢下降	5-30-0-30	缓慢上升
5-29-0-45	缓慢上升	5-30-1-00	缓慢上升
5-29-1-00	缓慢上升	5-30-1-15	缓慢下降
5-29-1-15	缓慢下降	5-30-1-30	快速下降
……	……	……	……
5-29-22-30	缓慢上升	5-30-22-30	缓慢下降
5-29-22-45	缓慢上升	5-30-22-45	缓慢上升
5-29-23-00	缓慢下降	5-30-23-00	缓慢上升
5-29-23-15	缓慢下降	5-30-23-15	缓慢上升
5-29-23-30	缓慢下降	5-30-23-30	缓慢上升
5-29-23-45	缓慢上升	5-30-23-45	快速下降

Step2：由表 19-1 的数据可计算出各个状态 E_i 的频数。

$$M = M_i = (31, 65, 0, 74, 20)$$

Step3：计算样本空间中从状态 E_i 一步转移到状态 E_j 的样本个数 M_{ij} 。

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 15 & 4 \\ 7 & 29 & 0 & 26 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 22 & 0 & 31 & 9 \\ 8 & 5 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Step4：计算一步转移概率矩阵 P 。

$$P = \begin{bmatrix} 0.1290 & 0.2581 & 0 & 0.4839 & 0.1290 \\ 0.1077 & 0.4462 & 0 & 0.4000 & 0.0462 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1622 & 0.2973 & 0 & 0.4189 & 0.1216 \\ 0.4000 & 0.2500 & 0 & 0.1000 & 0.2500 \end{bmatrix}$$

Step5：计算任一状态 E_i 的状态概率 $P_i(n)$ ，即 $P_i(n) = P_i(n-1)P$ 。

通过 MATALB 编程（程序见附录 3）将附件 2 中数据代入可得 5 月 31 日内任一时点任一状态的概率：

```
%构造马尔科夫链模型
k=1;
for j=20:21
    for l=1:n
        zsj(1,k)=PA(j,l);          % 赋值操作
        k=k+1;
    end
end
n1=size(zsj);                      % 数组大小
b=zeros(1,n1(1,2)-1);              % 存放状态值
%2 1 0 -1 -2
```

```
%'2 表示快速下降、1 表示缓慢下降、0 表示基本保持不变、1 表示缓慢上升、2 表示快速上升'
c=zeros(1,25);                    % 表示相邻状态发生的概率
j=1;
for i=1:n1(1,2)-1
   a(j,i)=(zsj(j,i+1)-zsj(j,i))/zsj(j,i);
   if  a(j,i)>=0.3                  % 快速增长
       b(j,i)=2;
   elseif (a(j,i)<0.3)&&(a(j,i)>0)  % 缓慢增长
       b(j,i)=1;
   elseif  a(j,i)==0                % 相对稳定
       b(j,i)=0;
   elseif  a(j,i)>-0.3 && a(j,i)<0  % 缓慢下降
       b(j,i)=-1;
   elseif a(j,i)<-0.3               % 快速下降
       b(j,i)=-2;
   end
end
%c(1,25)表示相邻状态发生的概率统计
for i=1:n1(1,2)-2
 if  (b(j,i)==2&&b(j,i+1)==2)          % 当前时刻快速增长，下一时刻快速增长
        c(j,1)=c(j,1)+1;
    elseif(b(j,i)==2&&b(j,i+1)==1)     % 当前时刻快速增长，下一时刻缓慢增长
        c(j,2)=c(j,2)+1;
    elseif(b(j,i)==2&&b(j,i+1)==0)     % 当前时刻快速增长，下一时刻相对稳定
        c(j,3)=c(j,3)+1;
    elseif(b(j,i)==2&&b(j,i+1)==-1)    % 当前时刻快速增长，下一时刻缓慢下降
        c(j,4)=c(j,4)+1;
    elseif(b(j,i)==2&&b(j,i+1)==-2)    % 当前时刻快速增长，下一时刻快速下降
        c(j,5)=c(j,5)+1;
    elseif(b(j,i)==1&&b(j,i+1)==2)     % 当前时刻缓慢增长，下一时刻快速增长
        c(j,6)=c(j,6)+1;
    elseif(b(j,i)==1&&b(j,i+1)==1)     % 当前时刻缓慢增长，下一时刻缓慢增长
        c(j,7)=c(j,7)+1;
    elseif(b(j,i)==1&&b(j,i+1)==0)     % 当前时刻缓慢增长，下一时刻相对稳定
        c(j,8)=c(j,8)+1;
    elseif(b(j,i)==1&&b(j,i+1)==-1)    % 当前时刻缓慢增长，下一时刻缓慢下降
        c(j,9)=c(j,9)+1;
    elseif(b(j,i)==1&&b(j,i+1)==-2)    % 当前时刻缓慢增长，下一时刻快速下降
        c(j,10)=c(j,10)+1;
    elseif(b(j,i)==0&&b(j,i+1)==2)     % 当前时刻相对稳定，下一时刻快速增长
        c(j,11)=c(j,11)+1;
    elseif(b(j,i)==0&&b(j,i+1)==1)     % 当前时刻相对稳定，下一时刻缓慢增长
        c(j,12)=c(j,12)+1;
    elseif(b(j,i)==0&&b(j,i+1)==0)     % 当前时刻相对稳定，下一时刻相对稳定
        c(j,13)=c(j,13)+1;
    elseif(b(j,i)==0&&b(j,i+1)==-1)    % 当前时刻相对稳定，下一时刻缓慢下降
        c(j,14)=c(j,14)+1;
    elseif(b(j,i)==0&&b(j,i+1)==-2)    % 当前时刻相对稳定，下一时刻快速下降
        c(j,15)=c(j,15)+1;
    elseif(b(j,i)==-1&&b(j,i+1)==2)    % 当前时刻缓慢下降，下一时刻快速增长
        c(j,16)=c(j,16)+1;
    elseif(b(j,i)==-1&&b(j,i+1)==1)    % 当前时刻缓慢下降，下一时刻缓慢增长
        c(j,17)=c(j,17)+1;
    elseif(b(j,i)==-1&&b(j,i+1)==0)    % 当前时刻缓慢下降，下一时刻相对稳定
        c(j,18)=c(j,18)+1;
    elseif(b(j,i)==-1&&b(j,i+1)==-1)   % 当前时刻缓慢下降，下一时刻缓慢下降
        c(j,19)=c(j,19)+1;
```

```
    elseif(b(j,i)==-1&&b(j,i+1)==-2)      % 当前时刻缓慢下降，下一时刻快速下降
       c(j,20)=c(j,20)+1;
    elseif(b(j,i)==-2&&b(j,i+1)==2)       % 当前时刻快速下降，下一时刻快速增长
       c(j,21)=c(j,21)+1;
    elseif(b(j,i)==-2&&b(j,i+1)==1)       % 当前时刻快速下降，下一时刻缓慢增长
       c(j,22)=c(j,22)+1;
    elseif(b(j,i)==-2&&b(j,i+1)==0)       % 当前时刻快速下降，下一时刻相对稳定
       c(j,23)=c(j,23)+1;
    elseif(b(j,i)==-2&&b(j,i+1)==-1)      % 当前时刻快速下降，下一时刻缓慢下降
       c(j,24)=c(j,24)+1;
    elseif(b(j,i)==-2&&b(j,i+1)==-2)      % 当前时刻快速下降，下一时刻快速下降
       c(j,25)=c(j,25)+1;
    end
end
d=zeros(1,5);
i=1;
%统计某一个状态到另一个状态的次数和
for j=1:25
    if(j<6)
       d(i,1)=d(i,1)+c(i,j);    % 下一时刻快速增长的个数
    elseif(j>5&&j<11)
       d(i,2)=d(i,2)+c(i,j);    % 下一时刻缓慢增长的个数
    elseif(j>10&&j<16)
       d(i,3)=d(i,3)+c(i,j);    % 下一时刻相对稳定的个数
    elseif(j>15&&j<21)
       d(i,4)=d(i,4)+c(i,j);    % 下一时刻缓慢下降的个数
    else
       d(i,5)=d(i,5)+c(i,j);    % 下一时刻快速下降的个数
    end
end
e= zeros(5,5);                  % 状态概率矩阵
i=1;
for j=1:25
    if(j<6)
       if(d(i,1)==0)
       e(5,j)=0;
       else
       e(1,j)=c(i,j)/d(i,1);             %该 2 状态转移到另一个状态的概率
       end
    elseif(j>5&&j<11)
       if(d(i,2)==0)
        e(5,j-5)=0;
       else
       e(2,j-5)=c(i,j)/d(i,2);           %该 1 状态转移到另一个状态的概率
       end
    elseif(j>10&&j<16)
       if(d(i,3)==0)
       e(5,j-10)=0;
       else
       e(3,j-10)=c(i,j)/d(i,3);          %该 0 状态转移到另一个状态的概率
       end
    elseif(j>15&&j<21)
       if(d(i,4)==0)
       e(5,j-15)=0;
       else
       e(4,j-15)=c(i,j)/d(i,4);          %该-1 状态转移到另一个状态的概率
       end
    else
       if(d(i,5)==0)
```

```
        e(5,j-20)=0;
        else
        e(5,j-20)=c(i,j)/d(i,5);           %该-2 状态转移到另一个状态的概率
        end
    end
end
f=b(:,n1(1,2)-1);                          %最后的增长模式
g=zeros(1,5);
m=1;
if(f(1,1)==2)                              %预测
    h=[1 0 0 0 0 ]*e;
    for k=1:96
        h=h*e;   % 状态概率
        yuce(m,:)=h;
        m=m+1;
    end
elseif(f(1,1)==1)
    g(1,:)=[0 1 0 0 0 ];
    h=g(1,:)*e;
    for k=1:96
        h=h*e;  % 状态概率
        yuce(m,:)=h;
        m=m+1;
    end
 elseif(f(1,1)==0)
    g(1,:)=[0 0 1 0 0 ];
    h=g(1,:)*e;
    for k=1:96
        h=h*e;  % 状态概率
        yuce(m,:)=h;
        m=m+1;
    end
elseif(f(1,1)==-1)
    g(1,:)=[0 0 0 1 0 ];
    h=g(1,:)*e;
    for k=1:96
        h=h*e;  % 状态概率
        yuce(m,:)=h;
        m=m+1;
    end
elseif(f(1,1)==-2)
    g(1,:)=[0 0 0 0 1 ];
    h=g(1,:)*e; % 状态概率
    for k=1:96
        h=h*e;
        yuce(m,:)=h;
        m=m+1;
    end
end
w=size(yuce);
for i=1:w(1,1)
    max1=max(yuce(i,:));
    for j=1:w(1,2)
        if yuce(i,j)==max1;
            liehao(i,1)=j;%1 表示快速下降、2 表示缓慢下降、3 表示基本不变、4 表示缓慢
上升、5 表示快速上升
        end
    end
end
```

运行程序输出结果如表 19-2 所示。

表 19-2　A机组 5 月 31 日内各状态各时点概率值

时点	E1	E2	E3	E4	E5	时点	E1	E2	E3	E4	E5
1	0.1948	0.3070	0	0.3604	0.1378	49	0.1650	0.336	0	0.3876	0.112
2	0.1718	0.3288	0	0.3818	0.1176	50	0.1650	0.336	0	0.3876	0.112
3	0.1665	0.3339	0	0.3864	0.1132	51	0.1650	0.336	0	0.3876	0.112
4	0.1654	0.3351	0	0.3873	0.1122	52	0.1650	0.336	0	0.3876	0.112
5	0.1651	0.3354	0	0.3875	0.1120	53	0.1650	0.336	0	0.3876	0.112
6	0.1651	0.3354	0	0.3876	0.1119	54	0.1650	0.336	0	0.3876	0.112
7	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	55	0.1650	0.336	0	0.3876	0.112
8	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	56	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
9	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	57	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
10	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	58	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
38	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	86	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
39	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	87	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
40	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	88	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
41	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	89	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
42	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	90	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
43	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	91	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
44	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	92	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
45	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	93	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
46	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	94	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
47	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	95	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112
48	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.1119	96	0.1650	0.3355	0	0.3876	0.112

2．结果分析

如果目前预测对象处于状态 E_i（i=1、2、3、4 和 5），这时 P_{ij} 就描述了目前状态 E$_i$ 在未来将转向状态 E_j（j=1、2、3、4 和 5）的可能性。按最大概率原则，即是选择（P_{i1}、P_{i3}、P_{i4} 和 P_{i5}）中最大者对应的状态即为预测结果，如表 19-3 所示。

表 19-3　PA.5 月 31 日各时点预测结果

5.31	0:0	0:15	0:30	…	22:45	23:00	23:15	23:30	23:45
预测	E4	E4	E4	…	E4	E4	E4	E4	E4

由于 5 月 31 日内 A 机组风电功率的增长率状态为 E4，即缓慢下降对每个状态向量，均取其中最大的那个概率值。则以上结果表明：在未来一天内 A 机组风电功率趋于缓慢下降的概率较呈现其他状态的概率大得多，因此可以说 A 机组在 5 月 31 日内趋于缓慢下降。

对于其他机组及总机组，将依然按照上述 Marlov 链的计算方法以此计算，利用 MATALB 编写程序，可得预测结果，程序见附录 3 文件夹。

19.5.3　三次指数平滑法模型二

1．三次指数平滑法的建立

所谓的指数平滑法是对加权移动平均法进一步发展和完善而提出的数学模型。根据平滑次数的不同，又分为一次指数平滑法、二次指数平滑法和三次指数平滑法等。

一次指数平滑法实际是对简单移动平均法加以适当的修定而引申出的一种预测方法。它只适用于没有明显趋势变化的时间序列。一次指数平滑法的基本预测方程为：

$$S_t^{(1)} = ay_t + (1-\alpha)S_{t-1}^{(1)}$$

式中，$S_t^{(1)}$——第 t 期的一次指数平滑值；

$S_{t-1}^{(1)}$——第 t-1 期的一次指数平滑值；

y_t——第 t 期观测值；

α——平滑常数，$0<\alpha<1$。

由上式可以看出，决定一次指数平滑预测方法的准确性有两个因素，即 α 和 $S_0^{(1)}$。其中，平滑指数 α 可由实际情况确定其合理大小，一般根据最小均方差选取。

二次指数平滑法是对一次指数平滑法的引申，应用于有明显上升或下降趋势的时间序列，可使预测值更接近实际。将一次指数平滑值序列再作一次指数平滑处理，即得到二次平滑法的计算公式：

$$S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(2)}$$

$S_t^{(2)}$ 称为二次指数平滑值。二次指数平滑值不能直接用做下期预测值，而是需要建立预测方程。如果时间序列具有线性趋势，则可根据 $S_t^{(1)}$ 和 $S_t^{(2)}$ 建立线性预测方程：

$$\hat{y}_{t+\tau} = \hat{\alpha}_t + \hat{b}_t\tau$$

式中，τ 为预测提前期。其中：

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_t = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)} \\ \hat{b}_t = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) \end{cases}$$

三次指数平滑法是二次指数平滑法的进一步推广，应用于具有非线性趋势的时间序列的预测问题。三次指数平滑就是对二次指数平滑值序列再做一次指数平滑处理，即：

$$S_t^{(3)} = \alpha S_t^{(2)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(3)}$$

其中，$S_t^{(3)}$ 称为三次指数平滑值。

三次指数平滑值亦不能直接用于预测。如果时间序列的长期趋势呈抛物线型，则可根据 $S_t^{(1)}$、$S_t^{(2)}$ 和 $S_t^{(3)}$ 建立如下二次多项式预测方程：

$$\hat{y}_{t+\tau} = \hat{a}_t + \hat{b}_t\tau + \hat{c}_t\tau^2, \tau = 1,2,\ldots$$

仿照二次指数平滑法的推导方法，可推得估计值公式：

$$\begin{cases} \hat{a}_t = 3S_t^{(1)} - 3S_t^{(2)} + S_t^{(3)} \\ \hat{b}_t = \dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)}\left[(6-5\alpha)S_t^{(1)} - 2(5-4\alpha)S_t^{(2)} + (4-3\alpha)S_t^{(3)}\right] \\ \hat{c}_t = \dfrac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}\left(S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)}\right) \end{cases}$$

所以，最终可得三次指数平滑预测模型：

$$\begin{cases} \hat{y}_{t+\tau} = \hat{a}_t + \hat{b}_t\tau + \hat{c}_t\tau^2, \tau = 1, 2, \ldots \\ \hat{a}_t = 3S_t^{(1)} - 3S_t^{(2)} + S_t^{(3)} \\ \hat{b}_t = \dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)}\left[(6-5\alpha)S_t^{(1)} - 2(5-4\alpha)S_t^{(2)} + (4-3\alpha)S_t^{(3)}\right] \\ \hat{c}_t = \dfrac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}\left(S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)}\right) \\ S_t^{(1)} = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}^{(1)} \\ S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(2)} \\ S_t^{(3)} = \alpha S_t^{(2)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(3)} \end{cases}$$

当数据较多时，一般可选取 $S_0^{(1)} = S_0^{(2)} = y_1$；当数据较少时，也可用最初几期观测值的平均值作为初始平滑值。

2．三次指数平滑预测法求解

求解流程图如图 19-4 所示。

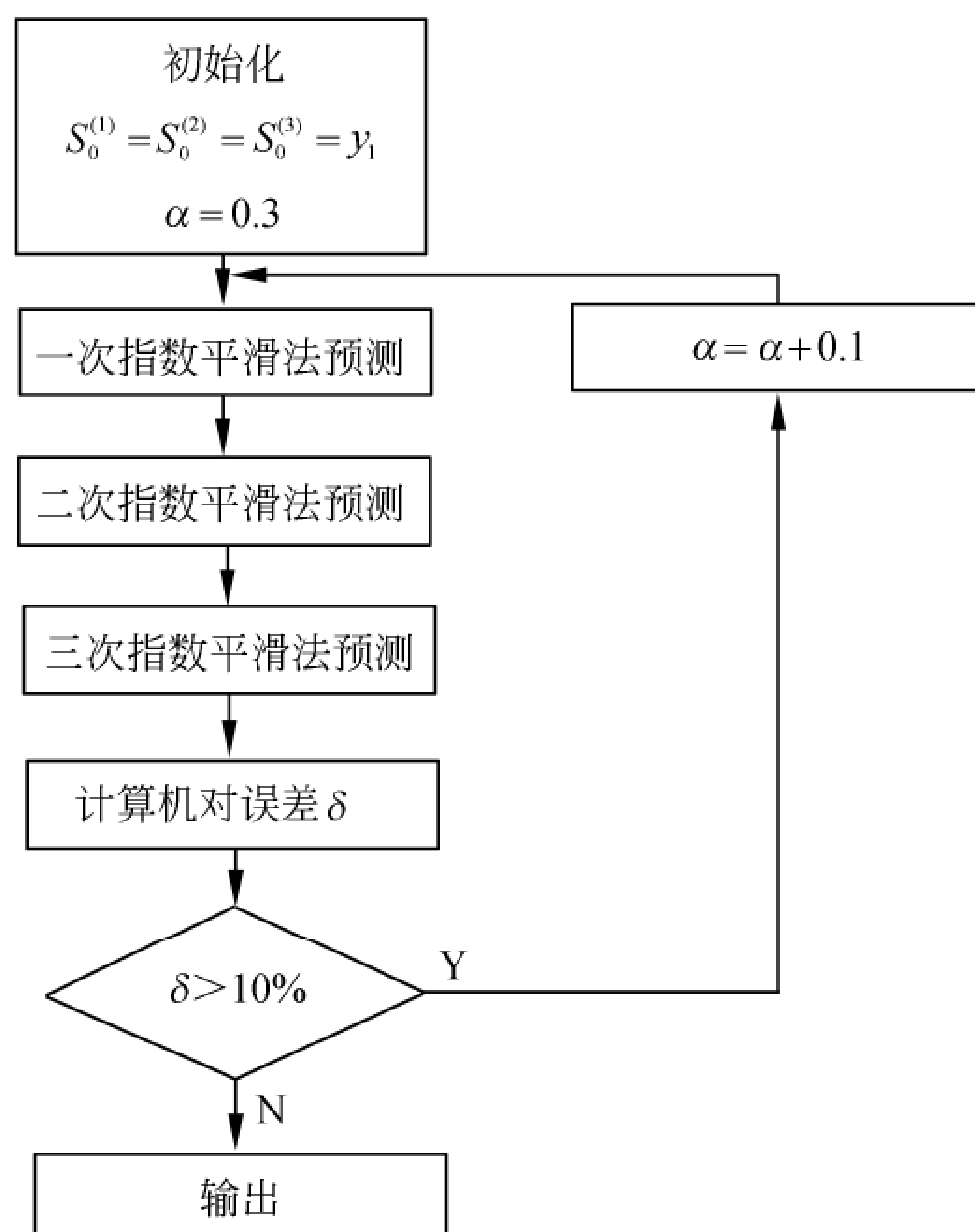


图 19-4　三次指数平滑流程图

针对给出的 *PA*、*PB*、*PC*、*PD*、*P*4 和 *P*58，其动态变化情况复杂，且呈现出明显的非线性和无规律性等特点，拟采用建立三次指数平滑法对风电机功率进行预测，为后期风电机合理规划使用提供理论支持。经检验，平滑系数为 0.9 时为最佳。MATLAB 编程如下。

```
%PA 5 月 31:0:0   计算的 MATLAB 程序如下：三次指数平滑预测
clc,clear
load('data.mat')     %原始数据以列向量的方式存放在 workplace 文件中
PA=PA(2:29,:);
PA=PA';
yt=PA(:,22); n=length(yt);
alpha=0.9;           %平滑系数如果时间序列具有快速明显的变化时，则 α 宜选用较大的值
st1_0=mean(yt(1:3)); st2_0=st1_0;st3_0=st1_0;  % 初始值
st1(1)=alpha*yt(1)+(1-alpha)*st1_0;    % S_t^(i)=αy_t+(1-α)S_{t-1}^(i)
st2(1)=alpha*st1(1)+(1-alpha)*st2_0;   % S_t^(i+1)=αS_t^(i)+(1-α)S_{t-1}^(i+1)
st3(1)=alpha*st2(1)+(1-alpha)*st3_0;
for i=2:n
   st1(i)=alpha*yt(i)+(1-alpha)*st1(i-1);   % 一次预测 S_t'
   st2(i)=alpha*st1(i)+(1-alpha)*st2(i-1);  % 二次预测 S_t''
   st3(i)=alpha*st2(i)+(1-alpha)*st3(i-1);  % 三次预测 S_t'''
end
xlswrite('PA531.xls',[st1',st2',st3'])
st1=[st1_0,st1];st2=[st2_0,st2];st3=[st3_0,st3];
a=3*st1-3*st2+st3;
b=0.5*alpha/(1-alpha)^2*((6-5*alpha)*st1-2*(5-4*alpha)*st2+(4-3*alpha)*st
3);
c=0.5*alpha^2/(1-alpha)^2*(st1-2*st2+st3);
yhat=a+b+c;
%预测 yt+1 的值
xlswrite('PA531.xls',yhat','Sheet1','D1')
%求解三次指数平滑预测方程 c、b、a 系数
xishu=[c(n+1),b(n+1),a(n+1)];
%Sheet1.E1 列存放真实值
xlswrite('PA531.xls',yt,'Sheet1','E1')
%误差分析，预测值与真实值之差
st3=st3(2:n+1)';
delta=abs(st3-yt);
xlswrite('PA531.xls',delta,'Sheet1','F1')              %绝对误差
deltaxd=delta./yt;
xlswrite('PA531.xls',deltaxd,'Sheet1','G1')            %计算相对误差
deltajdminmax=minmax(delta');
xlswrite('PA531.xls',deltajdminmax,'Sheet1','H1')      %计算绝对误差的最小值
                                                        和最大值
deltaxdminmax=minmax(deltaxd');
xlswrite('PA531.xls',deltaxdminmax,'Sheet1','J1')      %计算相对误差的最小值
                                                        和最大值
deltasum=sum(sum(delta));%总误差值
xlswrite('PA531.xls',deltasum,'Sheet1','L1')
%函数绘图
plot(1:n,yt,1:n,st3(1:n),'r')
legend('实际值','预测值',2)
grid on
xlabel('时点 x'),ylabel('发电功率 y');
title('PA5.31.0.0-5.31.23.45 发电功率随时点变化图像')
```

运行程序整理给出对 *PA* 预测的结果，如表 19-4 和表 19-5 所示。*PB*、*PC*、*PD*、*P4* 和 *P58* 等量与此预测的原理相同，其详细计算可见附录 3 文件（程序文档），此不赘述。

表 19-4　*PA*在时间范围*a*内的实时预测

时间序列	*PA* 实测值 y_t	一次平滑值	二次平滑值	三次平滑值	y_{t+1} 的估计值	绝对误差	相对误差
1	249.0938	256.425	263.0232	268.9615	322.4063	19.86768	0.07976
2	355.3125	345.4238	337.1837	330.3615	124.4626	24.95103	0.070223
3	362.8125	361.0736	358.6846	355.8523	569.608	6.960183	0.019184
4	323.8125	327.5386	330.6532	333.1731	340.6313	9.360625	0.028908
5	338.625	337.5164	336.83	336.4644	236.9234	2.160646	0.006381
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
48	148.875	175.7952	197.3261	214.2885	969.7214	65.41345	0.439385
49	155.25	157.3045	161.3067	166.6049	-496.362	11.35485	0.073139
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
92	109.5	111.8223	113.2899	114.0238	230.4877	4.523782	0.041313
93	156.75	152.2572	148.3605	144.9268	23.77469	11.82317	0.075427
94	144.6563	145.4164	145.7108	145.6324	237.5307	0.976106	0.006748
95	180.75	177.2166	174.0661	171.2227	105.1915	9.527309	0.05271
96	153.0938	155.5061	157.3621	158.7481	239.4443	5.654342	0.036934

表 19-5　*PA*在时间范围*b*内的实时预测

时间序列	*PA* 实测值 y_t	一次平滑值	二次平滑值	三次平滑值	y_{t+1} 的估计值	绝对误差	相对误差
1	249.0938	256.425	263.0232	268.9615	322.4063	19.86768	0.07976
2	355.3125	345.4238	337.1837	330.3615	124.4626	24.95103	0.070223
3	362.8125	361.0736	358.6846	355.8523	569.608	6.960183	0.019184
4	323.8125	327.5386	330.6532	333.1731	340.6313	9.360625	0.028908
5	338.625	337.5164	336.83	336.4644	236.9234	2.160646	0.006381
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
336	34.40625	33.16925	32.23071	31.50273	-53.4657	2.903518	0.084389
337	56.34375	54.0263	51.84674	49.81234	63.61228	6.53141	0.115921
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
668	386.625	356.2837	328.1337	302.0452	256.9184	84.57981	0.218764
669	194.1563	210.369	222.1455	230.1355	843.9353	35.97918	0.18531
670	128.3438	136.5463	145.1062	153.6092	-286.046	25.26537	0.196857
671	134.625	134.8171	135.846	137.6224	45.24763	2.997356	0.022264
672	131.4845	131.8178	132.2206	132.7608	199.2681	1.276268	0.009707

为了检验建立的预测模型的精确度，将风电机的实际值与预测值进行比较分析，如图 19-5 和图 19-6 所示。

从图 19-5 和图 19-6 可看出，先从 5 月 10 日～6 月 6 日整体上进行预测，得到函数三次指数平滑方程，然后进行对平滑系数取值，逐步逼近实际函数图像，最终得到三次指数平滑法对风电机功率的变化均可以较精确的预测，且精度较高。说明三次指数平滑法对风

电机功率的非线性和非规律性的适应性较强，可以较好的预测功率的非线性和非规律性特点。但该方法权数的确定具有很强的主观性，当数据特征发生变化时，指数平滑法不能自动调整权数，以适应新数据的要求；同时，当预测对象保持较长时间的稳定后，出现突然上升或下降的趋势时，指数平滑法就难以适应。因此，指数平滑法应用于中短期预测时误差较小，效果较好。在本章中，采用一个时点预测下一个时点，不断的滚动向前，长远预测误差将很大。

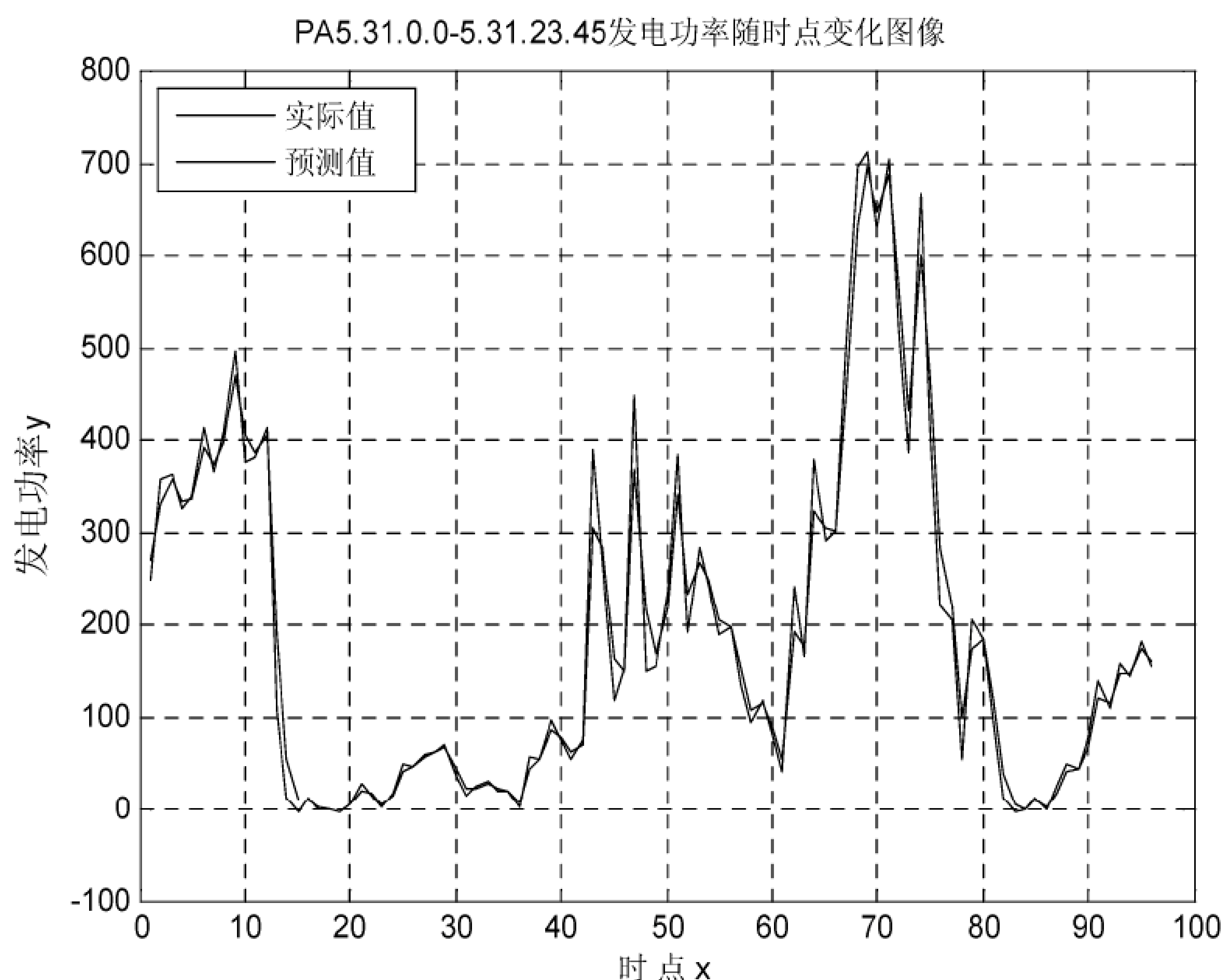


图 19-5　PA 风电机功率 5 月 31 日预测值图

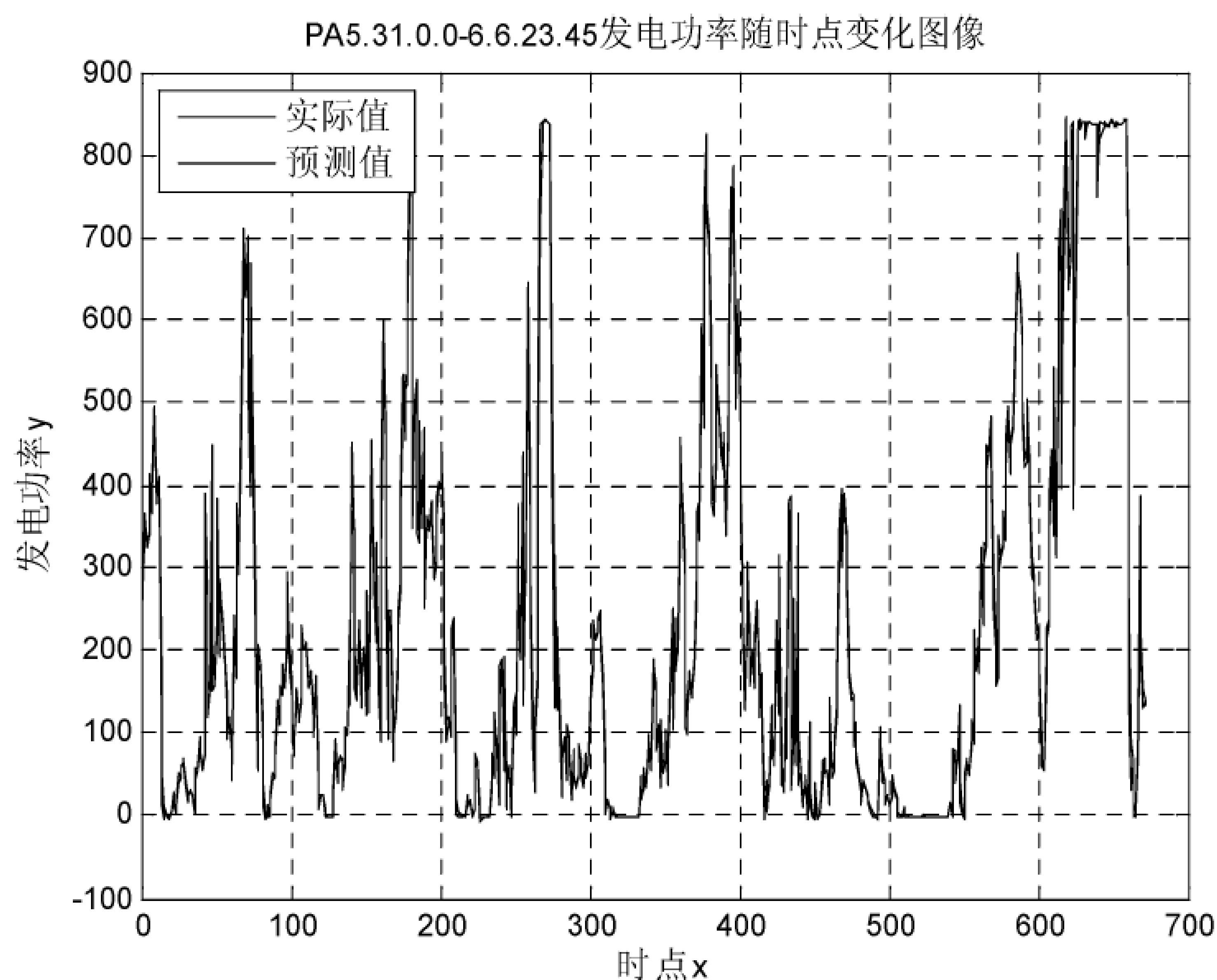


图 19-6　PA 风电机功率 5.31～6.6 预测值图

对于其他机组及总机组，将依然按照上述三次指数平滑模型的计算方法依次计算，利用 MATALB 编写程序，可得预测结果。

19.5.4　BP 神经网络模型三

1．BP神经网络引言

利用输出后的误差来估计输出层的直接前导层的误差，再用这个误差估计更前一层的误差，如此一层一层的反传下去，就获得了所有其他各层的误差估计。

本章采用的是多层感知器的误差反向传播算法（Error Back Proragation），即 BP 算法。其基本思想是，学习过程由信号的正向传播与误差的反向传播两个过程组成。正向传播时，输入样本从输入层传入，经各隐层逐层处理后，传向输出层。若输出层的实际输出与期望的输出不符，则转入误差的反向传输阶段。误差反传是将输出误差以某种形式通过隐层向输入层逐层反传，并将误差分摊给各层的所有单元，从而获得各层单元的误差信号，该误差信号即作为修正各单元权值的依据。信号正向传播与误差反向传播的各层权值的调整是反复进行的，直至网络输出的误差减少到可接受的程度，或是进行到预先设定的学习次数，结构图如图 19-7 所示。

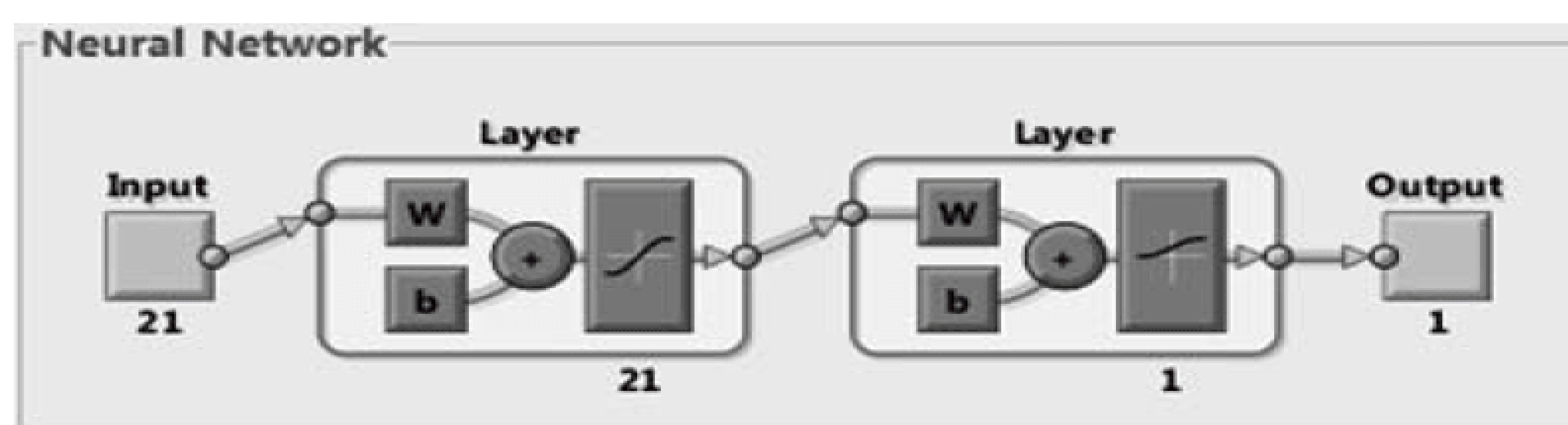


图 19-7　BP 神经网络结构图

2．符号说明

$X=(x_1,x_2,x_3,\cdots x_i)^T\ (i=1,2,\cdots,28)$　　输入变量向量组

$Y=(y_1,y_2,\ldots y_i,\ldots y_m)^T$　　隐层输出变量（m 为隐变量个数）向量组

$H=(h_1,h_2,h_3,\cdots,h_i)^T$　　输出层输出向量组（所预测时间范围内的功率）

$D=(d_1,d_2,d_3,\cdots d_i)^T$　　期望输出向量组（为常向量组）

$W=(w_1,w_2,\cdots w_m)^T$　　输入层到隐层之间的权值矩阵

$V=(v_1,v_2\cdots v_i)^T$　　隐层到输出层之间的权值矩阵

$\eta\in(0,1)$　　比例常数，表示学习速率

3．BP神经网络的建立

由结构原理图 19-7，$P_j\ (j=A、B、C、D、4、58)$所对应 a、b 的实测值（P_i 表示用于预测的历史数据）作为输入参数变量 $X=(x_1,x_2,x_3,\cdots x_i)^T$，隐层输出变量设为 1 个，用 $Y=y_i^T\ (i=1\cdots7)$表示，输出层输出向量（功率）用向量组 H 表示，而期望输出为常向量组

D。根据 BP 神经网络原理可得以下方程。

对于输出层，有：

$$\begin{cases} h_k = f(net_k) & k = 1,2,\cdots,28 \\ net_k = \sum_{j=1}^{m} v_{jk} y_j & k = 1,2,\cdots,28 \end{cases}$$

对于隐层，有：

$$\begin{cases} y_j = f(net_j) & j = 1,2 \ldots m \\ net_j = \sum_{i=1}^{m6} w_{ij} x_i & j = 1,2 \ldots m \end{cases}$$

其中，$f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$。

4．BP神经网络的求解

Step1：首先对数据进行标准化处理，归一于 0～1。

Step2：网络初始化。网络将自行对权值矩阵 W、V 赋随机数，将样本模式计数器 p 和训练次数计数 q 置为 1，误差 E 置 0，学习率 $\eta = 0.1$，网络训练后达到的精度 E_{min} 取 0.01。

Step3：输入训练样本对，计算各层输出。用当前样本对向量数组 X、D 赋值，并计算 Y 和 H 各分量；其训练过程如图 19-8 所示。

Algorithms

Training: Gradient Descent (traingd)
Performance: Mean Squared Error (mse)
Derivative: Default (defaultderiv)

Progress

Epoch:	0	30000 iterations	30000
Time:		0:03:55	
Performance:	0.0658	0.0139	0.0100
Gradient:	0.141	0.00514	1.00e-05
Validation Checks:	0	0	6

图 19-8　BP 神经网络训练图

Step4：计算网络输出误差。共有 6 对训练样本，网络对于第 i 个样本具有误差,总输出误差（均方根误差）为：

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{96}\left(d_k{}^p - h_k{}^p\right)^2}{96}}$$

利用 MATLAB 可得到训练网络后均方根误差，如图 19-9 所示。

Step5：调整各层权值。权值调整量为：

$$\Delta w_{jk} = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{jk}} \quad j = 1,2\ldots,4;\ k = 1,2,\cdots,m$$

$$\Delta v_{jk} = -\eta \frac{\partial E}{\partial v_{jk}} \quad j = 1,2\ldots m;\ k = 1,2,3$$

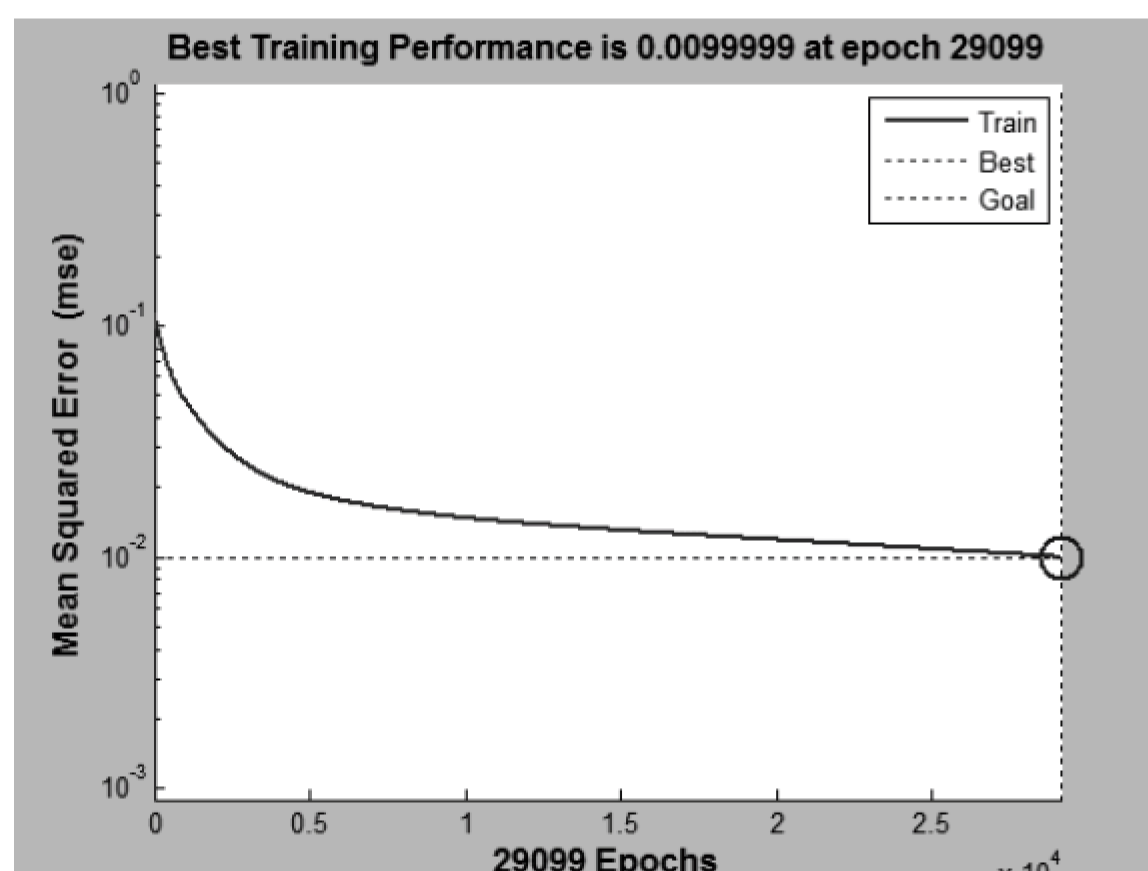


图 19-9　均方差与训练步长图

Step6：检查是否对所有样本完成一次轮训。若 $p<4$，计数器 p 和 q 同时加 1，返回 Step2，否则进行下一步。

Step7：检查网络总误差是否达到精度要求。若 $E_{RME}<E_{\min}$，训练结束，否则 E 置 0，p 置 1，返回 Step2。

综上所述，绘制流程图大致如图 19-10 所示。

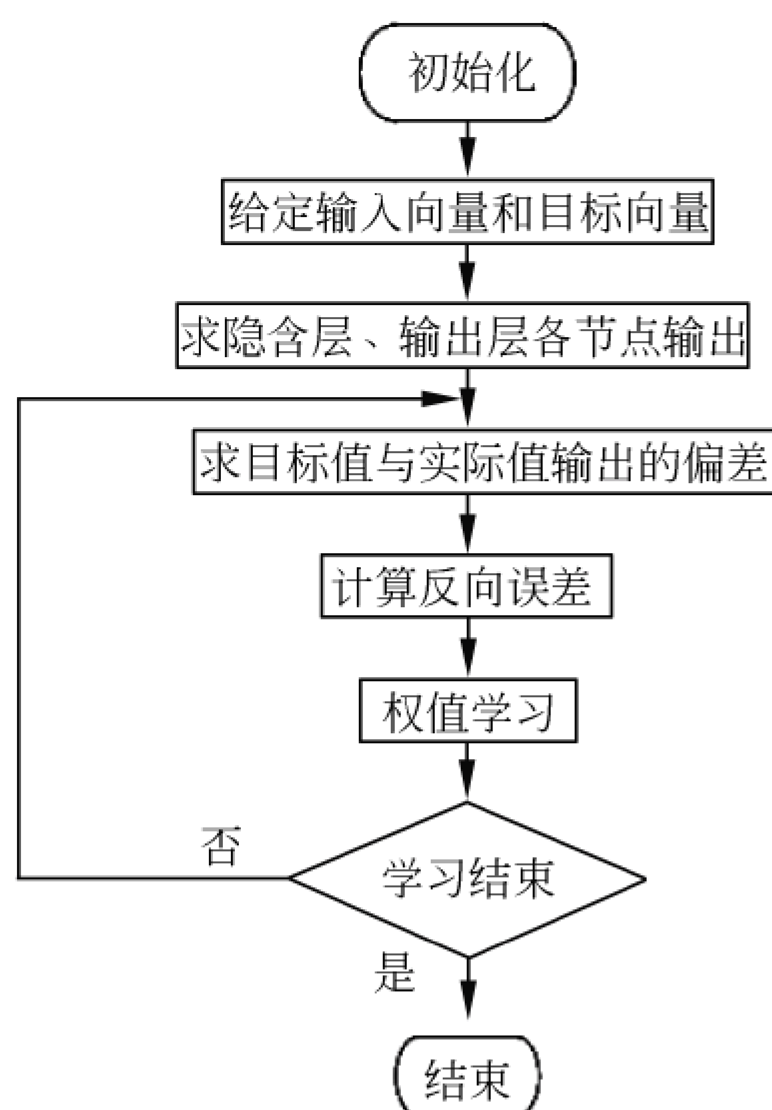


图 19-10　BP 神经网络流程图

5．BP神经网络模型结果分析

根据上述建立的输入层和输出层数学模型，运用 MATLAB 求解：

```
%PA 5 月 31:0:0   计算的 MATLAB 程序如下：BP 神经网络预测
%5 月 31 位于第 23 行
clc,clear
load('data.mat')  %原始数据以列向量的方式存放在 workplace 文件中
PA=PA(2:29,:);
```

```
%数据的标准化
N=size(PA);
for j=1:N(1,2)
    PAHminmax=minmax(PA(:,j)');
    for i=1:N(1,1)
        PA(i,j)=(PA(i,j)-PAHminmax(1,1))/(PAHminmax(1,2)-PAHminmax(1,1));
% 数据标准化
    end
end
%以每天的从 0 时计数起，每隔十五分钟作为输入
P=PA(2:22,:);
%以 5 月 31 的间隔十五分钟的发电量作为目标向量
T=PA(23,:);
%创建一个 BP 神经网络，每一个输入向量的取值范围为[0 ,1]，隐含层有 22 个神经元
%输出层有一个神经元，隐含层的激活函数为 tansig，输出层的激活函数为%logsig
%训练函数为梯度下降函数，即标准学习算法
for i=1:21
    a(i,1)=0;
    a(i,2)=1;
end
net=newff(a,[21,1],{'tansig','logsig'},'traingd');     % 新建 BP 网络结构
net.trainParam.epochs=30000;                            % 训练步长
net.trainParam.goal=0.01;                               % 误差截止目标
%设置学习速率为 0.1
LP.lr=0.1;
%训练网络
net=train(net,P,T);
%预测 5 月 31 的发电量数据
T1=sim(net,P);                    %预测值
%PA.5 月 31 日发电量真实值
T0=PA(23,:);
%预测值与实际值的误差
for i=1:N(1,2)
    error(1,i)=T1(1,i)-T0(1,i);
end
%绘制误差图
figure(1)
plot(1:N(1,2),error(1,1:N(1,2)),'-*')
grid on
xlabel('时点 x'),ylabel('发电功率误差 y');
title('PA6.1.0.0-5.31.23.45 发电功率误差图像')
%绘制实时函数图
figure(2)
plot(1:N(1,2),T0(1,:),1:N(1,2),T1(1,:),'r')
grid on
legend('实际值','预测值',2)
xlabel('时点 x'),ylabel('发电功率 y');
title('PA6.1.0.0-5.31.23.45 发电功率实时函数图像')
```

得到 a 和 b 区段的各个时点的预测值，其函数图像如图 19-11 和图 19-12 所示。

由图 19-11 和图 19-12 可知，预测曲线较之于原始数据曲线而言，拟合度很高，且拟合曲线在每个时点逼近于实际值，预测图形与实际值图形走势大致相同。

图 19-13 和图 19-14 分别给出了 *PA* 在 5 月 31 日时段期间每个时点的误差值大小和在 6 月 1 日时段期间每个时点的误差值大小。从图 19-11～19-14 中看出，BP 神经网络预测值与实际值之间的误差较小，且误差分布于一四象限，误差值之间无线性关系，故该预测模

型较合理。

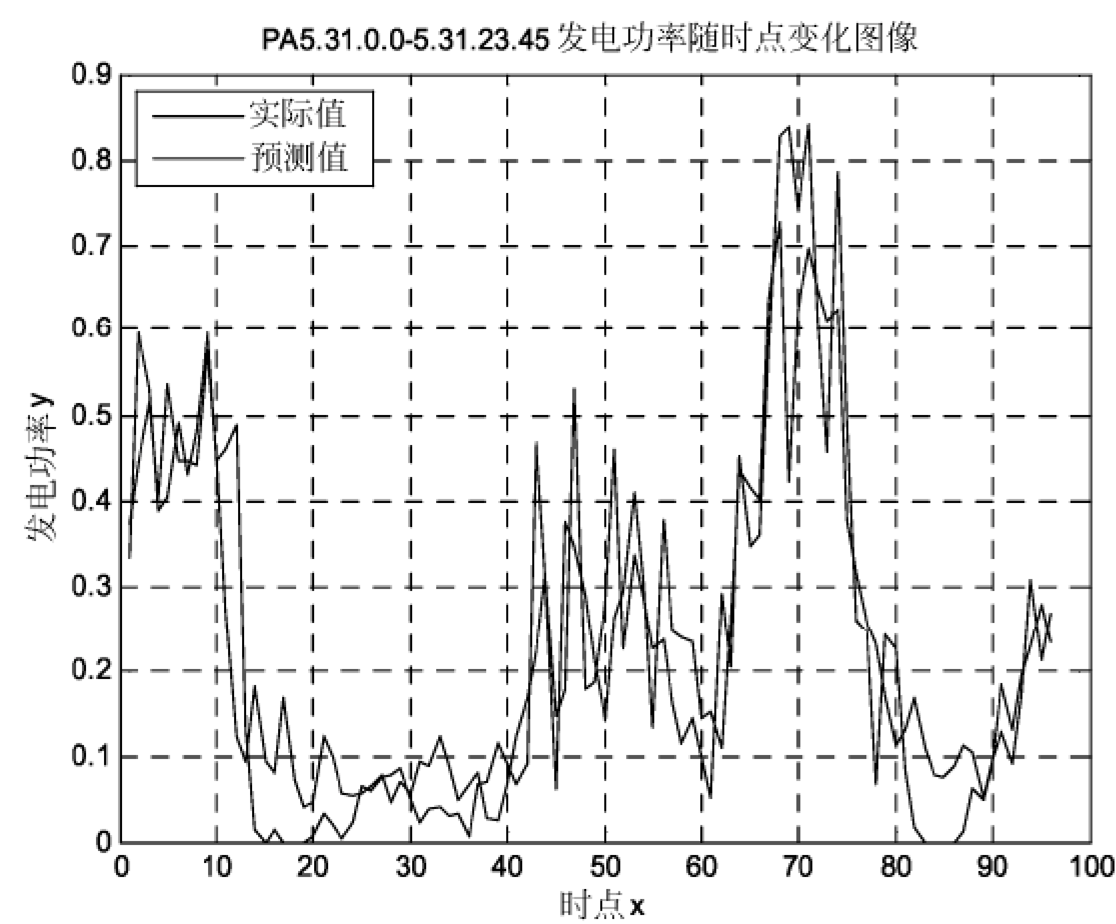


图 19-11　PA 机组 5.31 日功率预测图

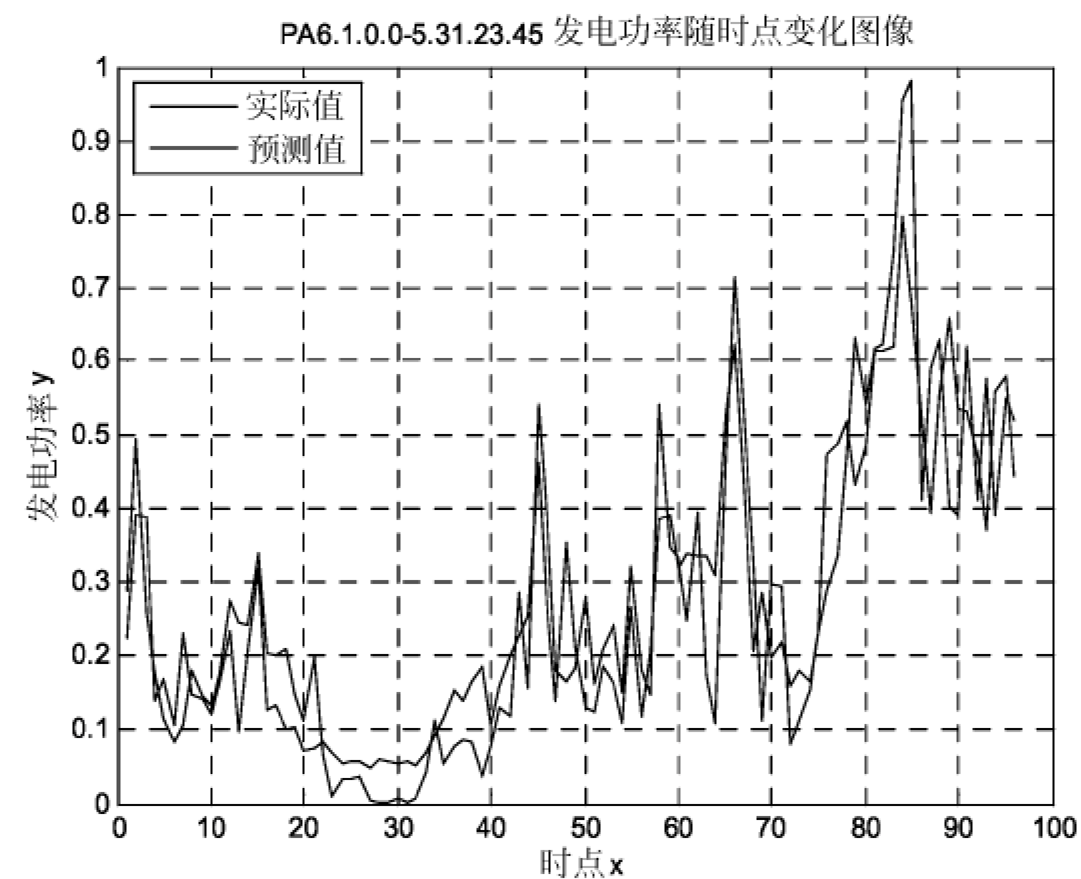


图 19-12　PA 机组 6.1 日功率预测图

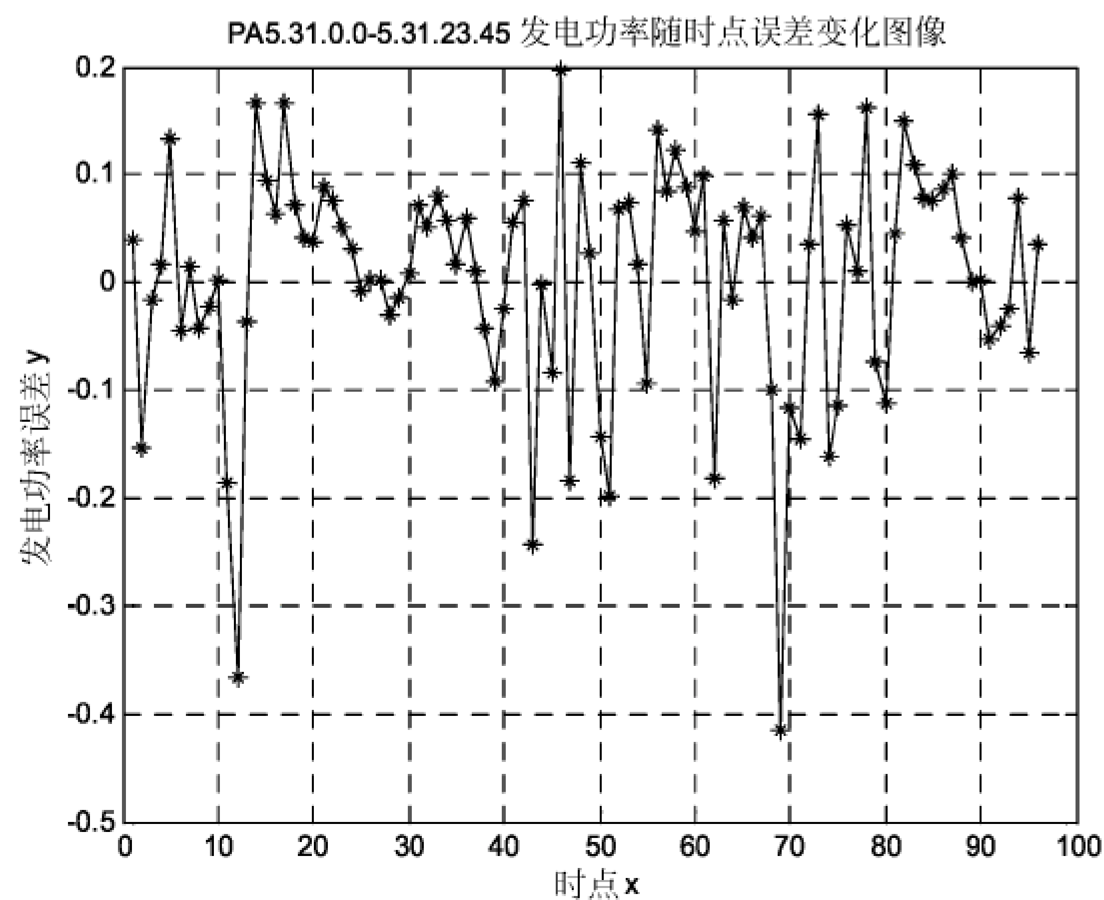


图 19-13　PA 机组 5.31 日预测误差图

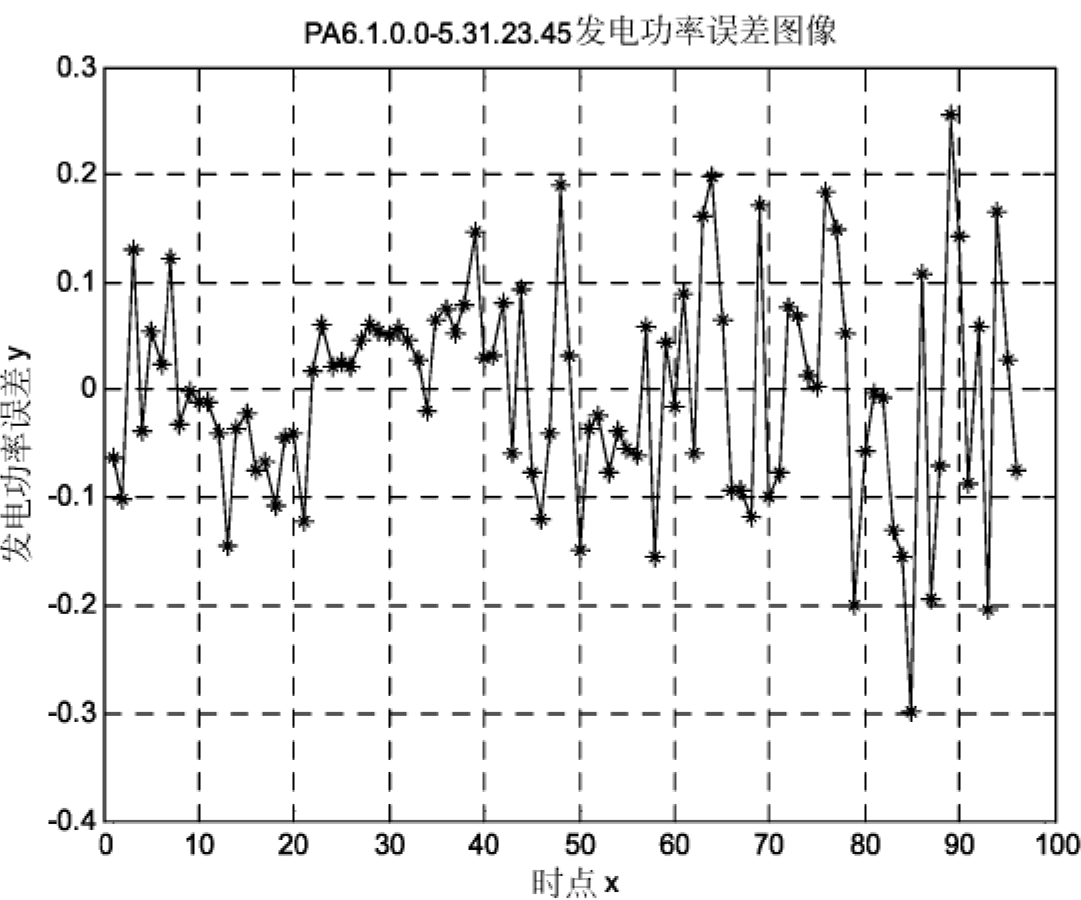


图 19-14　PA 机组 6.1 日预测误差图

同理，图 19-15～图 19-22 分别给出了 *P*4、*P*58 在 5 月 31 日和 6 月 3 日的风电功率随时间变化图以及误差图。

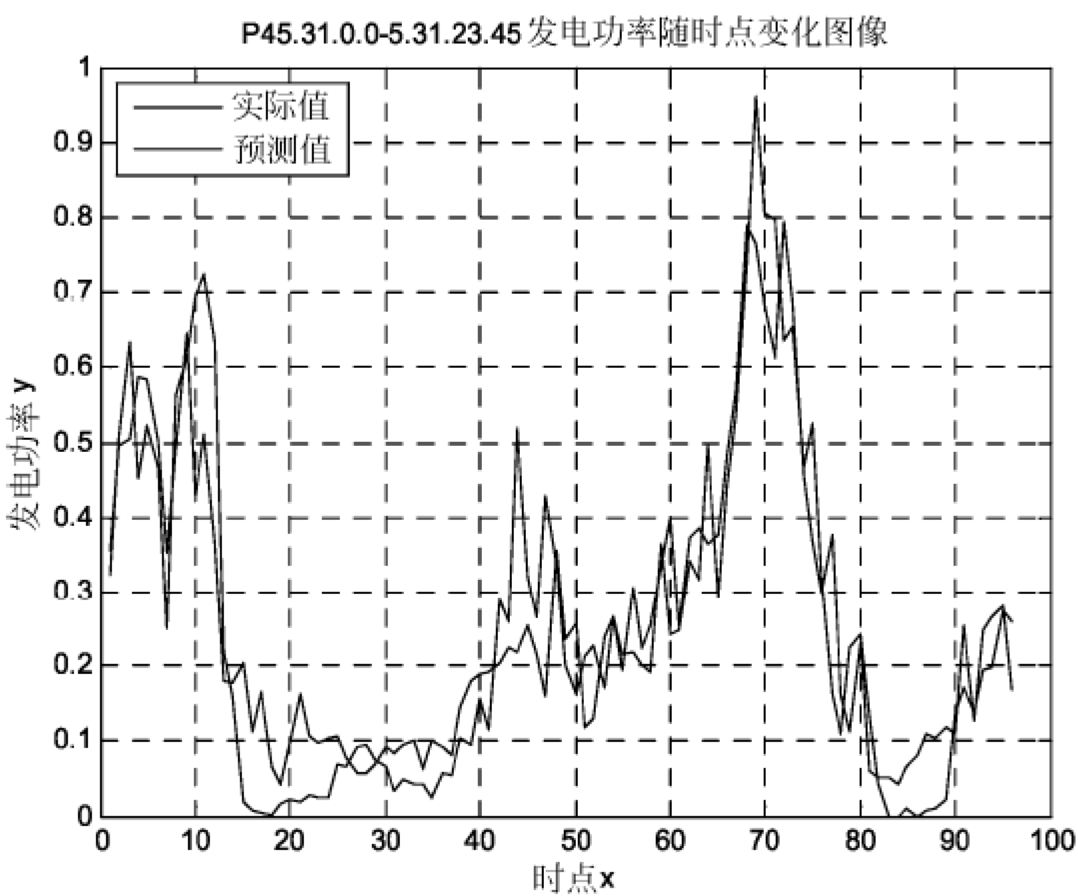


图 19-15　P4.5.31 日实时预测图

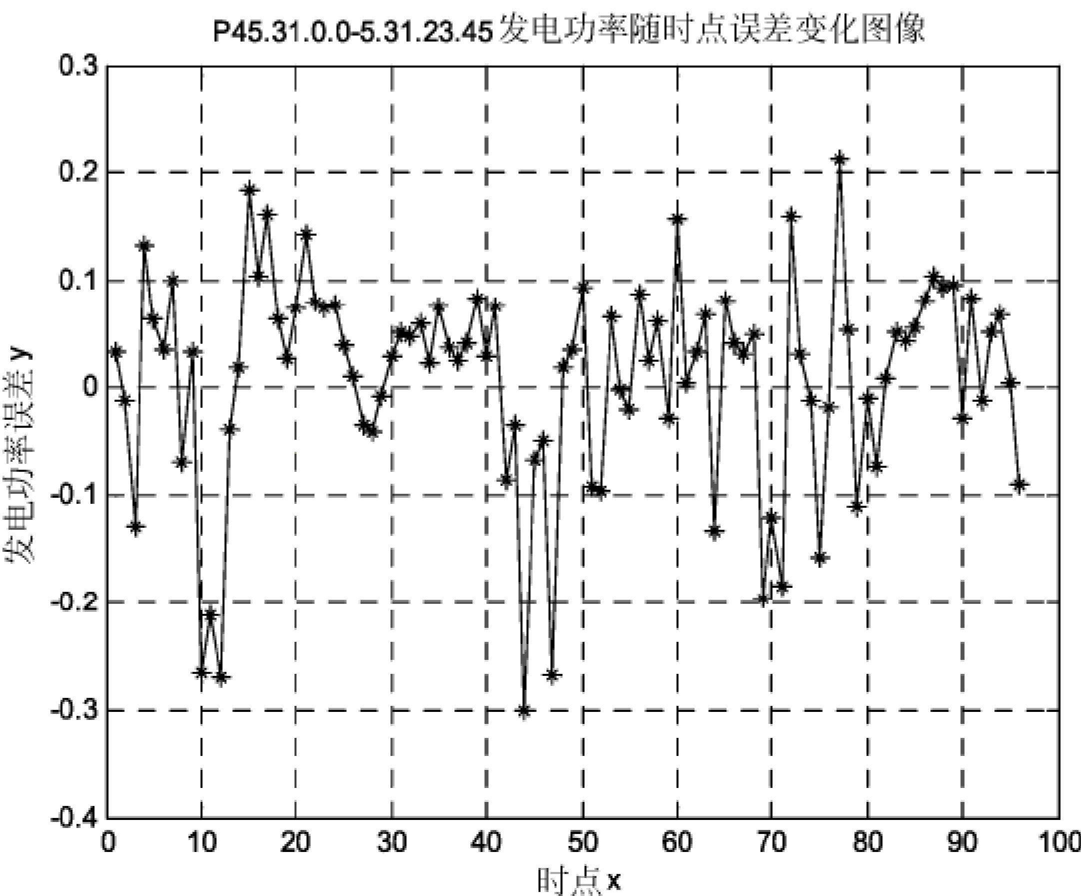


图 19-16　P4.5.31 日预测误差图

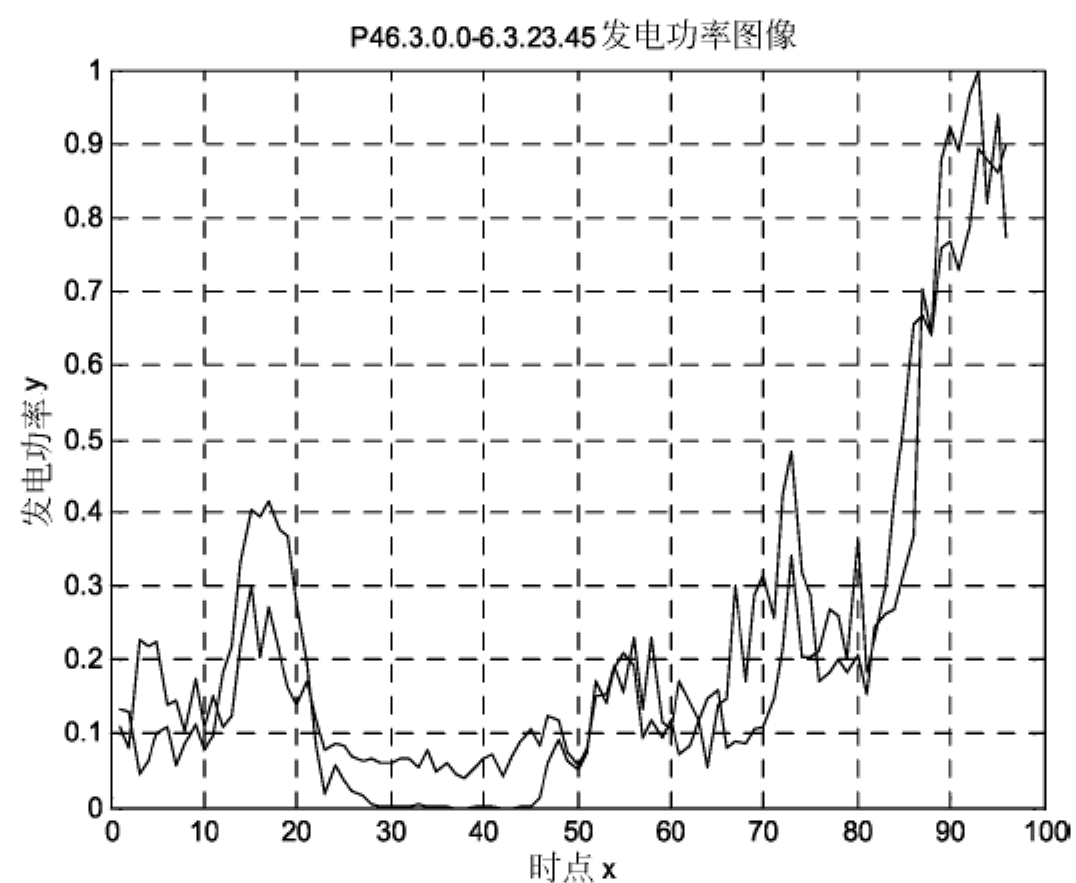


图 19-17　P4.6.3 日实时预测图

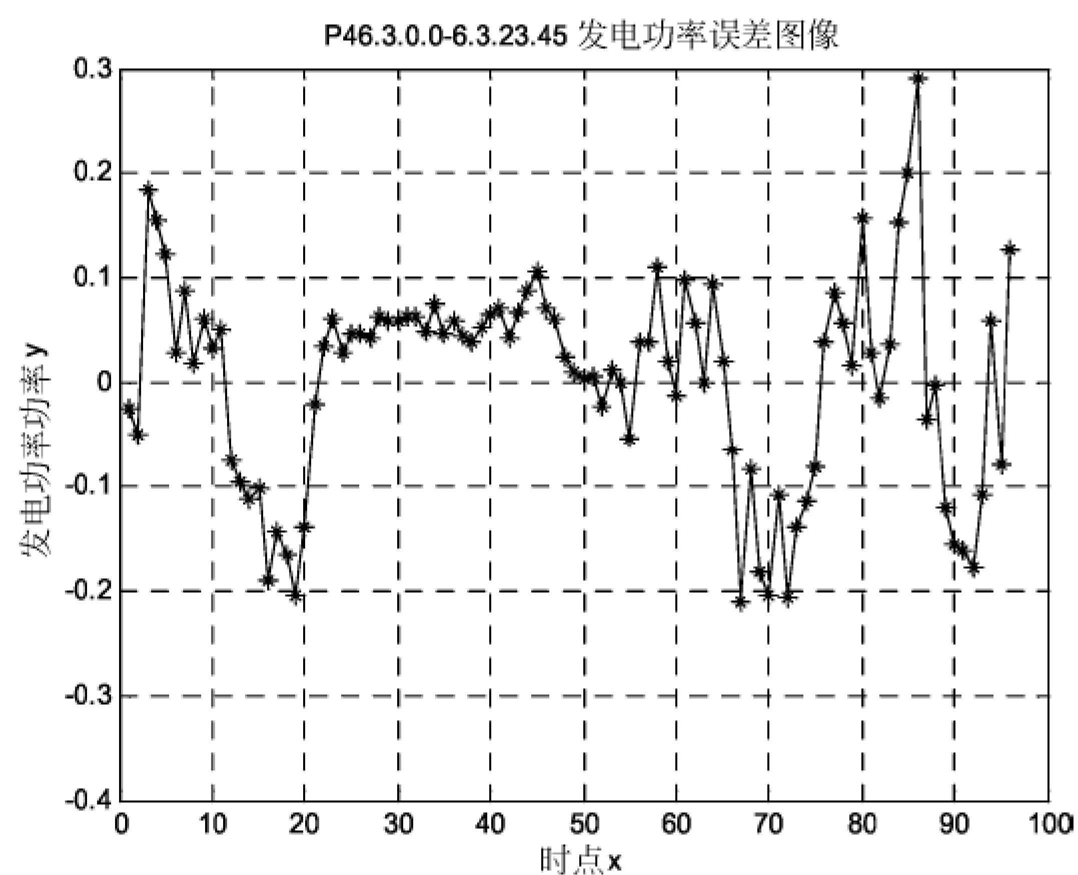


图 19-18　P4.6.3 日预测误差图

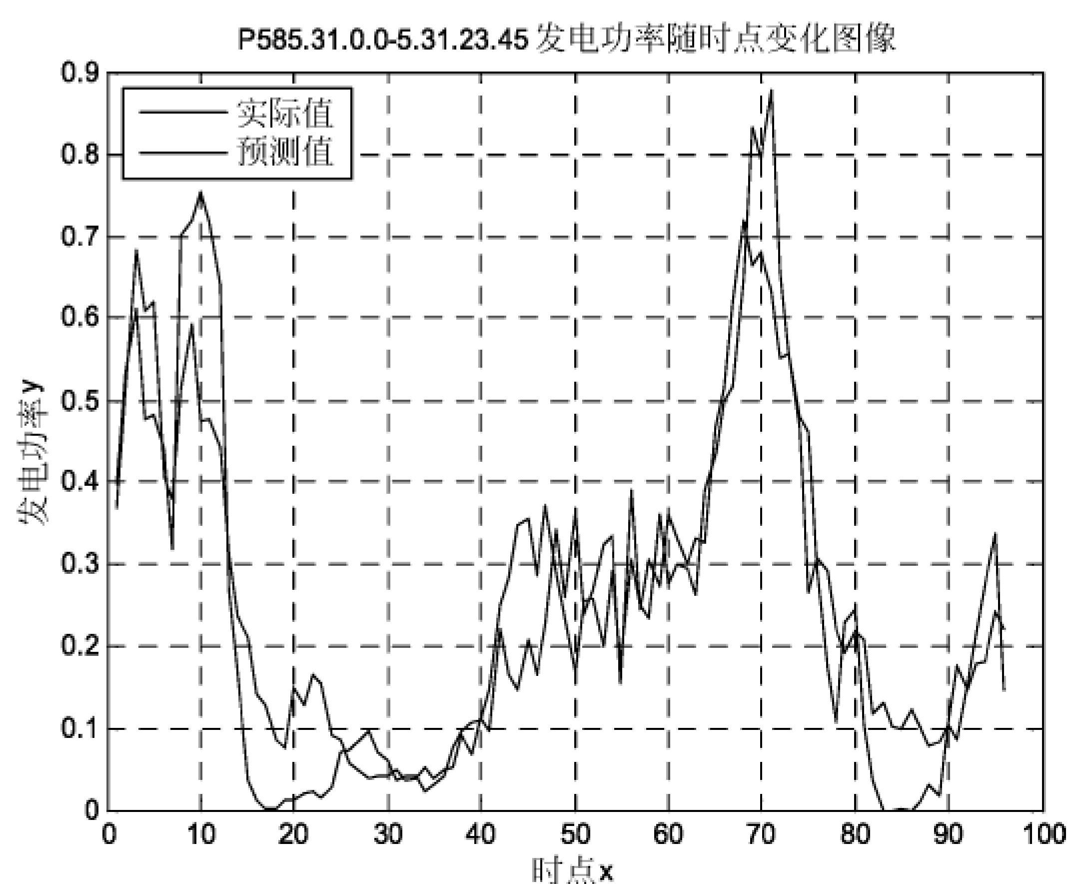


图 19-19　P58.5.31 日实时预测图

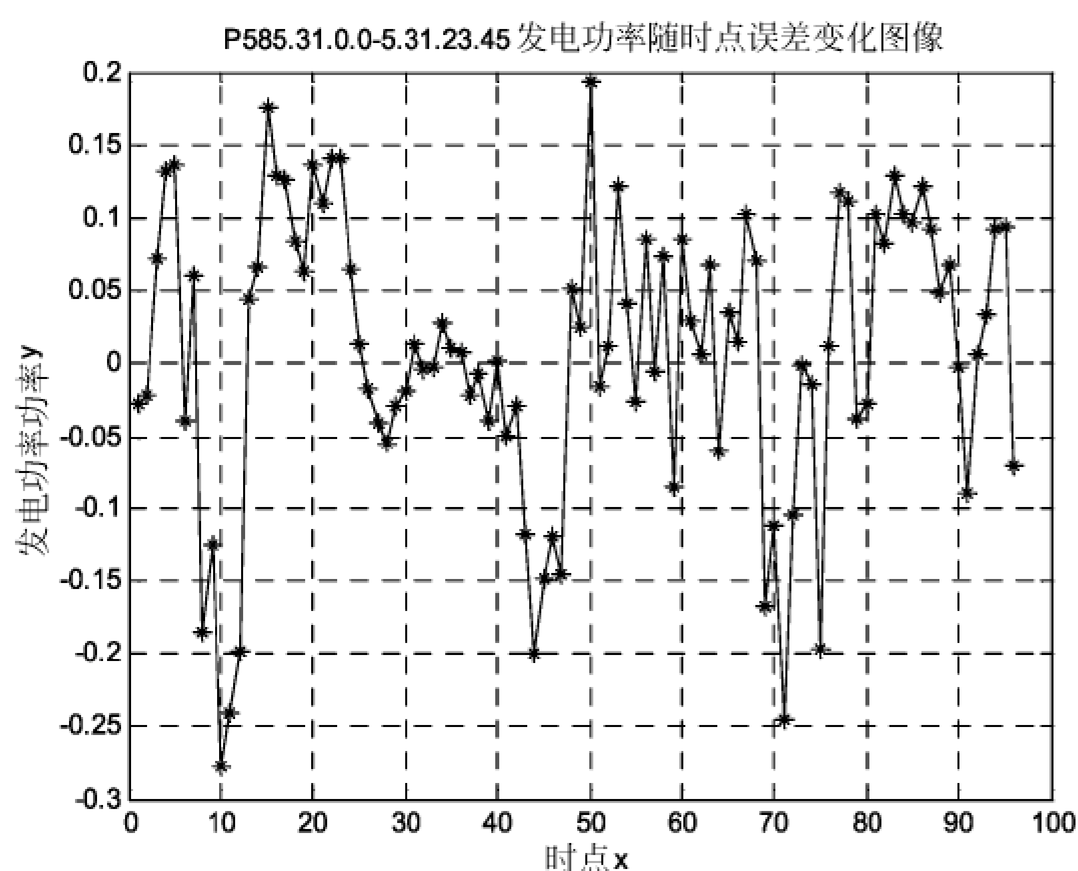


图 19-20　P58.5.31 日预测误差图

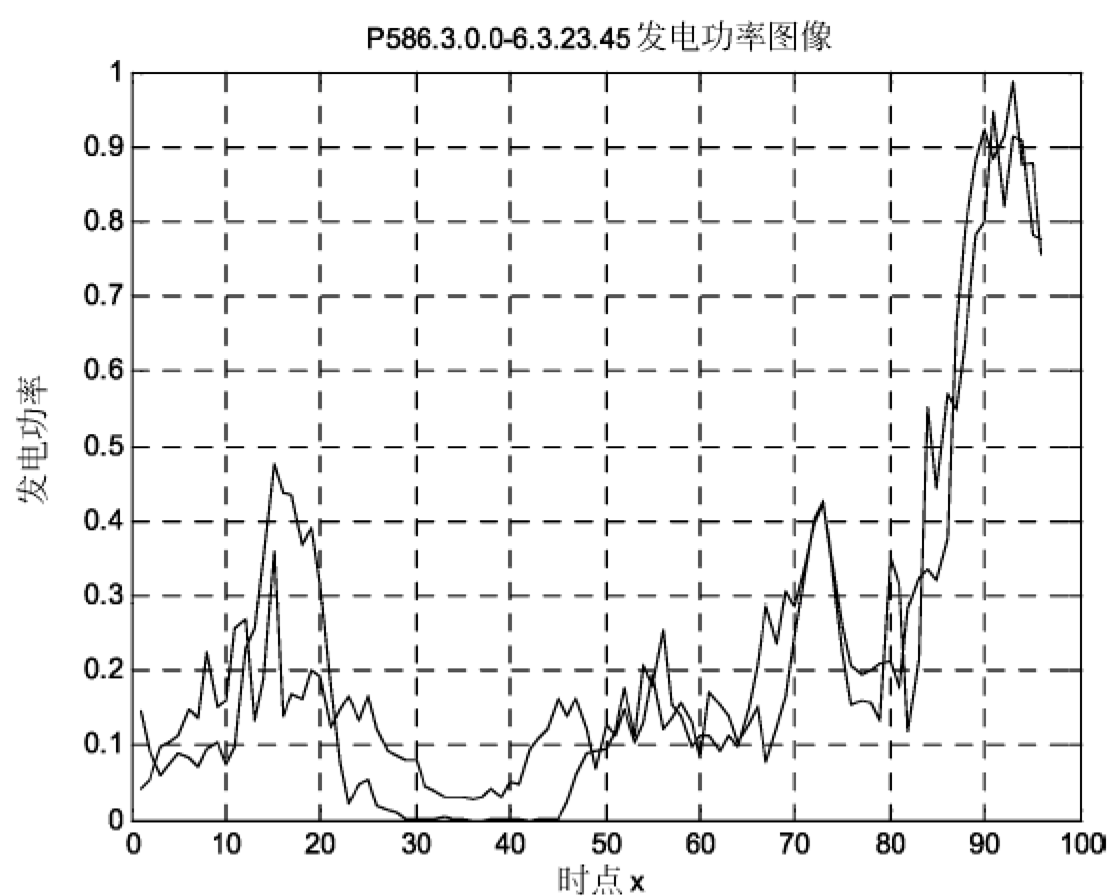


图 19-21　P58.6.3 日实时预测图

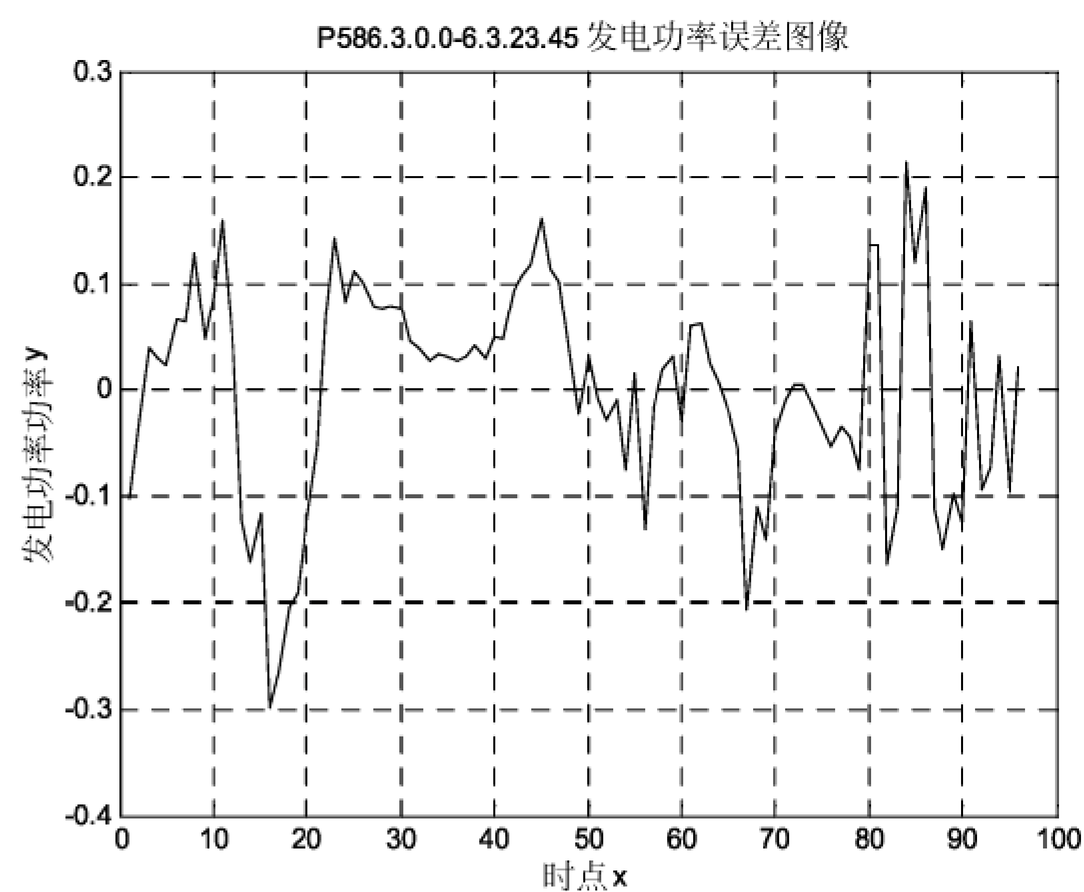


图 19-22　P58.6.3 日预测误差图

19.5.5　模型的比较

根据上面所建立的模型一、模型二和模型三，综合比较上述实时预测值，求得各模型

的准确率与合格率，进而与实时预测的考核要求对照，寻求最优化模型即可。

其两个考核指标如下所示。

（1）准确率为：

$$r_1=\left(1-\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{P_{mk}-P_{pk}}{cap}\right)^2}\right)\times 100\%$$

其中，r_1 为预测计划曲线准确率；P_{mk} 为 k 时段的实际平均功率；P_{pk} 为 k 时段的预测平均功率；N 为日考核总时段数（数 96 点——免考核点数）；cap 为风电场开机容量。

（2）合格率为：

$$r_2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}B_k\times 100\%$$

其中，$(1-\frac{P_{mk}-P_{pk}}{cap})\times 100\%\geqslant 75\%$，$B_k=1$；$(1-\frac{P_{mk}-P_{pk}}{cap})\times 100\%<75\%$，$B_k=0$。

为了保证数据的合理性，避免偶然误差，三种模型中均省去 6 月 6 日当天时段准确率和合格率的计算，取 5 月 31 日～6 月 5 日的数据进行分析。

1. 根据马尔科夫链模型

根据马尔科夫链模型二，利用 MATLAB（程序见程序文档）求得表 19-6。

表 19-6　马尔科夫链预测模型的考核指标

日期	5.31	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5
	概率 r	概率 r	概率 r	概率 r	概率 r	概率 r
PA	0.288	0.262	0.289	0.31	0.289	0.287
PB	0.307	0.279	0.259	0.284	0.29	0.283
PC	0.3	0.319	0.294	0.304	0.31	0.3
PD	0.268	0.259	0.289	0.315	0.274	0.263
P4	0.387	0.4	0.342	0.31	0.274	0.31
P58	0.413	0.374	0.305	0.342	0.342	0.363

由于马尔科夫链模型预测的是就下一个状态可能取某一个区段的一个值而言，而在此表中只有最大可能发生此状态的概率，与三次指数平滑模型和 BP 神经网络模型而言，无可比性。鉴于 Marlov 是预测接下来的五个状态中的某一个，假定每一个状态发生的准确率评价等价，均为 20%，定义马尔科夫链概率的准确率评价模型为：

$$准确率=\frac{20\%}{概率}=\frac{0.2}{概率}$$

由式，可得相应的准确率值，如表 19-7 所示。

表 19-7　Markov预测模型的考核指标

日期	5.31	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5
	准确率 r_1	准确率 r_1	准确率 r_1	准确率 r_1	准确率 r_1	准确率 r_1
PA	0.694	0.763	0.692	0.645	0.692	0.697
PB	0.651	0.717	0.772	0.704	0.690	0.707

续表

日期	5.31	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5
	准确率 r_1	准确率 r_1	准确率 r_1	准确率 r_1	准确率 r_1	准确率 r_1
PC	0.667	0.627	0.680	0.658	0.645	0.667
PD	0.746	0.772	0.692	0.635	0.730	0.760
P4	0.517	0.500	0.585	0.645	0.730	0.645
P58	0.484	0.535	0.656	0.585	0.585	0.551

2．三次指数平滑模型

根据三次指数平滑模型一，按照实时预测的考核要求，利用 MATLAB 求得表 19-8。

表 19-8　三次指数平滑预测模型的考核指标

	5.31		6.1		6.2		6.3		6.4		6.5	
	准确率 r_1	合格率 r_2	准确率 r_1	合格率 r_2	准确率 r_1	合格率 r_2	准确率 r_1	合格率 r_2	准确率 r_1	合格率 r_2	准确率 r_1	合格率 r_2
PA	0.967	1	0.964	1	0.961	1	0.977	1	0.967	1	0.985	1
PB	0.96	1	0.966	1	0.96	1	0.977	1	0.964	1	0.985	1
PC	0.958	1	0.963	1	0.959	1	0.973	1	0.963	1	0.983	1
PD	0.965	1	0.96	1	0.967	1	0.97	1	0.96	1	0.987	1
P4	0.974	1	0.975	1	0.969	1	0.981	1	0.975	1	0.988	1
P58	0.981	1	0.984	1	0.973	1	0.986	1	0.984	1	0.991	1

3．BP神经网络模型

根据 BP 神经网络模型三，利用 MATLAB 求得表 19-9。

表 19-9　BP预测模型的考核指标

日期	5.31		6.1		6.2		6.3		6.4		6.5	
	准确率 r_1	合格率 r_2	准确率 r_1	合格率 r_2	准确率 r_1	合格率 r_2	准确率 r_1	合格率 r_2	准确率 r_1	合格率 r_2	准确率 r_1	合格率 r_2
PA	0.691	0.656	0.667	0.594	0.717	0.75	0.635	0.667	0.678	0.635	0.834	0.865
PB	0.65 69	0.61 46	0.65 98	0.55 21	0.65 48	0.70 83	0.68 45	0.76 04	0.67 17	0.61 46	0.82 55	0.81 25
PC	0.65 43	0.63 54	0.64 35	0.46 88	0.66 53	0.68 75	0.68 12	0.70 83	0.68 49	0.56 25	0.80 41	0.82 29
PD	0.84 85	0.84 38	0.68 49	0.64 58	0.65 75	0.67 71	0.70 26	0.71 88	0.70 90	0.63 54	0.84 85	0.84 38
P4	0.68 54	0.65 63	0.67 23	0.59 38	0.65 84	0.68 75	0.7009	0.68 75	0.69 69	0.64 58	0.83 02	0.84 38
P58	0.735	0.719	0.735	0.719	0.694	0.708	0.735	0.76	0.73	0.708	0.857	0.865

综合表 19-7、表 19-8 和表 19-9，可得到，对于马尔科夫链模型一，根据风电机组前后值的增长率情况划分五个状态，即快速上升、缓慢上升、基本不变、缓慢下降和快速下

降，根据前期的增长率变化情况预测后期的增长率变化情况，得到 5 月 31 日～6 月 5 日的最大概率值，通过自定义的函数得到相应的准确率，准确率 $0.5 \leqslant r_1 \leqslant 0.8$，预测还算合理。但是由于马尔科夫链模型只能预测某一个状态的发生的概率，不能准确地给出实际预测值，故在本章中，有一定的弊端。

三次指数平滑模型二，预测出来的数据，准确率 $r_1 \geqslant 0.95$，合格率 $r_2 = 1$，与实际值很接近，且没有失效数字，这个结果的产生，与题目中平滑系数 α 选取有关；模型中 $\alpha = 0.9$，且本模型是根据 2006/5/10～2006/6/6 的整体实测数据建模，然后用三次指数平滑模型来模拟预测其中某一个时段的值，由于平滑系数 α 的取值极大，实际值的波动特性被屏蔽，预测出来的图形与真实值图形极为接近；而实际中，由于实测值是不会提前知道的，故三次指数平滑模型预测不能应用于实际；三次指数平滑模型对于预测未知的数，该数可以是非线性变化，但三次指数平滑模型只能预测近期的数据，对于本问而言，三次指数平滑模型预测未知数误差很大，准确性不高。

根据 BP 神经网络模型三，其准确率 $0.6 \leqslant r_1 \leqslant 0.85$，合格率 $0.61 \leqslant r_1 \leqslant 0.86$，较合理。由于 BP 神经网络输入值是实际值，根据前期的实际值的训练，找一个最优的模拟网络，从而预测下一时段的值，不受外界约束，主要取决于输入，根据神经网络自动的调整权值和阈值，得到一个训练结果，具有可行性，且 BP 神经网络较之于三次指数平滑模型和马尔科夫链模型，对于实时预测一系列随机的、离散的点的数据具有优越性。

19.6　问　题　二

19.6.1　问题二的分析

首先根据问题一中选出的较优预测方法即 BP 神经网络，经过网络的学习训练计算出单台风电机组功率及多机总功率预测值和他们的相对误差。然后再绘出单机和多机相对误差随各时点变化的相对误差图。最后经过观察分析相对误差图以及机理分析可找出普遍规律。从而可对风电机组汇聚后给风电功率预测误差带来影响做出预期。

19.6.2　问题二模型的建立与求解

在问题一中，我们已经通过分别建立马尔科夫链、三次指数平滑和 BP 神经网络三种预测模型，再对预测结果进行误差分析，并比较准确率和合格率等指标，判断哪一个预测效果最佳。最终得出 BP 神经网络模型是三者之中最优的，从而推荐 BP 神经网络算法。

因此，对于本问题，可建立 BP 神经网络模型。

对于输出层，有：

$$\begin{cases} h_k = f(net_k) & k = 1,2,\cdots,28 \\ net_k = \sum_{j=1}^{m} v_{jk} y_j & k = 1,2,\cdots,28 \end{cases}$$

对于隐层，有：

$$\begin{cases} y_j = f(net_j) & j = 1,2...m \\ net_j = \sum_{i=1}^{m6} w_{ij}x_i & j = 1,2...m \end{cases}$$

其中，$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$。

模型的求解同问题一中的模型三，在问题一基础上将 BP 神经网络模型算出来的各个机组预测值与实测值间相对误差进行分析。

```
clc,clear,close all
figure(1)
%计算 PA 的预测误差与 P4 的预测误差的规律
load('data.mat')
%PA 的神经网络模拟后的预测相对误差值
%P4 的神经网络模拟后的预测相对误差值
n1=size(WA);
k=1;
for i=1:n1(1,2)
    for j=1:n1(1,1)
        A(k,1)=WA(j,i);    % 5.31-6.5 合并于一列
        k=k+1;
    end
end

l=1;
for i=1:n1(1,2)
    for j=1:n1(1,1)
        w4(l,1)=W4(j,i);    % 5.31-6.5 合并于一列
        l=l+1;
    end
end
t=n1(1,1)*n1(1,2);
plot(1:t,A(:,1),'r',1:t,w4(:,1))
grid on
title('PA 的预测误差与 P4 的预测误差随时间变化图');
legend('PA 的预测误差','P4 的预测误差',2)
xlabel('时点 x'),ylabel('发电功率预测误差 y');

figure(2)
%计算 PA 的预测误差与 P58 的预测误差的规律
load('data.mat')
%PA 的神经网络模拟后的预测相对误差值
%P4 的神经网络模拟后的预测相对误差值
n1=size(WA);
k=1;
for i=1:n1(1,2)
    for j=1:n1(1,1)
        A(k,1)=WA(j,i);%5.31-6.5 合并于一列
        k=k+1;
    end
end

l=1;
for i=1:n1(1,2)
    for j=1:n1(1,1)
        w58(l,1)=W58(j,i);%5.31-6.5 合并于一列
        l=l+1;
```

```
    end
end
t=n1(1,1)*n1(1,2);
plot(1:t,A(:,1),'r',1:t,w58(:,1))
grid on
title('PA 的预测误差与 P58 的预测误差随时间变化图');
legend('PA 的预测误差','P58 的预测误差',2)
xlabel('时点 x'),ylabel('发电功率预测误差 y');

figure(3)
%计算 PA 的预测误差与 P58 的预测误差的规律
subplot(2,1,1)
load('data.mat')
%PA 的神经网络模拟后的预测相对误差值
%P4 的神经网络模拟后的预测相对误差值
n1=size(WA);
k=1;
for i=1:n1(1,2)
    for j=1:n1(1,1)
        A(k,1)=WA(j,i);    % 5.31-6.5 合并于一列
        k=k+1;
    end
end

l=1;
for i=1:n1(1,2)
    for j=1:n1(1,1)
        w58(l,1)=W58(j,i); % 5.31-6.5 合并于一列
        l=l+1;
    end
end
t=n1(1,1)*n1(1,2);
plot(1:t,A(:,1),'r',1:t,w58(:,1))
grid on
title('PA 的预测误差与 P58 的预测误差随时间变化图');
legend('PA 的预测误差','P58 的预测误差',2)
xlabel('时点 x'),ylabel('发电功率预测误差 y');
subplot(2,1,2)
hold on
%计算 PA 的预测误差与 P4 的预测误差的规律
load('data.mat')
%PA 的神经网络模拟后的预测相对误差值
%P4 的神经网络模拟后的预测相对误差值
n1=size(WA);
k=1;
for i=1:n1(1,2)
    for j=1:n1(1,1)
        A(k,1)=WA(j,i);%5.31-6.5 合并于一列
        k=k+1;
    end
end

l=1;
for i=1:n1(1,2)
    for j=1:n1(1,1)
        w4(l,1)=W4(j,i);%5.31-6.5 合并于一列
        l=l+1;
    end
end
```

```
t=n1(1,1)*n1(1,2);
plot(1:t,A(:,1),'r',1:t,w4(:,1))
grid on
title('PA 的预测误差与 P4 的预测误差随时间变化图');
legend('PA 的预测误差','P4 的预测误差',2)
xlabel('时点 x'),ylabel('发电功率预测误差 y');
```

P4、P58 与 PA、PB、PC、PD 相对误差随 5 月 31 日～6 月 5 日间各时点变化情况如图 19-23～图 19-26 所示。

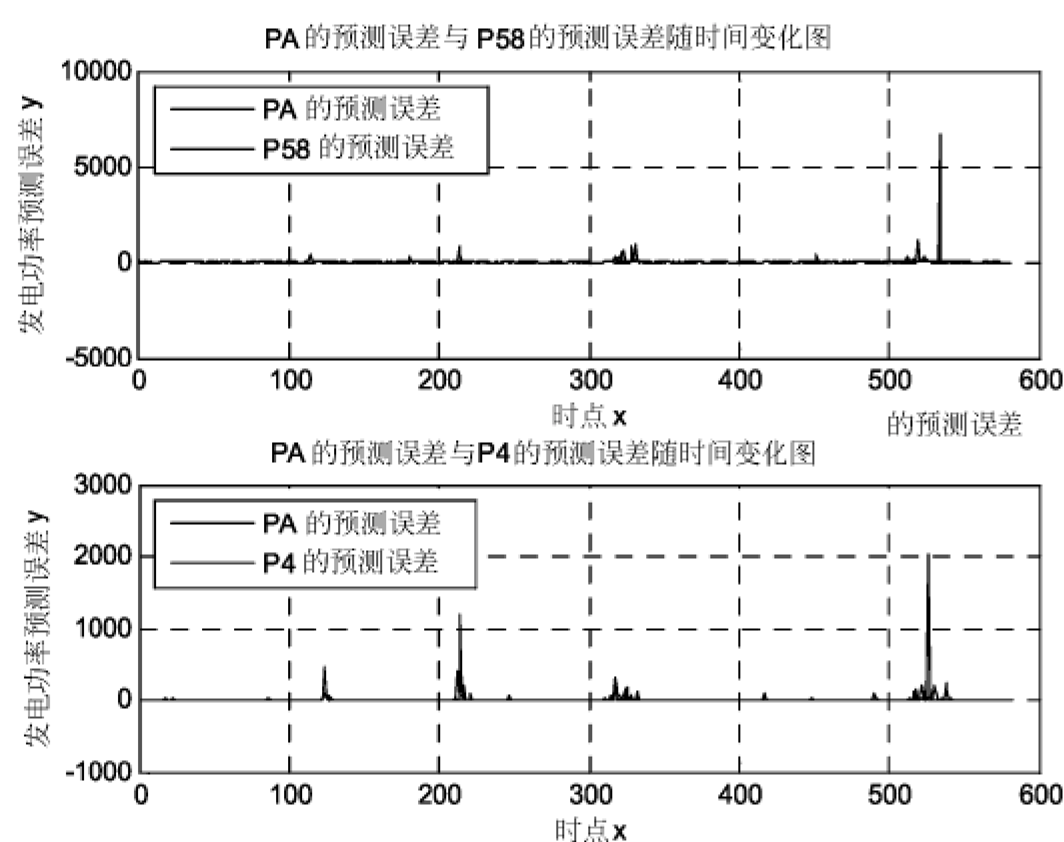


图 19-23　PA、P4、P58 相对误差变化图

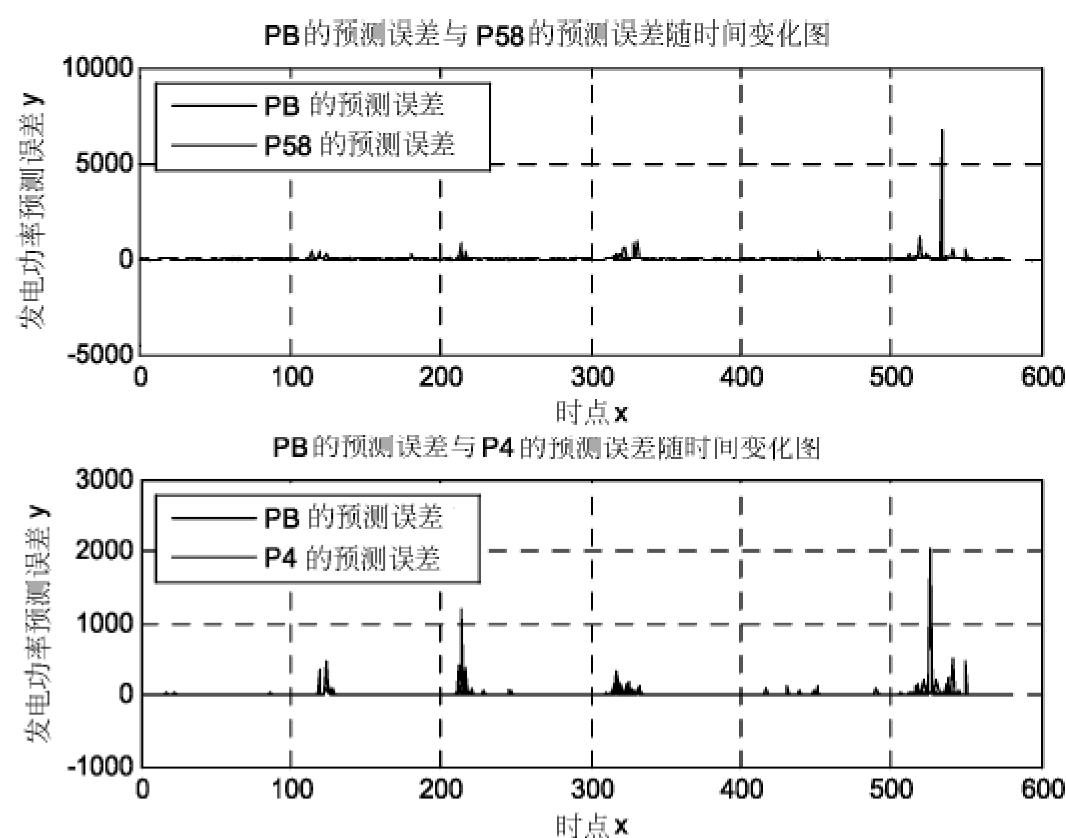


图 19-24　PB、P4、P58 相对误差变化图

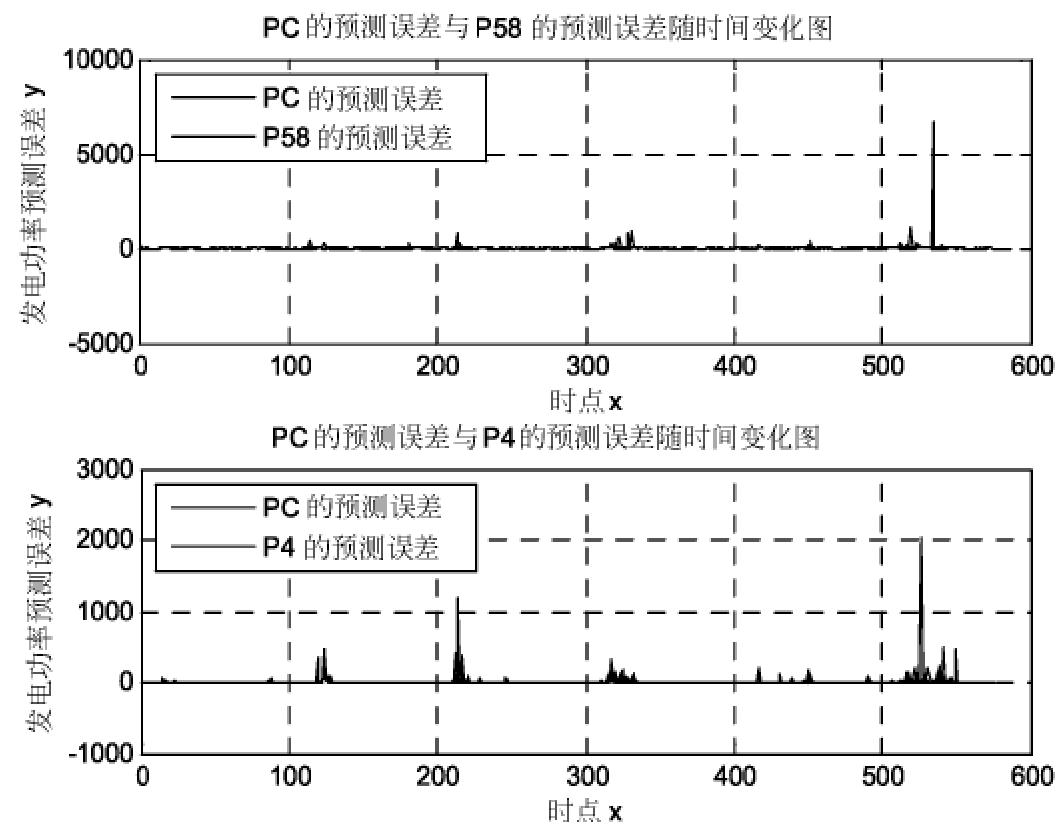


图 19-25　PC、P4、P58 相对误差变化情况

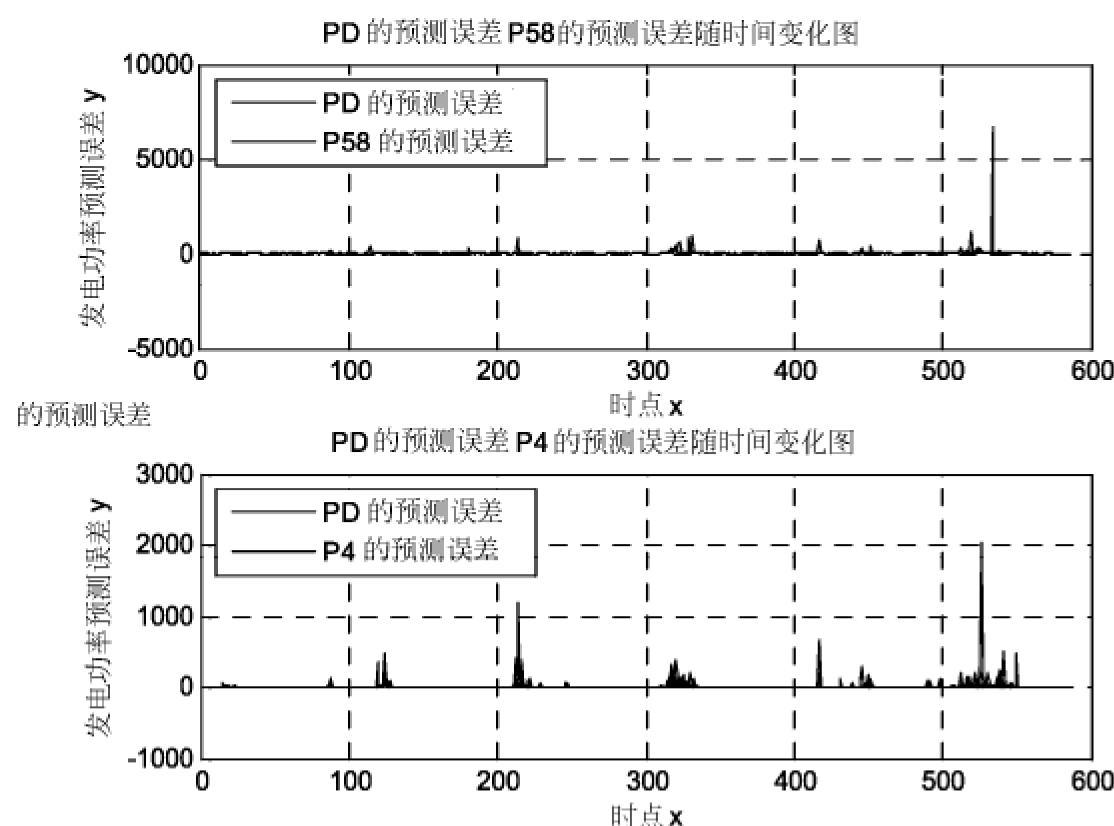


图 19-26　PD、P4、P58 相对误差变化图

由图 19-23～图 19-26 可得出一些普遍规律：

（1）PA、PB、PC 和 PD 的预测误差均很小，但当把 4 台发电机一起接入电网或整个风电场一起接入电网时，在某些时点预测误差突然陡增，这说明当多机汇聚后，由于各电机的相互影响会改变实际输出功率值，使实际输出功率变小，以致预测不精确。

（2）而且，多机组汇聚产生的 4 个叠加误差几乎都是出现在同一时点。亦即当我们对某风电场进行风电功率预测时，在某一时点有多个机组同时发电的情况下，不能将各个机组叠加后的总功率作为总的实测功率来进行预测，只能在风电机组汇聚时一起测总的功率，再进行预测。

（3）多机组汇聚出现的总功率数值突然减小只出现在固定的时点，而其他时点并不受影响。因此，通过历史数据分析，找出这些“异常”时点，在“正常”时点下仍可用各个机组的叠加功率预测总功率值。

19.6.3　问题二结果的分析及验证

由以上普遍规律可得出结果：众多风电机组汇聚后会使某个时点的预测误差突然陡增。因此，在预测多机组同时工作时的总输出功率时必须把这些特殊时点剔除。而这些“异常”时点可通过历史数据分析得到。得出的结果在风电机组原理上也能说通：风电机组即普通的发电机，只不过此时的原动力来源于风，将风能转化成机械能，再通过转换装置拖动发电机旋转产生电能，由于发电机内部有很多线圈，因此发电的同时线圈也会耗能，这就解释了为什么附件 2 中所给的数据会出现负值的现象，即发电机并未正常工作，其内部的线圈反而消耗能量的结果。正因为这样，当多台发电机汇聚运行时，由于线圈间互感的作用以及线圈本身耗能的原因，输出的总功率会小于单个电机工作时的功率之和。至于为何只出现在某些特殊时点，则需要更深入的研究了。

19.7　问　题　三

19.7.1　问题的分析

对于问题三，由于在问题一中已经筛选出了一种较优的预测方法，因此，在此基础上对问题一中筛选出的预测方法进行改进即可。

由问题一的分析可知，风电功率是随时点波动的离散点数列，一般的线性拟合模型、指数平滑预测模型和灰色预测模型等无法及时并准确地预测未来的时点的风电功率值，在问题一中，最终采用 BP 神经网络预测方法。但是从表 19-9 可看出，神经网络虽然在一定程度上可以合理的预测时点的大致趋势，但是预测值与实测值之间的误差仍然较大，又考虑到提高风电功率实时预测的准确程度对改善风电联网运行性能有重要意义，故在此题中，弥补 BP 神经网络预测的弊端，改用动态神经网络时间序列预测法，该方法的记忆功能，对时间序列的滞后给予了一定的弥补，并且精度较高，其结构原理图如图 19-27 所示。

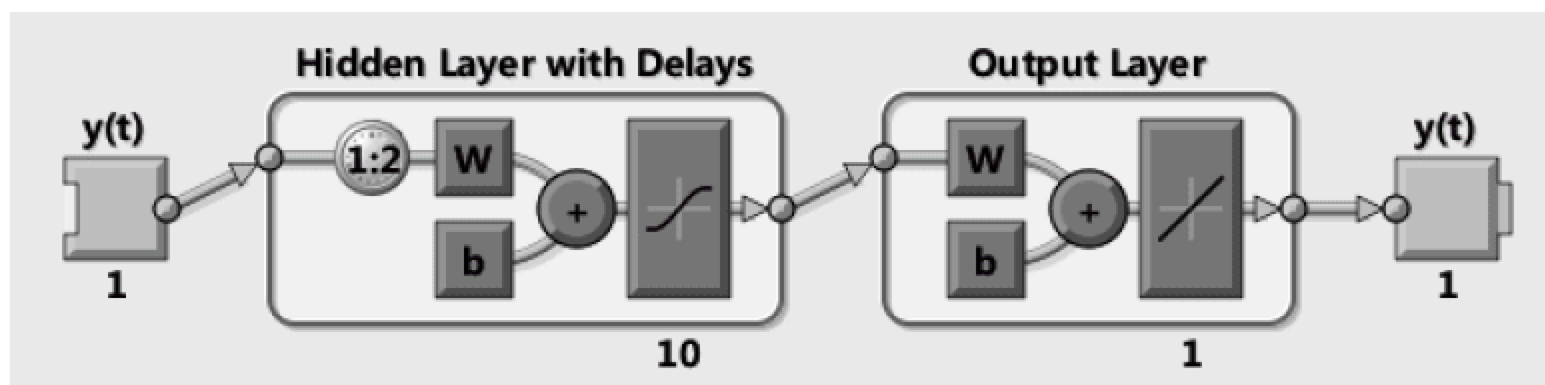


图 19-27　动态神经网络结构原理图

19.7.2　模型的算法流程

Step1：对 PA 数据进行标准化，使各值在 0～1 之间。

Step2：选取训练神经网络的数据，根据“预测某一天，就选取该天以前的所有的天的数据”而定。

Step3：对训练动态神经网络的数据进行矩阵变换，使其为一列。

Step4：在 MATLAB 的 command window 下输入 nnstart，启动 Neural Network Start，如图 19-28 所示。

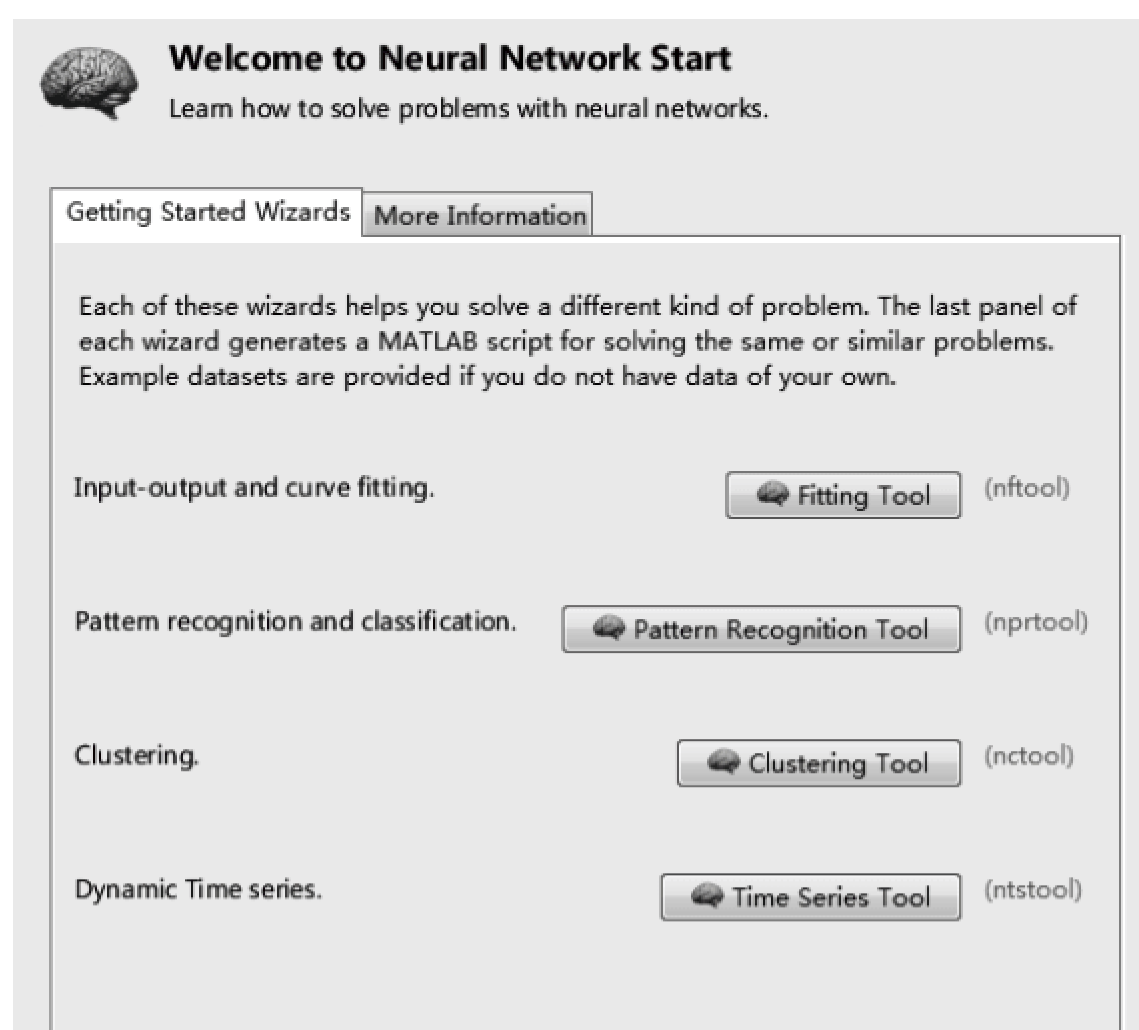


图 19-28　神经网络启动界面

Step5：单击“Time Series Tool”时间序列工具箱，进入动态神经网络时间序列预测工具箱—Neural Network Time Series Tool。

Step6：使用 Nonlinear Autoregressive(NAR)--非线性自回归模型，选择训练该网络的数组作为输入行向量。

Step7：对该数据进行分割，采用系统默认值，输入数据的 70%作为该网络训练数据(training data)，15%作为验证数据(validation data)，其余 15%作为测试数据(testing data)。

Step8：反复调节隐层神经元个数(Number of Hidden Neurons)和时间滞后的 y_i 个数(Number of delays d)，并反复进行训练(train)，直到达到规定要求。

Step9：依次进行对 *PA* 分别在 5 月 31 日、6 月 1 日、6 月 2 日……6 月 6 日的预测，并不断地训练网络；*PB*、*PC*、*PD*、*P*4、*P*58 亦如此。

Step10：数据、图形的整理。

Step11：仿照上述短期预测方法，对 *PA*、*PB*、*PC*、*PD*、*P*4 和 *P*58 进行长期预测，选取长期时间段为 5 月 31 日～6 月 6 日。

19.7.3　模型的建立与求解

1．短期预测—a(一天)

动态神经网络时间序列预测法依赖于前面的输出及当前的输入，并具有反馈作用。动态神经网络易处理波动变化无规律的数据，此题中，y_t 只有输出，没有输入，满足动态神经网络时间序列预测法中的 Nonlinear Autoregressive (NAR)—非线性自回归模型，经过反

复的训练与检验，得到 PA 在 a 时段，即 5 月 31 日，模型如图 19-29 所示。

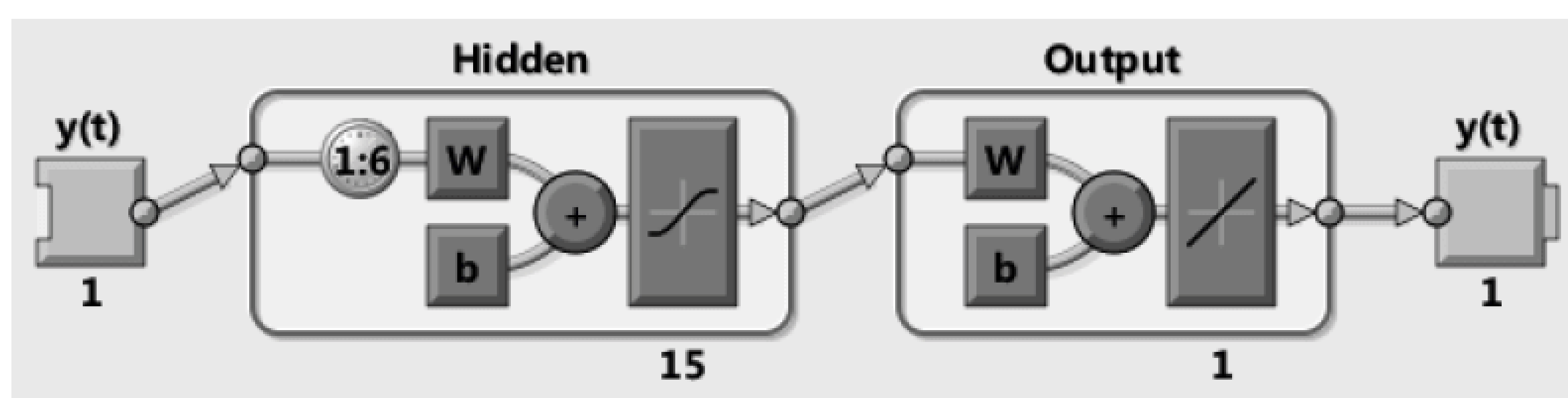


图 19-29　PA 动态神经网络预测模型

其中，隐层神经元个数(Number of Hidden Neurons)为 $n=15$。

y_t 与前面六个输出变量有关，且满足：

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, y_{t-4}, y_{t-5}, y_{t-6})$$

经过反复构造、反复训练和反复检验，得到 PA 的一系列预测值，编程如下：

```
%P4 5 月 31:0:0   计算的 MATLAB 程序如下：BP 神经网络预测
%5 月 31 位于第 22 行
clc,clear
load('data.mat') %原始数据以列向量的方式存放在 workplace 文件中
PA=PA(2:29,:);
%数据的标准化
N=size(PA);
for j=1:N(1,2)
    PAHminmax=minmax(PA(:,j)');
    for i=1:N(1,1)
        PA(i,j)=(PA(i,j)-PAHminmax(1,1))/(PAHminmax(1,2)-PAHminmax(1,1));
    end
end
%以每天的从 0 时计数起，每隔十五分钟作为输入
P=PA(1:21,:);
%以 5 月 31 的间隔十五分钟的发电量作为目标向量
T=PA(22,:);% 实际值，应预测的值
T=T';
n=size(P);
k=1;
for i=1:n(1,1)
    for j=1:n(1,2)
        P1(k,1)=P(i,j);  % 赋值
        k=k+1;
    end
end
% Solve an Autoregression Time-Series Problem with a NAR Neural Network
%  P1 - feedback time series.

targetSeries = tonndata(T,false,false);

% Create a Nonlinear Autoregressive Network
feedbackDelays = 1:6;   % 反馈延迟率
hiddenLayerSize = 15;   % 隐藏层
net = narnet(feedbackDelays,hiddenLayerSize);

% open loop or closed loop feedback modes.
[inputs,inputStates,layerStates,targets]                              =
preparets(net,{},{},targetSeries);
```

```
% Setup Division of Data for Training, Validation, Testing
net.divideParam.trainRatio = 70/100;   % 训练数据比例
net.divideParam.valRatio = 15/100;     % 验证数据比例
net.divideParam.testRatio = 15/100;    % 测试数据比例

% 训练网络
[net,tr] = train(net,inputs,targets,inputStates,layerStates);

% 测试网络
outputs = net(inputs,inputStates,layerStates);
errors = gsubtract(targets,outputs);
performance = perform(net,targets,outputs)

% 查看网络
view(net)

netc = closeloop(net);                              % 闭环网络
[xc,xic,aic,tc] = preparets(netc,{},{},targetSeries);  % 网络结构
yc = netc(xc,xic,aic);                              % 网络输入输出
perfc = perform(net,tc,yc)                          % 网络性能

nets = removedelay(net);                            % 消除延迟
[xs,xis,ais,ts] = preparets(nets,{},{},targetSeries);  % 网络结构
ys = nets(xs,xis,ais);                              % 网络输入输出
closedLoopPerformance = perform(net,tc,yc) % 闭环网络性能
```

其具体拟合程度如图 19-30 和 19-31 所示。

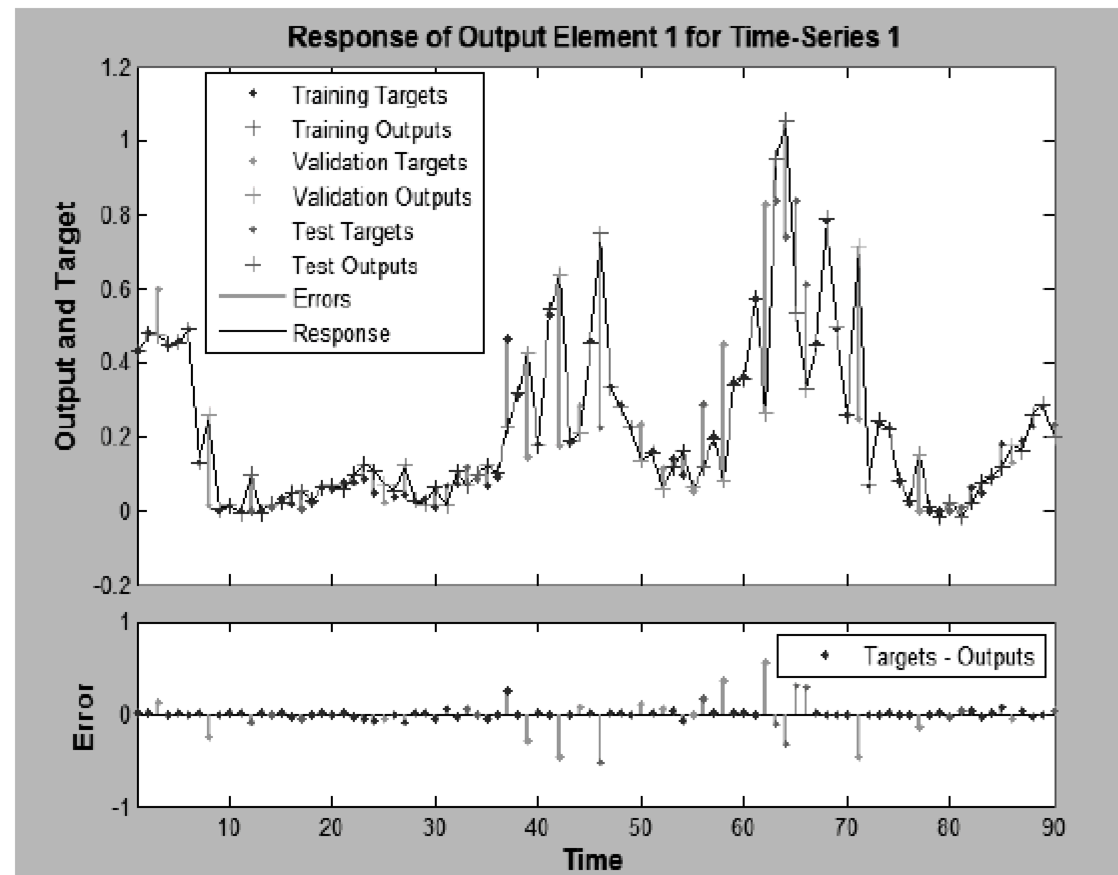


图 19-30　PA 实时预测图

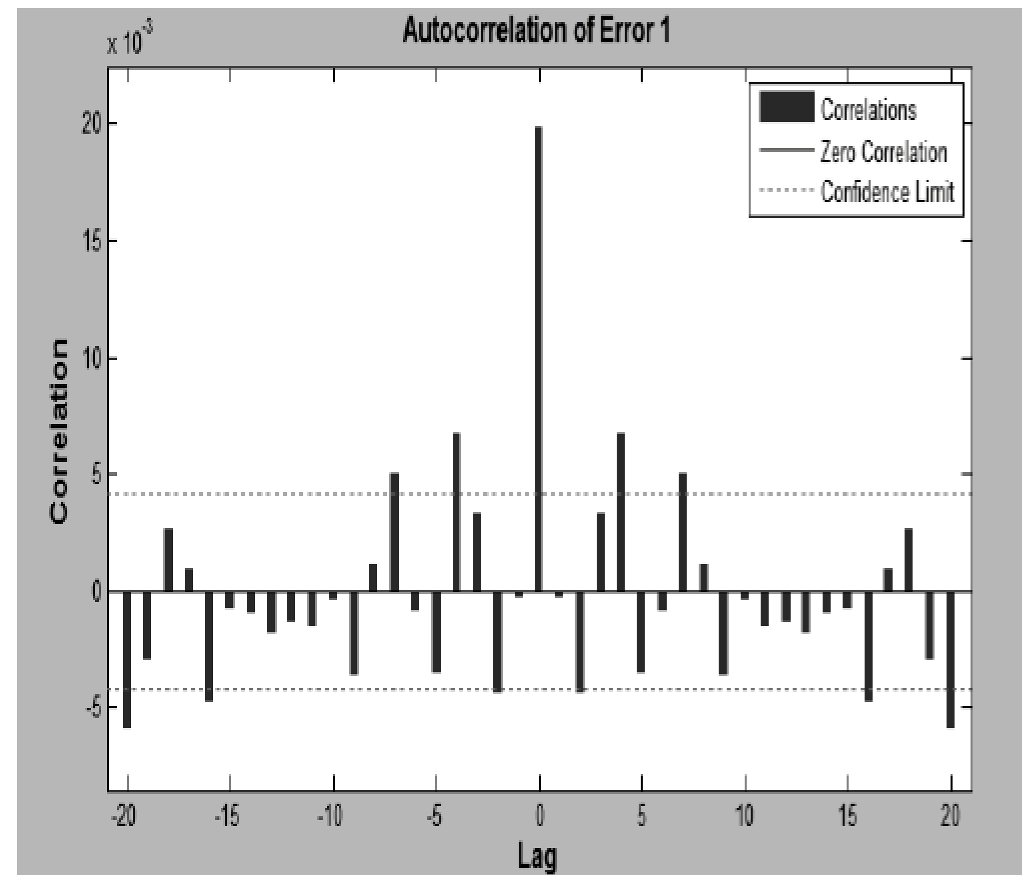


图 19-31　PA 动态神经网络自相关性图

从图 19-30 中可以看出，经过动态神经网络训练后，预测值与真实值的误差很小，各预测值逼近各真实时点，且大部分的点都能准确的预测，大多数相连点的自相关性位于置信区间里，可认为该网络训练合理，如图 19-31 所示。PA 预测值较之于真实值，其均方误差、失效数据和梯度等如图 19-32 和图 19-33 所示。

图 19-32 中，均方误差都较小，为 10^{-1} 左右，其中训练用的数据，误差最小。从图 19-33 中的梯度走势图可得，适当增大神经元数量和除去输出变量个数对该网络预测的精度提高并不明显；运用已有的数据进行训练网络，总会有一些数据失效，且将一直存在。

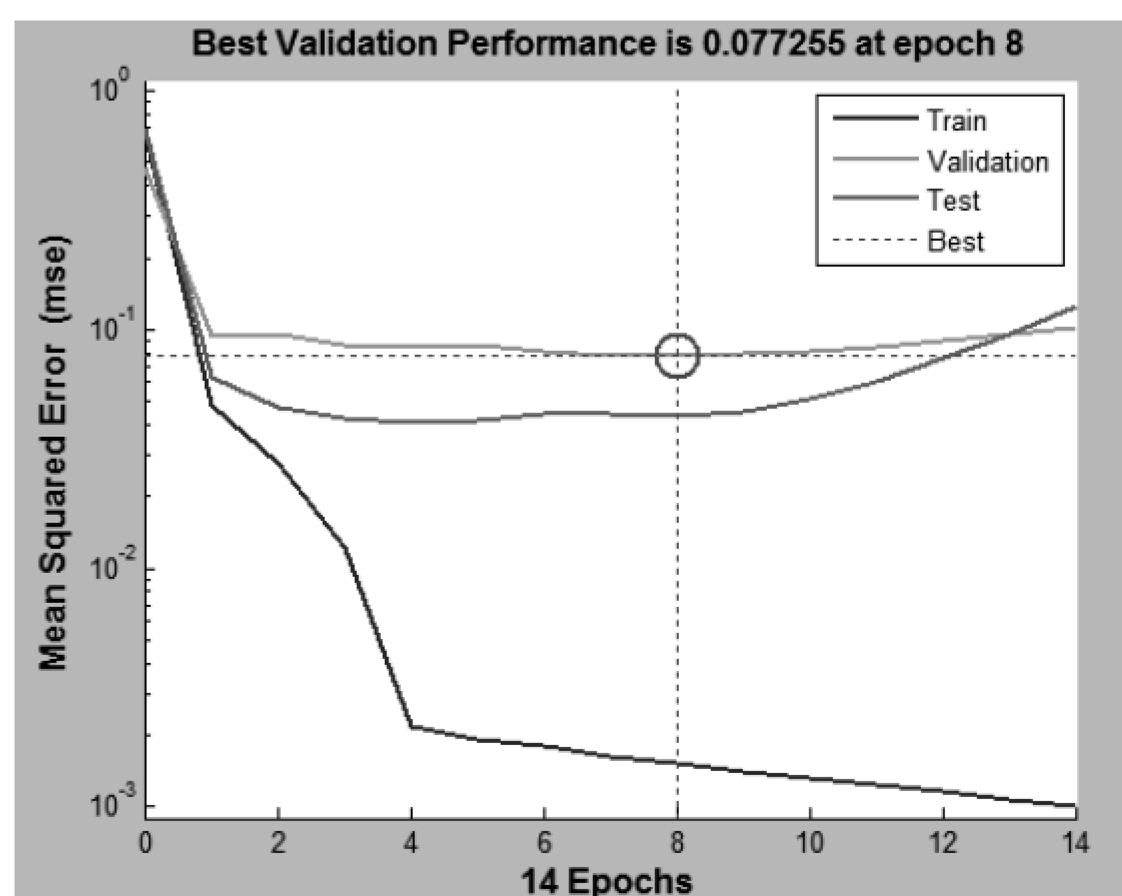


图 19-32　PA 均方差图

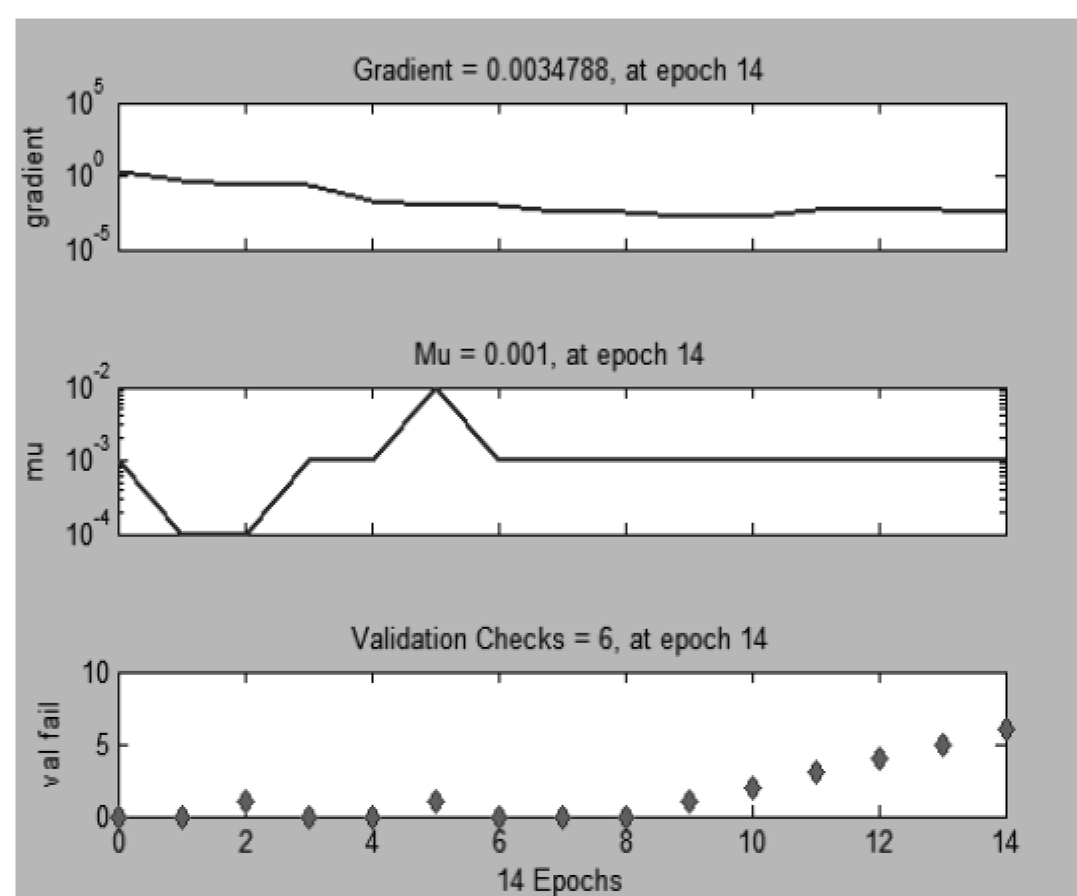


图 19-33　PA 训练梯度图

同样对于 6 月 1 日、6 月 2 日……6 月 6 日，今天对明天的预测增加前一天的真实值进行再训练网络，逐步的滚动向前预测；*PB*、*PC* 和 *PD* 亦如此（具体见附录 5）。对于 *P*4 在 *a* 时段，即 5 月 31 日，预测图形如图 19-34 和图 19-35 所示。

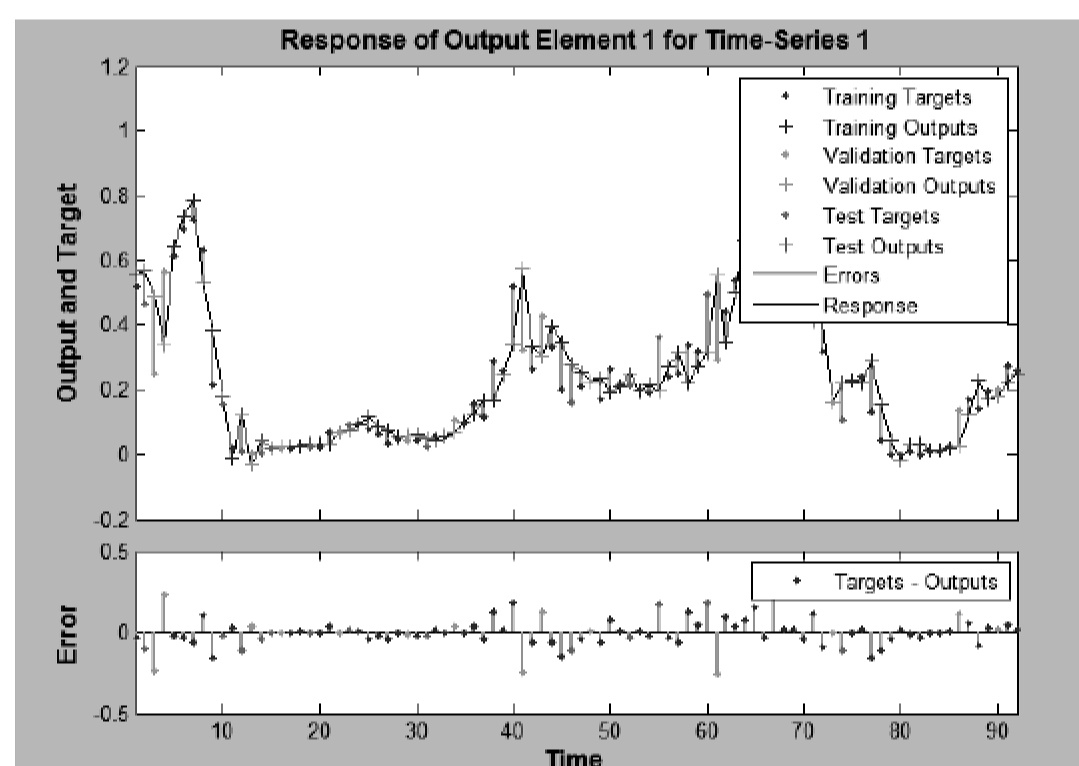


图 19-34　P4 实时预测图

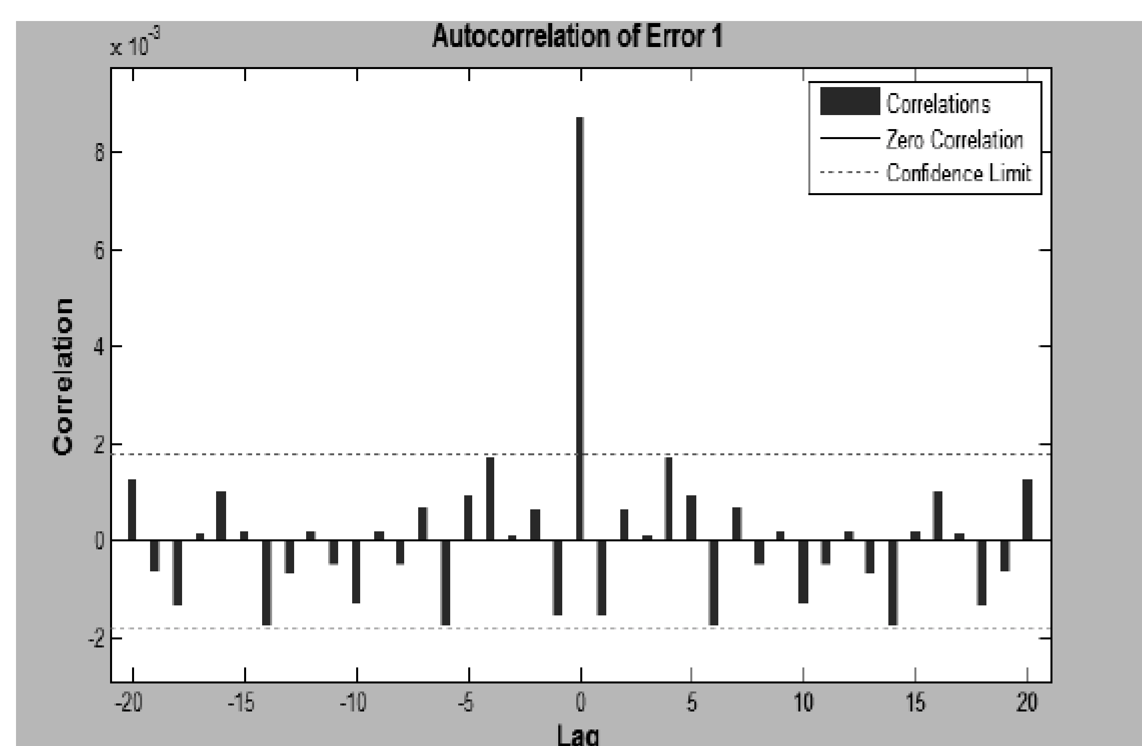


图 19-35　P4 动态神经网络自相关性图

其均方误差、失效数据和梯度等如图 19-36 和图 19-37 所示。

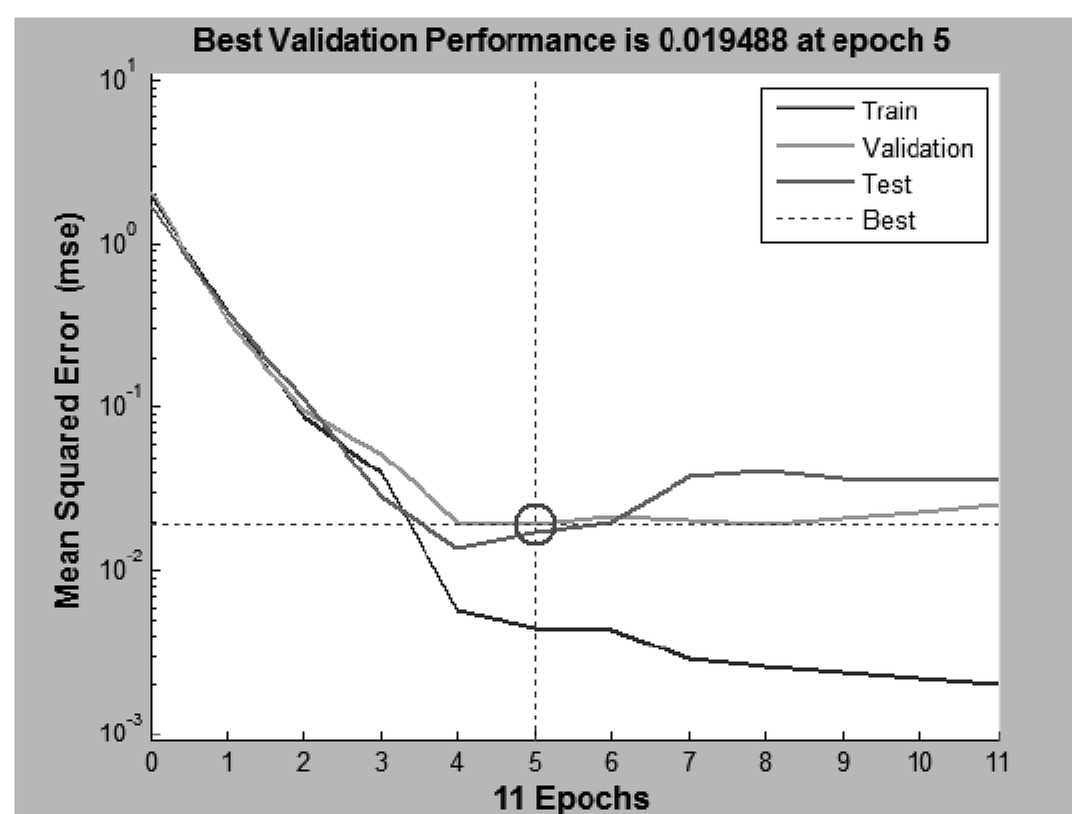


图 19-36　P4 均方差图

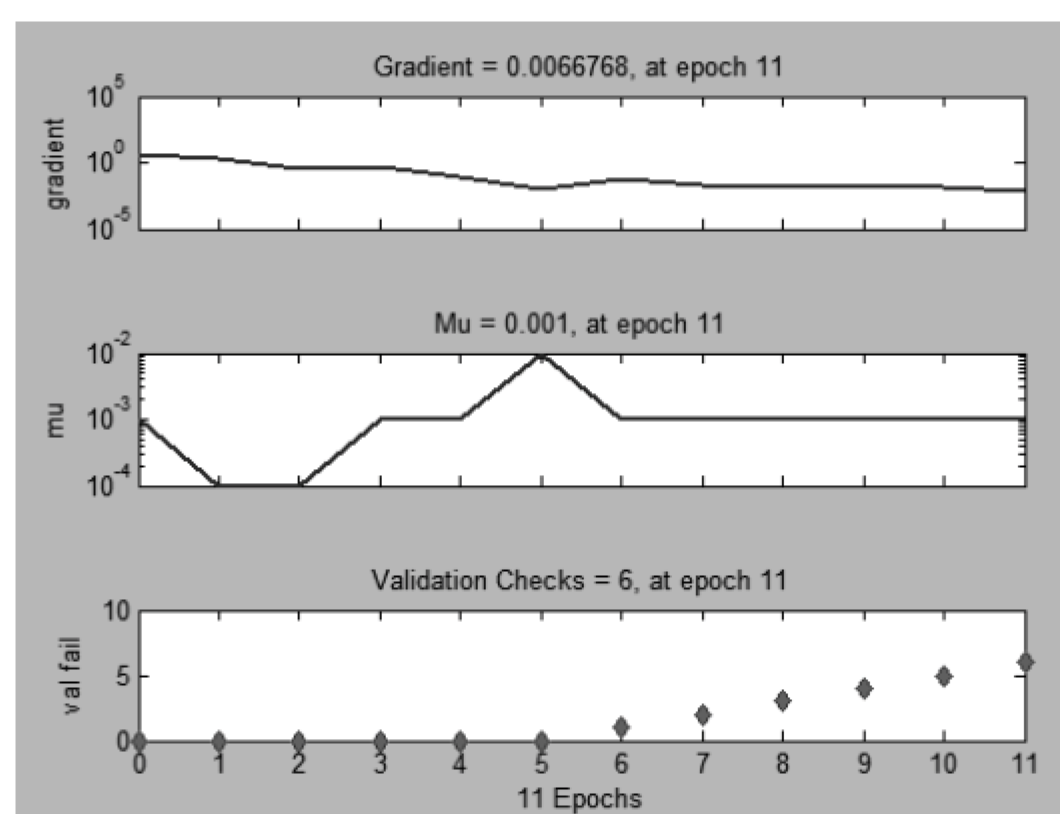


图 19-37　P4 训练梯度图

又 *P*58 在 *a* 时段，即 5 月 31 日，预测效果图如图 19-38 和图 19-39 所示。

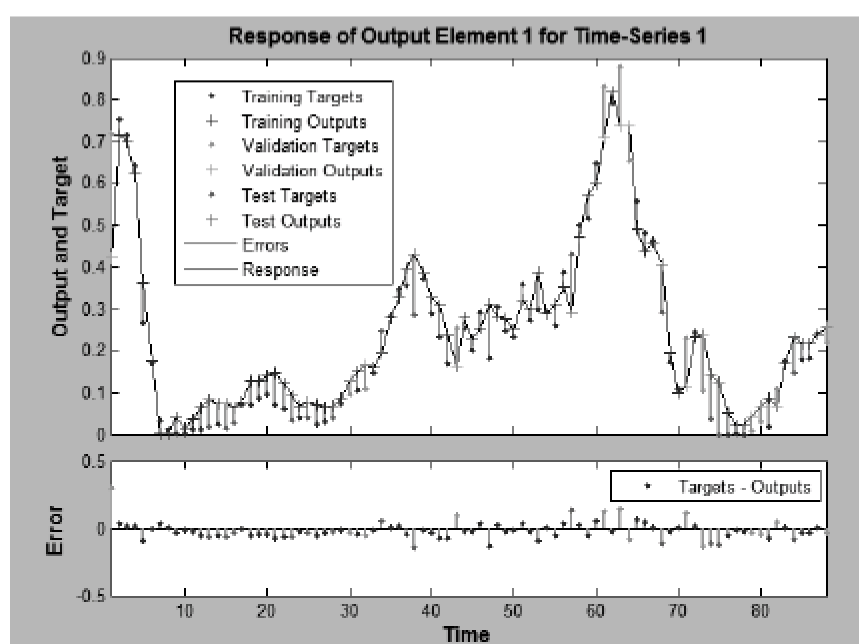


图 19-38　P58 实时预测图

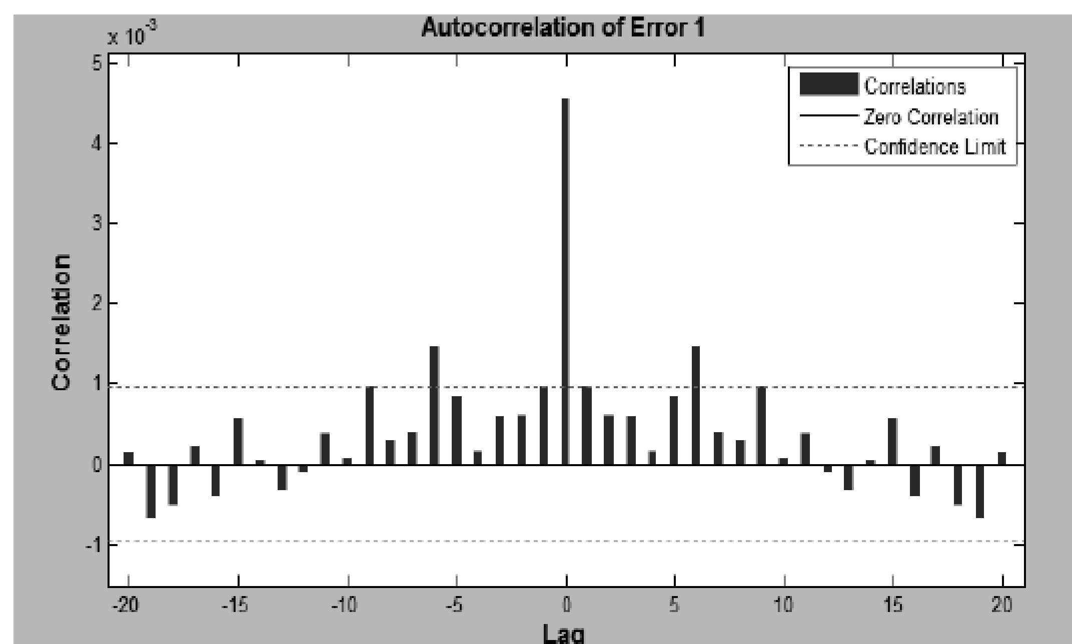


图 19-39　P58 动态神经网络自相关性图

其均方误差、失效数据和梯度等如图 19-40 和图 19-41 所示。

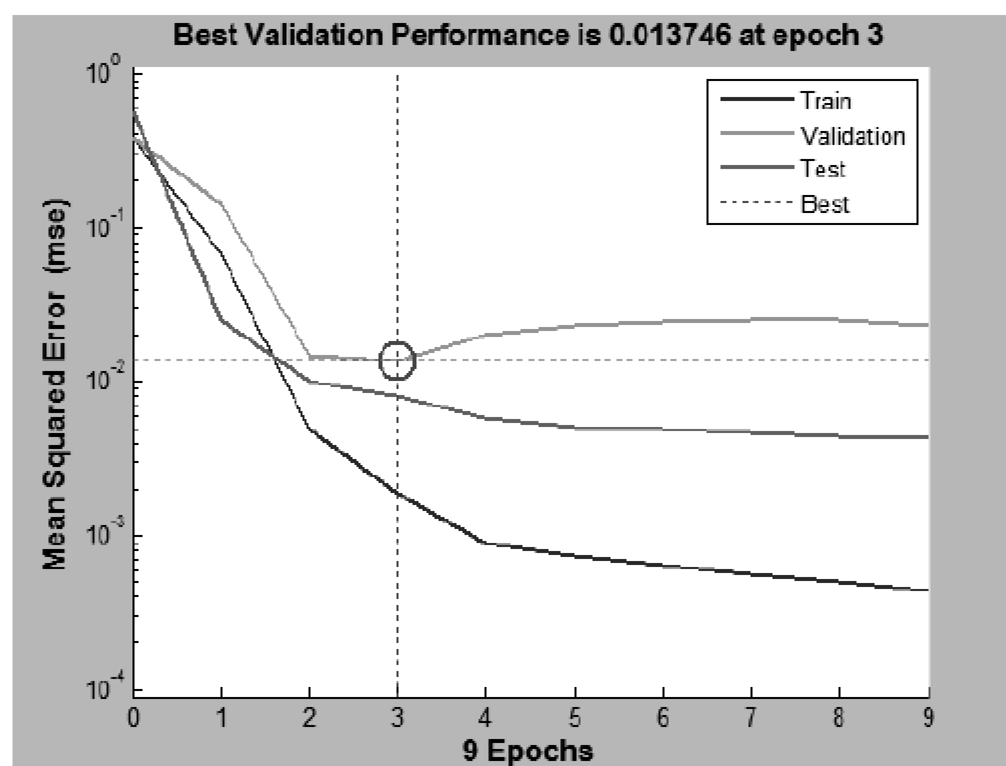


图 19-40　P58 均方差图

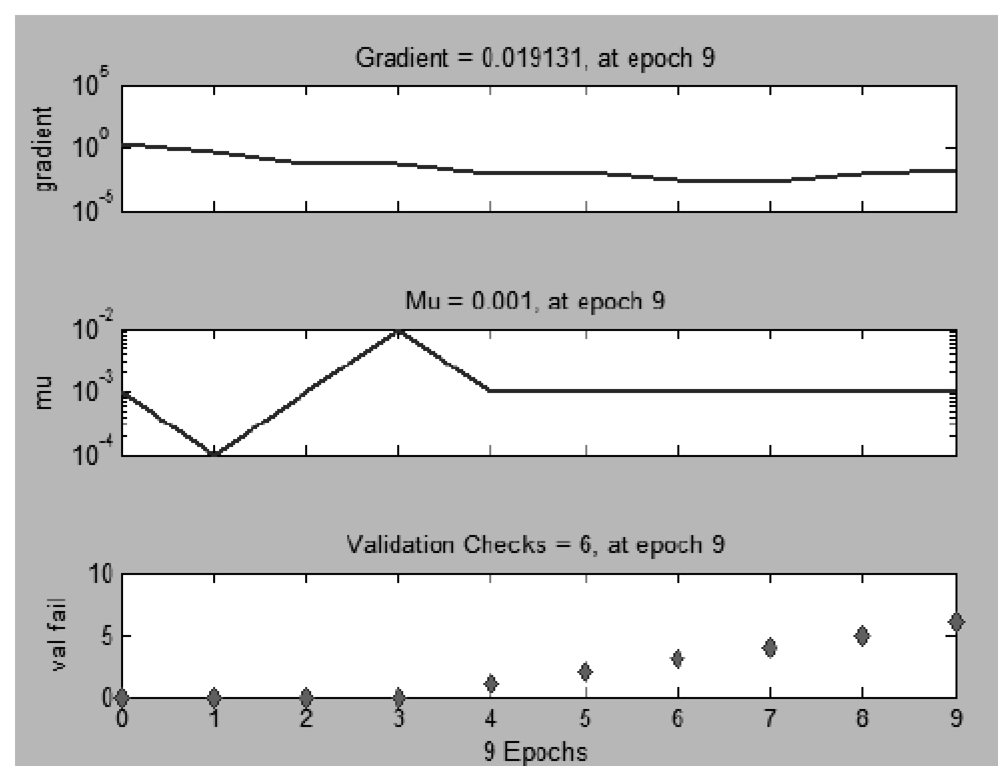


图 19-41　P58 训练梯度图

2．长期预测—b（7天）

同前面的预测一天的动态神经网络时间序列模型一样，长期预测只是改变了预测的目标量（target），长期预测的动态神经网络仍可用短期预测训练好的神经网络；但由于网络每次训练误差都不一样，本章中采用重新训练新的动态神经网络以供长期预测使用。

图 19-42～图 19-47 分别对应 *P*4、*P*58、*PA*、*PB*、*PC* 和 *PD* 在 5 月 31 日～6 月 6 日的预测值函数图，图 19-48～图 19-53 分别对应 *P*4、*P*58、*PA*、*PB*、*PC* 和 *PD* 在 5 月 31 日～6 月 6 日的动态神经网络自相关性图，自相关性图上，若自相关性越小，则表示网络训练越好，反之则该网络预测误差很大。

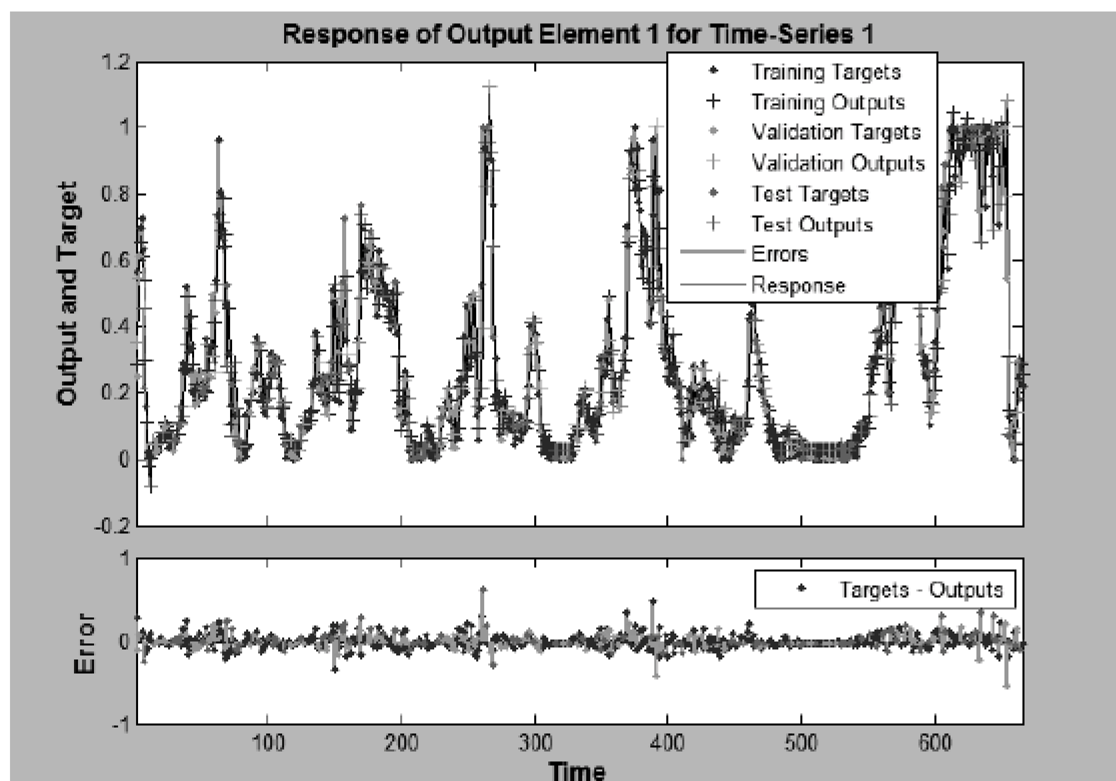


图 19-42　P4 风电机组长期预测图

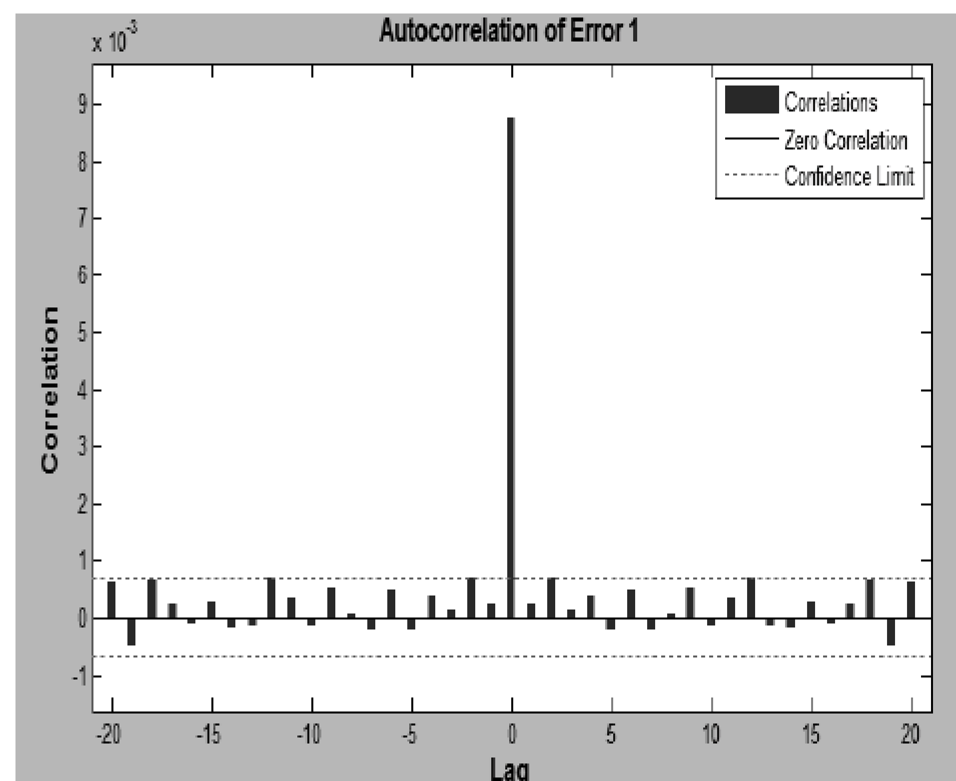


图 19-43　P4 动态神经网络自相关性图

图 19-44　P58 风电机组长期预测图

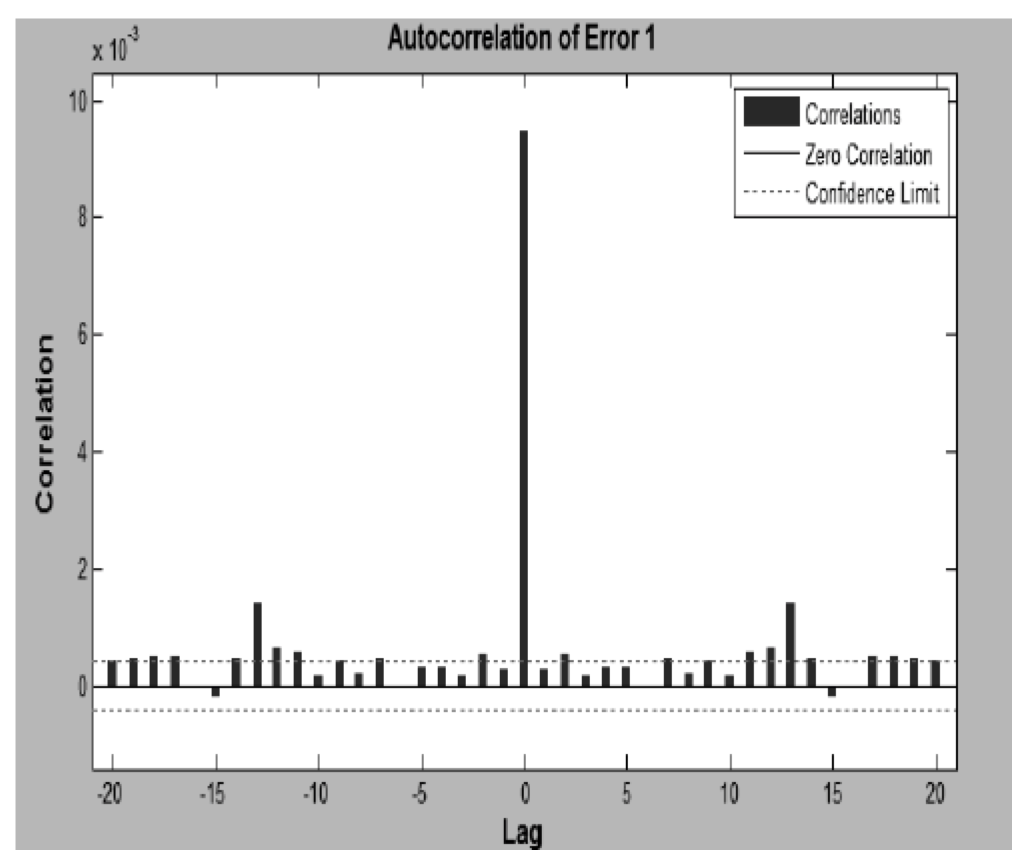


图 19-45　P58 动态神经网络自相关性图

图 19-46　PA 风电机组长期预测图

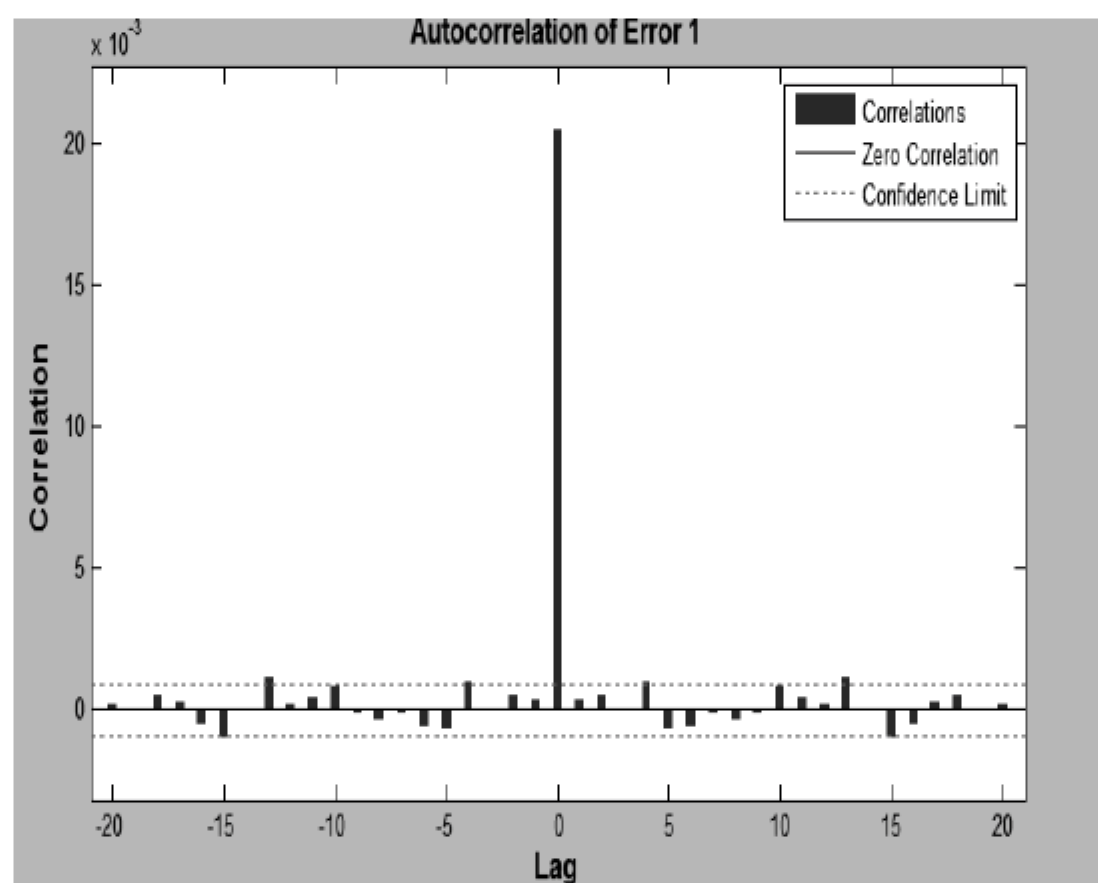


图 19-47　PA 动态神经网络自相关性图

图 19-48　PB 风电机组长期预测图

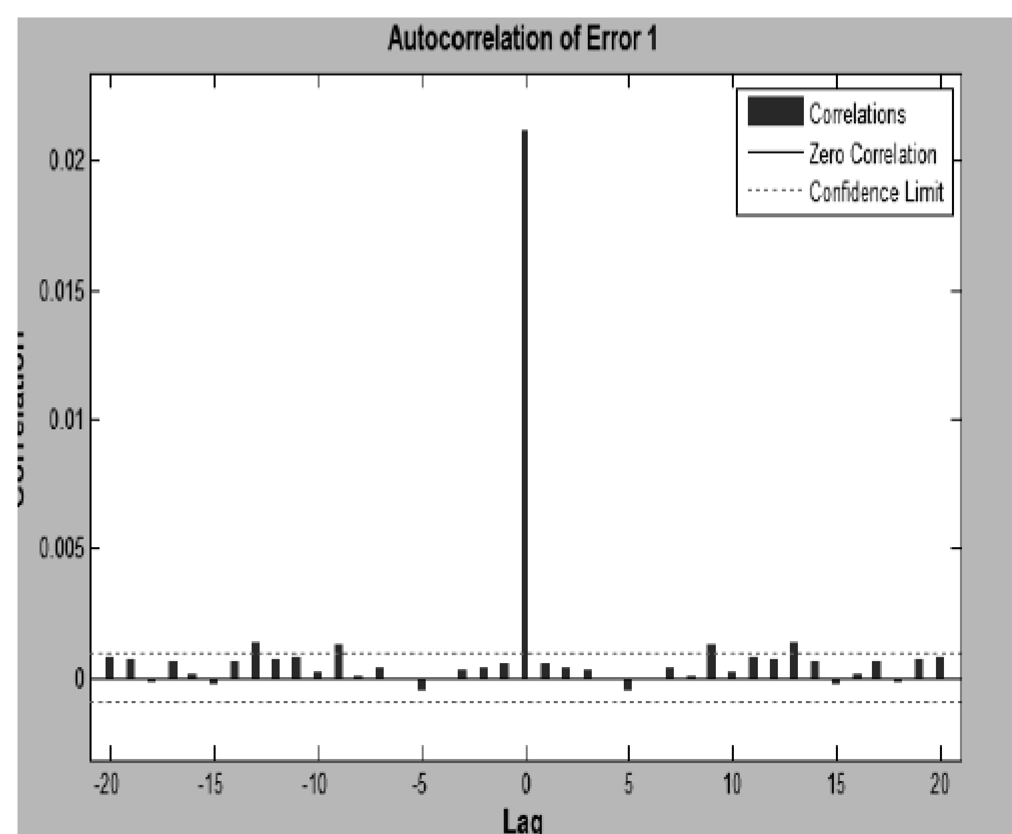


图 19-49　PB 动态神经网络自相关性图

19.7.4　提高预测精度的因素

在问题二中，我们讨论过“异常点”对预测风电功率精度有重要影响，避免在那些“异

常点”下多机组同时工作；在这些“异常点”的影响下，导致风电机组的发电功率异常。

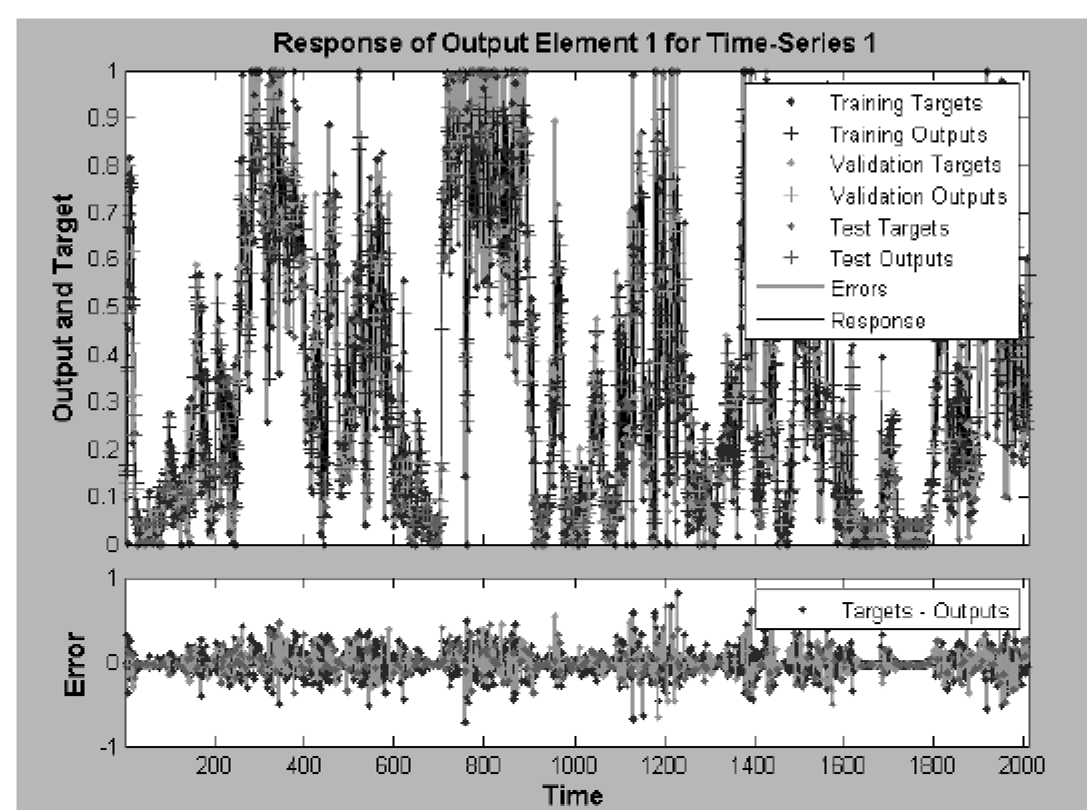


图 19-50　PC 风电机组长期预测图

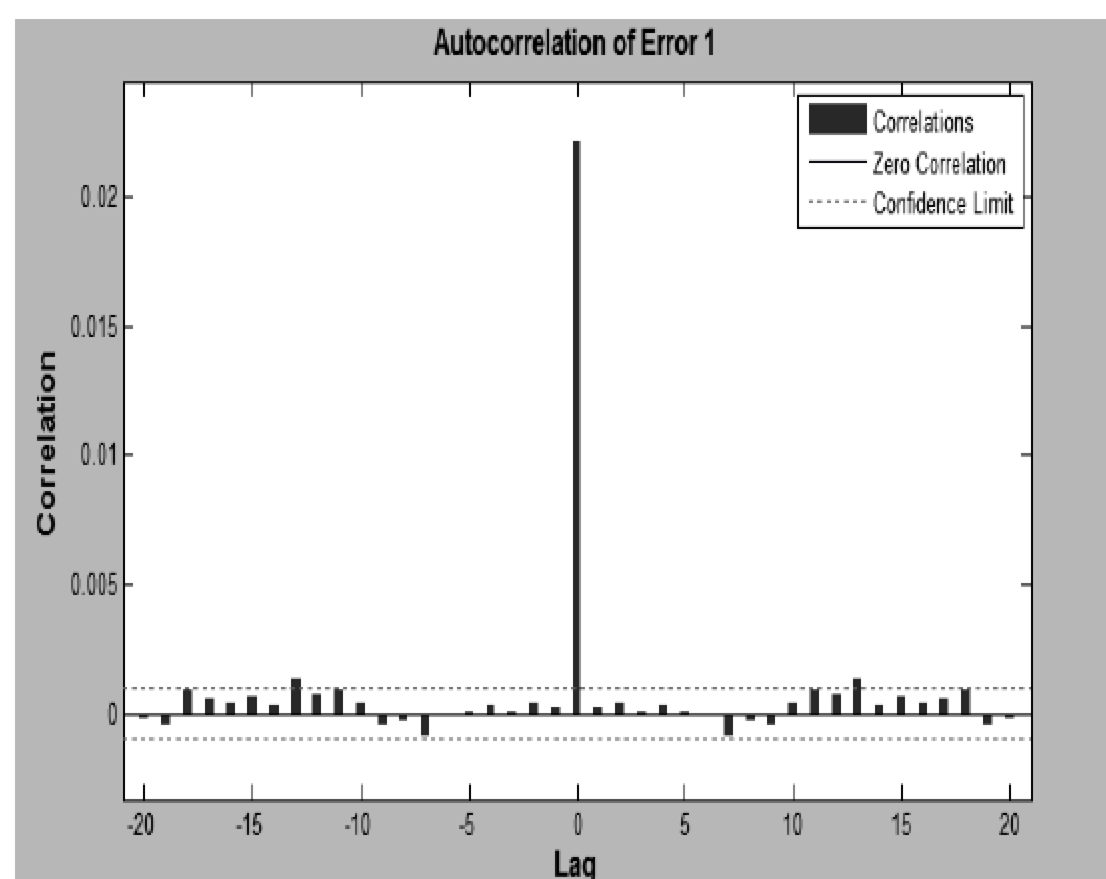


图 19-51　PC 动态神经网络自相关性图

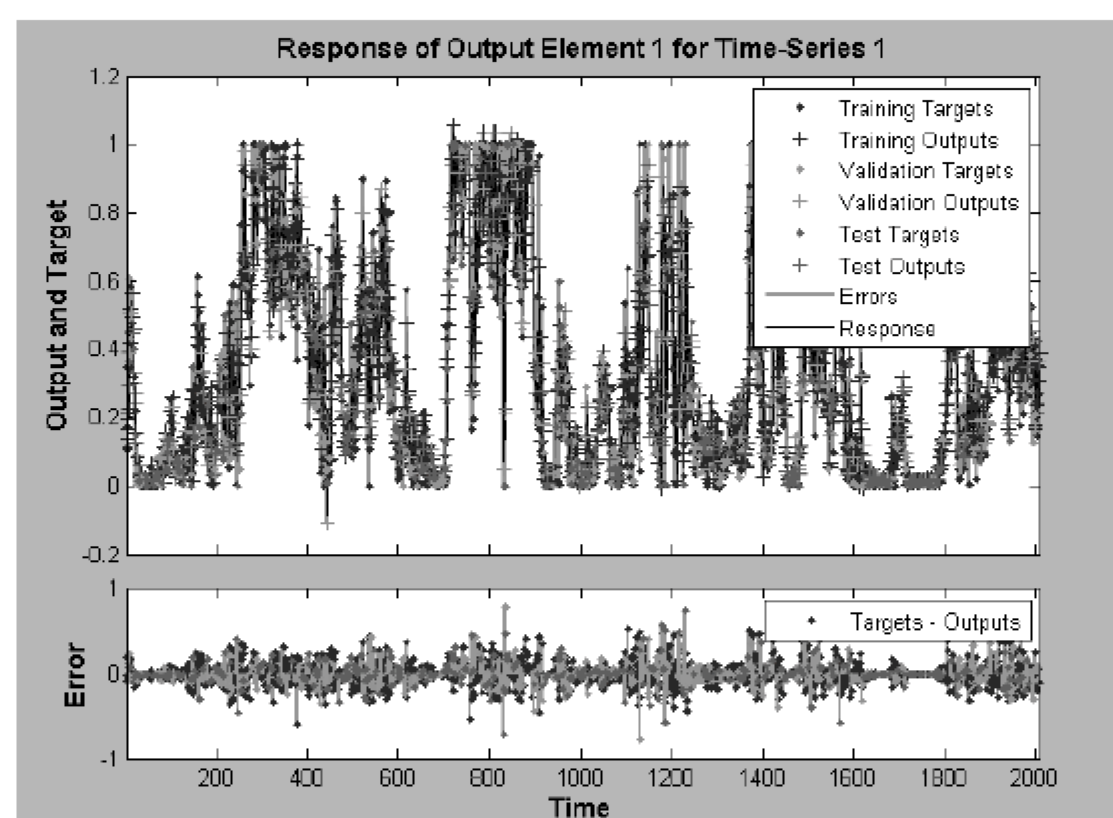


图 19-52　PB 风电机组长期预测图

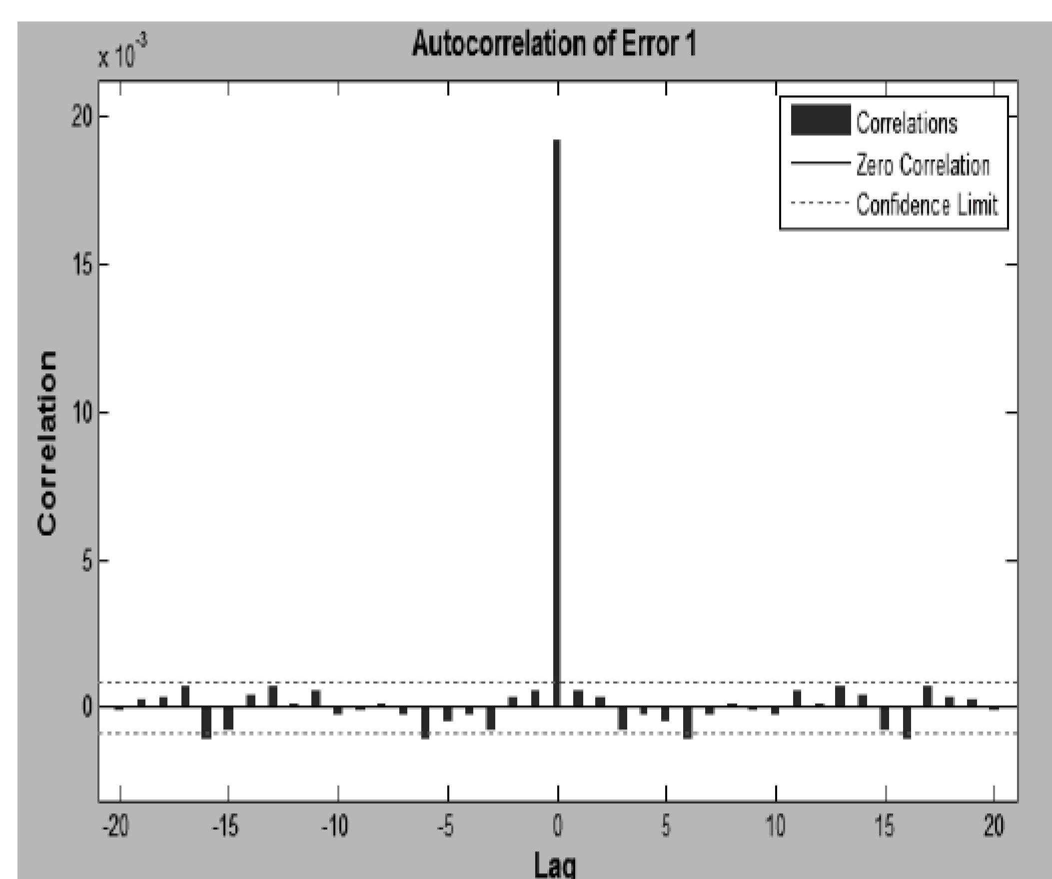


图 19-53　PD 动态神经网络自相关性图

当然，风电功率预测精度不能无限的提高，风电功率受风力、风速、气温和气压等因素的影响，变化没规律。而现行的预测精度一方面受外界因素的影响，一方面受模型本身因素影响，即存在偶然误差及系统误差，使得风电功率预测精度不能无限的提高。

19.8　模型的评价与推广

本章通过建立三次指数平滑、Marlov 链和 BP 神经网络三种预测模型，并进行比较，得出了适合于预测具有随机波动性及离散型的时间序列模型——BP 神经网络模型，并在此基础上进行改进，得出了更高精度的动态神经网络时间序列预测法，误差较小。

该动态神经网络时间序列预测法也有不足之处，部分数据对训练后的网络的检验不起作用，会失效。

该模型对开发风电功率预测系统具有一定的参考价值。

第 20 章　大学毕业生就业问题

大学毕业生越来越多，就业竞争力越来越大。现在专科、本科和研究生工资相差无几，很多毕业生觉得学历够了，仍然得不到相应的待遇，因此选择待业，因而导致社会人力资源的浪费，因此需要较好的评定专科、本科和研究生的工资。在这种新的形势下，开设就业指导课程，引导学生转变就业观念，提升职场竞争力和主动适应社会的能力，是非常及时和必要的。

学习目标：

（1）学习和掌握多元回归分析；

（2）掌握灰色预测方法；

（3）掌握系统聚类分析；

（4）掌握 MATLAB 工具箱广义回归方法。

20.1　问 题 提 出

大学毕业生就业问题不仅关系到每个学生的前途，还直接影响到我国高等教育的发展，更是关系到我国社会人力资源和经济发展状况的一件大事。

人力资源和社会保障部部长尹蔚民 3 月 8 日在北京表示，近几年数据显示高校毕业生初次就业率在 70%～75%之间，年底就业率基本上能够达到 90%以上。今年高校毕业生有 660 万人，总量的压力非常大。

在对学生的调查中了解到：学生对学校的就业指导保持一种迷茫的态度。大部分学生承认，目前他们最关心找工作的事。在这种新的形势下，开设就业指导课程，引导学生转变就业观念，提升职场竞争力和主动适应社会的能力，是非常及时和必要的。

表 1 给出了 2007 年～2010 年全国大学毕业生的平均起薪。表 2 是针对某高校是否开设就业指导课对学生进行的调查数据表。

（1）进一步收集数据，结合影响大学毕业生起薪点的有关因素（如当年毕业生总数和国家生产总值等等），建立模型预测 2011 年大学生平均起薪。

（2）在表 2 的基础上（也可补充数据，见程序文档），构建综合评价模型，定量分析就业指导课程、期望月薪及求职次数等对于大学生就业产生的影响。考虑不同学生之间的能力差距，适当降低期望月薪可以帮助学生更好地就业，请结合你的综合评价模型给出以上 90 名大学生的建议期望月薪。

（3）结合表 2 和表 3（见程序文档），建立模型定量分析是否有必要在硕士研究生中开设就业指导课程。

20.2 摘　　要

近年来，我国大学生毕业生就业问题凸现，引起社会各方面的关注。本章正是针对大学生就业起薪这个实际问题，建立了一系列模型，对预测 2011 年大学生平均起薪、分析各因素对大学生就业产生的影响及是否有必要在硕士研究生中开设就业指导课程做了详尽的分析与解答。

问题一通过收集 2002 年～2010 年大学生起薪数据，首先我们直接采用线性拟合的模式，求出了 2011 年的各类大学生的起薪值，分别为：专科毕业生 1767.7 元，本科毕业生 2383.1 元，硕士毕业生 3852.6 元。考虑到实际影响大学生就业起薪的相关因素，因此我们建立一个由就业总人数、GDP 指数、企业单位数和全部从业人员年平均人数四个因素组成的多元回归方程模型来预测 2011 年大学毕业生的起薪点。经过整合及多项式方程预测、灰色预测各类数据，最终分析得到，专科毕业生为 1574.4 元，本科毕业生为 2836.9 元，硕士毕业生为 4143.8 元；然后我们通过对这些因素进行主成分分析法，剔除一个决定性相对较低的因素（GDP 指数），从而得到更为符合实际情况的多元回归方程。从而得出了 2011 年大学生毕业平均起薪。专科毕业生为 1944.7 元, 本科毕业生为 2833.4 元，硕士毕业生为 3835.4 元，最后我们通过残差检验，得到预测值的可靠性。

针对问题二，我们以毕业起薪点作为反映大学生的就业质量。本章建立了一个以期望月薪、求职失败次数和就业指导课程为指标的评价模型，定量分析每个指标对大学生就业产生的影响。由于每个人的综合能力不一样，存在一定的差异性，所以我们又将 90 组数据进行系统聚类分析，将其综合能力接近的分为一类，然后分别对每一类进行多元回归分析，通过 SPSS19.0 求解出样本决定系数 R^2 、F 值及 P 值，通过对误差检测值的比较，得出一个相对满意的方程。但由于第一类数据的预测的误差值太大，故我们对该组数据单独进行了分析，采用动态神经网络方法中的广义回归方法进行相关预测；同时为了使得每位同学更好的就业，借助我们建立的模型进行对期望薪资进行逆向求解，即得出每位学生的比较合理的期望月薪。由于预测误差的存在，我们将得到每位同学的预测期望月薪，若预测期望值高于实际期望值，则取实际期望值；否则，取预测期望值。第一类毕业生的预测起薪在 1800～2600 元，期望月薪应在 2123.5～2500 元；第二类毕业生的起薪在 1700～2100 元，期望月薪应在 1255～2100 元；第三类毕业生的起薪在 2400～2900 元，期望月薪应在 2562.91～2900 元；第四类毕业生的起薪在 1000～1700 元，期望月薪应在 861.006～1700 元。

而题三要求结合 90 名本科生与 30 名硕士毕业生进行综合研究。首先我们对 90 名本科生中参加就业指导和没有参加就业指导的进行对比，发现参加就业指导与本科生起薪呈正相关，若参加就业指导，起薪将能增加 122.449 元。然后综合本科生与硕士毕业生，考虑到二者之间的能力存在较大差别，故不能笼统的针对上述三因素进行研究。故我们在问题二模型所考虑的因素上增加学历（学历量化所得值记做本科为 0，研究生为 1）这一个因素，从而使本科毕业生与硕士毕业生具有可比性；最终得出硕士毕业生起薪与参加就业指导也呈现正相关，若参加就业指导，起薪将能增加 121.026 元。由此得出硕士毕业生应该参加就业指导。

关键词：线性拟合、多项式方程预测、灰色预测、多元回归方程、系统聚类分析和广义回归方法。

20.3　基 本 假 设

（1）不考虑自然灾害和经济危机等不可预期的重大事件对大学生就业情况产生的重大冲击影响；

（2）国内的企业结构和人才需求不会发生大的调整；

（3）大学生的就业起薪只考虑自身能力而不考虑其他的特殊因素；

（4）假设所给数据均具有代表性和真实性；

（5）假设在未来几年内大学生的毕业人数不会由于其他因素而发生突变；

（6）假设本章中收集的数据基本准确；

（7）假设不同年份毕业的大学生整体素质基本相同；

（8）假设我们所得到的 2011 年对起薪产生影响的四个因素的数据值不存在较大误差，可以运用该数据来分析研究我国大学生起薪情况。

20.4　问 题 分 析

在此，我们通过收集相关数据，并建立相应的数学模型对其进行评价预测。

问题一要求建立模型预测 2011 年大学生平均起薪。

方法一，通过收集 2002 年～2010 年大学生起薪数据，直接采用线性预测；预测值只是客观反应大学生起薪的增长趋势，不能反应实际大学毕业生就业的影响因素。

方法二，通过分析影响大学毕业生起薪点的有关因素来建立一种模型以预测 2011 年大学毕业生的起薪点。通过网络资源的收集，我们归纳出了以下几个因素：当年毕业生总数、国家生产总值、企业单位数及全部从业人员年平均人数等。通过对这些因素进行数据整合及预测，进行多元回归预测；然后对这些因素进行主成分分析，剔除一些决定性相对较低的因素，从而得到更为符合实际情况的相关因素，从而更好的预测出 2011 年大学生毕业平均起薪，反应实际情况。

问题二，我们通过毕业生的起薪点来刻画就业质量，构建综合评价模型，分别以就业指导课程、期望月薪及求职次数等为指标进行评价，考虑到每个同学能力的差异性，我们首先对其 90 组数据进行了聚类分析，将其综合能力接近的分为一类，然后分别对其进行多元回归分析，通过 SPSS19.0 求解出样本决定系数 R^2 及 F 值 P 值，通过对这些值的比较，得出一个相对符合的方程，并对其进行定量评价。求解过程遇到第一类数据拟合情况不太好，我们采用动态时间神经网络方法进行相关数据处理；然后我们根据所建立的模型进行反解，求出期望薪资，得到适合每位同学的期望薪资，预测期望值高于实际期望值，则取实际期望值；否则，则取预测期望值。

问题三，要求结合 90 名本科生与 30 名硕士毕业生进行综合研究，首先我们对 90 名本科生中参加就业指导和没有参加就业指导的进行对比，分析是否参加就业指导对本科生

就业起薪的影响；再考虑二者之间的能力存在较大差别，故不能笼统的针对上述三因素进行研究。又在硕士毕业生起薪表中，都没有经过‘是否参加就业指导’，故我们在问题二模型所考虑的因素上添加变量，即增加学历（学历量化所得值记做本科为 0，研究生为 1）这一个因素，从而使本科毕业生与硕士毕业生具有可比性。

20.5　问　题　一

20.5.1　问题一的数据整理及处理

由问题一可知，主要对大学生的起薪进行预测，碍于题表中的数据太少，直接进行预测，误差很大。在此，通过网络资源库，如“历年高校毕业生就业率统计与中国人口金字塔图”和“中华人民共和国国家统计局”对 2002 年～2010 年大学生毕业起薪的收集与整合，我们得到如表 20-1 所示的各项数据。

表 20-1　2002～2010 年我国大学生起薪表

年　份	专　科	本　科	硕　士
2002	839	1035	1391
2003	935	1170	1609
2004	1050	1335	1988
2005	1188	1530	2393
2006	1336	1738	2716
2007	1443	1825	3200
2008	1380	1761	2725
2009	1546	2033	3192
2010	1662	2331	3590

20.5.2　模型的建立与求解

1．模型分析

由于样本很小，在此选择直接曲线拟合，分别对专科生、本科生和硕士进行大致预测。MATLAB 编程如下：

```
%1.1）起薪的直线拟合
t=[1,2,3,4,5,6,7,8,9];
x1=[839 935 1050    1188    1336    1443    1380    1546    1662];
x2=[1035    1170    1335    1530    1738    1825    1761    2033    2331];
x3=[1391    1609    1988    2393    2716    3200    2725    3192    3590];
subplot(1,3,1)
plot(t,x1,'+')
hold on
x=polyfit(t,x1,1);    % 直线拟合
t1=0:0.01:10;
```

```
y=x(1,1)*t1+x(1,2);      % 拟合方程
plot(t1,y,'r');
title('专科起薪预测图')
subplot(1,3,2)
plot(t,x2,'+')
hold on
x=polyfit(t,x2,1);       % 直线拟合
t1=0:0.01:10;
y=x(1,1)*t1+x(1,2);      % 直线拟合方程
plot(t1,y,'r');
title('本科起薪预测图')
subplot(1,3,3)
plot(t,x3,'+')
hold on
x=polyfit(t,x3,1);       % 直线拟合
t1=0:0.01:10;
y=x(1,1)*t1+x(1,2);      % 直线拟合方程
plot(t1,y,'r');
title('硕士起薪预测图')
```

由 MATLAB 程序运行结果得如图 20-1 所示的散点拟合图。

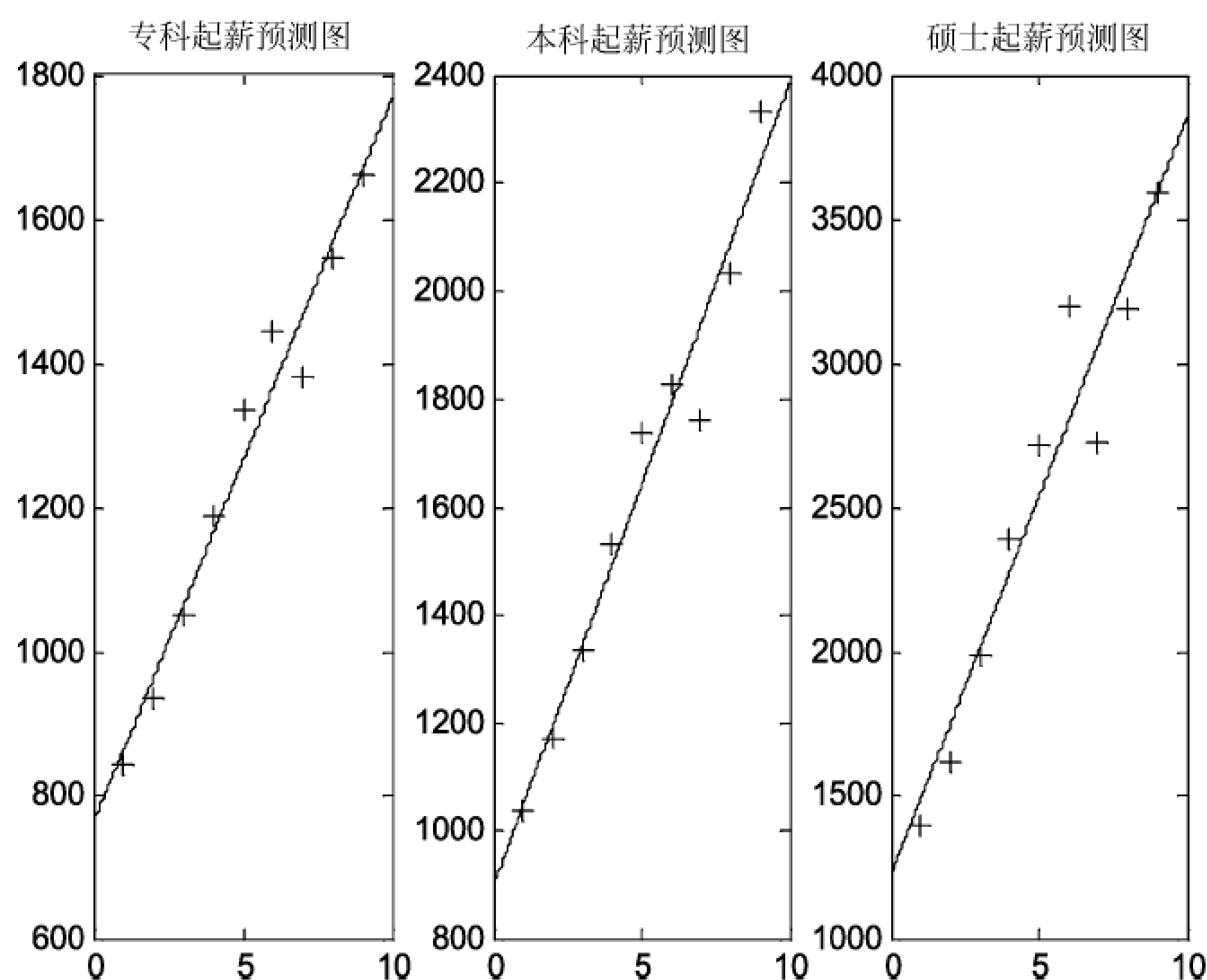


图 20-1　散点拟合图

从图 20-1 中可以看出，专科生、本科生和硕士毕业生的起薪随时间的变化呈现明显的正相关关系，故在此对样本进行线性处理。

2．模型的建立与求解

由以上分析可知，建立相应的起薪与时间的关系数学模型，利用最小二乘法原理对模型进行求解，并通过 SPSS19.0S 求解出复相关系数 R 、样本决定系数 R^2 、 F 值和 P 值。

其中， $R^2=1-\dfrac{\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2}{\Sigma(y_i-\overline{y})^2}$ ， $F=\dfrac{\Sigma(\hat{y}_i-\overline{y})^2}{m\cdot s^2}$ 。

求解如表 20-2 所示。

表 20-2　回归方程表

	专　　科	本　　科	硕　　士
复相关系数 R	$R=0.983$	$R=0.979$	$R=0.959$
样本决定系数 R^2	$R^2=0.962$	$R^2=0.959$	$R^2=0.919$
F	$F=202.489$	$F=164.755$	$F=79.629$
p	$p=0.000$	$p=0.000$	$p=0.000$
专科毕业生	$y_1=100.67t+761$		
本科毕业生	$y_2=148.67t+896.4$		
硕士毕业生	$y_3=263.8t+1214.9$		

其中由上述 $R^2=0.962$ 及 $p=0.000$ 参数可知，该数学模型拟合很好，并由此预测 2011 年专科生、本科生和硕士毕业生的起薪，其数据如表 20-3 所示。

表 20-3　预测结果

年份	专科	本科	硕士
2011	1767.7	2383.1	3852.6

实际中，考虑到影响大学生就业起薪的相关因素，大学生的起薪受到多方面的影响。例如，总人数、GDP 指数、企业单位数和全部从业人员年平均人数等因素，大学生的起薪简单的随时间的线性关系函数并不能反映实际情况，故大学生的起薪不能简单的用时间的线性关系约束而一概并之。

20.5.3　模型的改进

1．符号说明

sum	毕业总人数
GDP	GDP 指数
com	企业单位数
workers	全部从业人员年平均人数

2．数据的收集

根据以上分析，查阅“中华人民共和国国家统计局”，收集相关数据并进行整合可得到表 20-4。

表 20-4　统计数据表

毕业时间	sum	GDP	com	workers
2001 年	115	108.3003	171256	5441.43
2002 年	145	109.0821	181557	5520.66
2003 年	212	110.0254	196222	5748.57
2004 年	280	110.085	276474	6622.09
2005 年	338	111.31	271835	6895.96
2006 年	413	112.6765	301961	7358.43

续表

毕业时间	sum	GDP	com	workers
2007 年	495	114.1624	336768	7875.2
2008 年	559	109.6347	426113	8837.63
2009 年	611	109.1131	434364	8831.22
2010 年	631			
2011 年	660			

3. 数据的预处理

由于表 20-4 中存在残缺数据，为使得之后的预测更符合实际，需要对这些残缺数据建立相应的数学模型，从而对残缺数据进行预测。

通过对数据的分析建立相应的预测模型，借助 SPSS 软件分别对其进行回归分析，并对其进行求解得到相应的复相关系数 R、样本决定系数 R^2、F 值及 P 值。从而进行合理的预测，结果如图 20-2～图 20-4 所示。

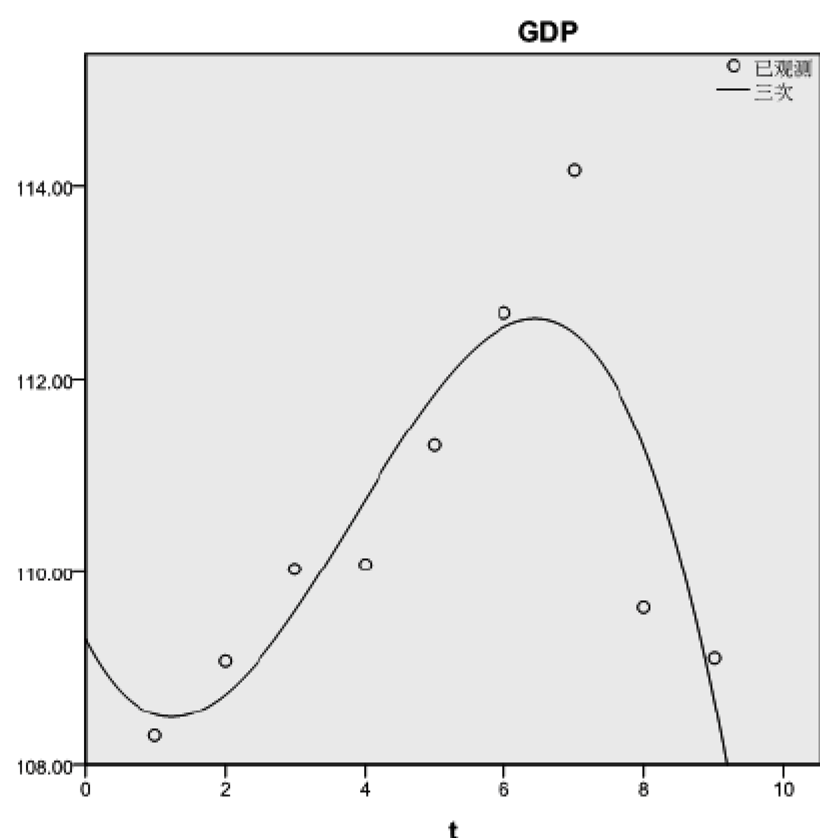


图 20-2　GDP 变化图

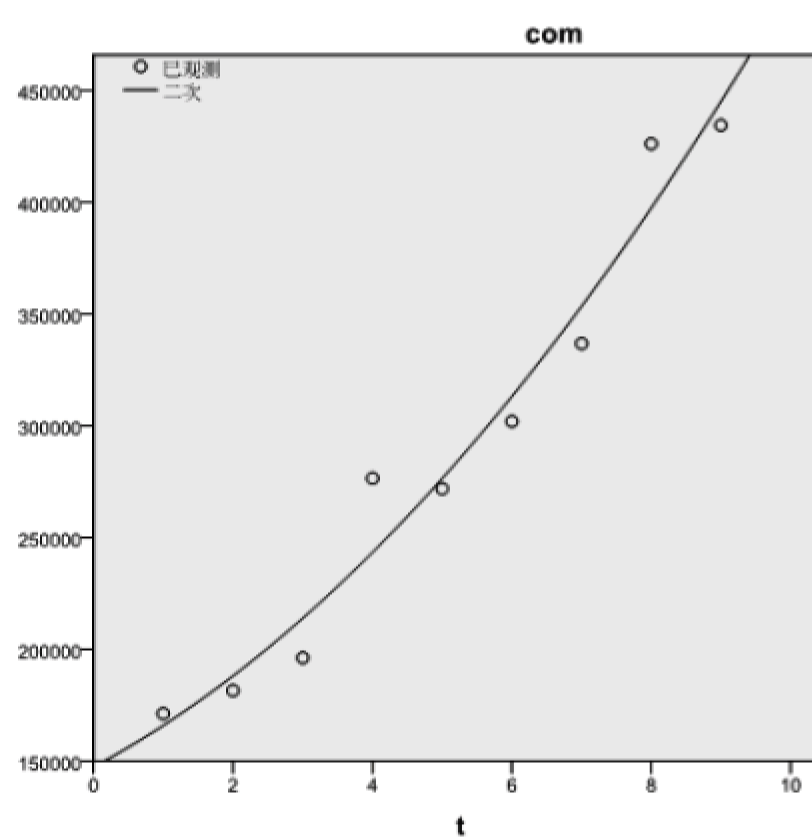


图 20-3　企业单位数变化

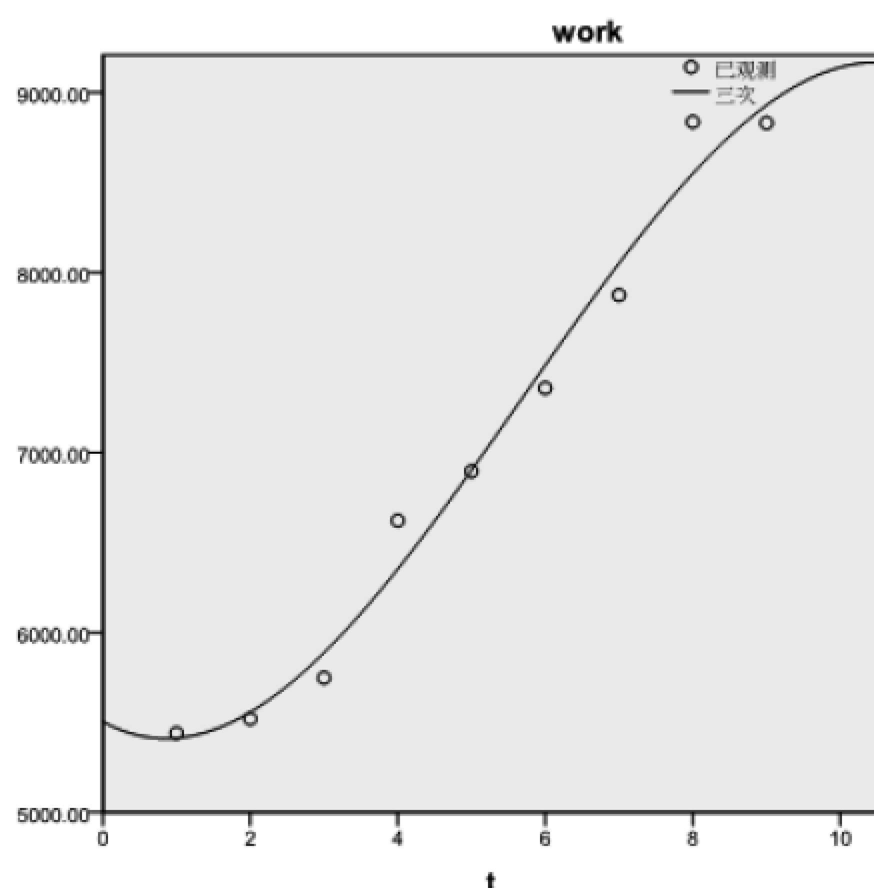


图 20-4　全部从业人员年平均人数变化图

（注：图 20-2 表示 GDP 指数随时间变化图像；图 20-3 表示企业单位数随时间变化图像；图 20-4 表示全部从业人员年平均人数随时间变化关系图像。）

整理数据结果如表 20-5 所示。

表 20-5　回归系数表

各因素	GDP	com	workers
复相关系数 R	$R=0.871$	$R=0.981$	$R=0.992$
样本决定系数 R^2	$R^2=0.759$	$R^2=0.963$	$R^2=0.983$
F	$F=5.235$	$F=78.113$	$F=97.854$
p	$p=0.053$	$p=0.000$	$p=0.000$
GDP 指数	$y_{\text{GDP}}=-0.059t^3+0.675t^2-1.403t+109.307$		
企业单位数	$y_{\text{com}}=1814.973t^2+16728.254t+147390.143$		
全部从业人员平均人数	$y_{\text{work}}=-8.446t^3+143.529t^2-227.204t+5505.82$		

从表 20-5 中得到的各因素的相关数学模型表达式，由此预测到 GDP、com 和 $workers$ 2010 年、2011 年的相关数据如表 20-6 所示。

表 20-6　预测数据

	2010 年	2011 年
GDP	103.777	97.02
com	496169.983	551012.67
workers	9140.68	9131.959

分析拟合回归方程，从模型的拟合相关决定参数得到，GDP 拟合相对较差，结果可靠性较差，误差 $p=0.053>0.001$ 相对较大。而 com 和 workers 拟合较好，$p=0.000<0.001$，结果模拟的非常好，具有可靠性。

故针对于 GDP，我们对其进行单独处理，本章中将采取灰色预测模型，对 GDP 进行未来的预测。

4．数据的修正

Step1：为了保证建模方法的可行性，需要对已知数据列做必要的检验处理。设参考数据为 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots x^{(0)}(n))$，计算数列的级比。

$$\lambda(k)=\frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)},\ (k=2,3\cdots n)$$

如果所有的级比 $\lambda(k)$ 都落在可容覆盖 $(e^{\frac{2}{n+1}},e^{\frac{2}{n+2}})$ 内，则数列 $x^{(0)}$ 可以作为模型 GM(1,1) 的数据进行灰色预测。否则，需要对数列 $x^{(0)}$ 做必要的变换处理，使其落入可容覆盖内。即取适当的常数 c，作平移变换：

$$y^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)+c\ ,k=1,2,\cdots n$$

则使数列 $y^{(0)}=(y^{(0)}(1),y^{(0)}(2),\cdots y^{(0)}(n))$ 的级比：

$$\lambda_y(k)=\frac{y^{(0)}(k-1)}{y^{(0)}(k)}\in X,\ (k=2,3\cdots n)$$

Step2：按上述方法建立模型 GM(1,1)，则可以得到预测值。

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})e^{-ak}+\frac{b}{a},\quad k=1,2,\cdots n-1$$

而且 $\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)$，$k=1,2,\cdots,n-1$。

Step3：残差检验，令残差为 $\varepsilon(k)$，计算如下。

$$\varepsilon(k)=\frac{x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)},k=1,2,\cdots,n$$

如果 $\varepsilon(k)<0.2$，则可认为达到一般要求；如果 $\varepsilon(k)<0.1$，则认为达到较高的要求。

Step4：级比偏差值检验，首先由参考数据 $x^{(0)}(k-1)$ 和 $x^{(0)}(k)$ 计算出级比 $\lambda(k)$，再用发展系数 a 求出相应的级比偏差。

$$\rho(k)=1-(\frac{1-0.5a}{1+0.5a})\lambda(k)$$

如果 $\rho(k)<0.2$，则可认为达到一般要求；如果 $\rho(k)<0.1$，则认为达到较高的要求。通过以上的分析，编程如下：

```
%1.2) GDP 灰色预测程序
clc,clear,close all
GDP=[108.3;109.08;110.03;110.08;111.31;112.68;114.16;109.63;109.11]';
t=[1;2;3;4;5;6;7;8;9]';
%
workers=[5441.4;5520.7;5748.6;6622.1;6896;7358.4;7875.2;8837.6;8831.2]'
;
% com=[171256;181557;196222;276474;271835;301961;336768;426113;434364]';
n=length(GDP);
lamda=GDP(1:n-1)./GDP(2:n);
range=minmax(lamda);                % 最小最大值
x1=cumsum(GDP);                     % 求和
for i=2:n
    z(i)=0.5*(x1(i)+x1(i-1));      % 均值
end
B=[-z(2:n)',ones(n-1,1)];
Y=GDP(2:n)';
u=B\Y
x=dsolve('Dx+a*x=b','x(0)=x0');
x=subs(x,{'a','b','x0'},{u(1),u(2),x1(1)});
yuce1=subs(x,'t',[0:n-1]);
digits(6),y=vpa(x)                          %为提高预测精度，先计算预测值，再显示微
分方程的解
yuce=diff(yuce1);
yuce=[x1(1),yuce]
epsilon=GDP-yuce                            %计算相对误差
delta=abs(epsilon./GDP)                     %计算残差
rho=1-(1-0.5*u(1))/(1+0.5*u(1))*lamda       %计算级比偏差值
```

由 MATLAB 灰色预测得表 20-7 所示。

表 20-7　灰色预测值

年份	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
真实值	108.3	109.08	110.03	110.08	111.31	112.68	114.16	109.63	109.11
预测值	108.3	110.27	110.41	110.55	110.69	110.83	110.97	111.11	111.25
$\varepsilon(k)$	0	0.0109	0.0035	0.0043	0.0056	0.0164	0.028	0.0135	0.0196
$\rho(k)$	……	0.0059	0.0074	-0.0008	0.0098	0.0109	0.0117	-0.0426	-0.006

从表 20-7 看出，$\varepsilon(k)<0.1$、$\rho(k)<0.1$ 均通过残差检验、级比偏差值检验，故此灰色预测模型对 GDP 的预测较合理，建立 GM(1,1)模型，得：

$$\hat{y}_{\text{GDP}}^{(1)}=87600.2e^{(0.001258t)}-87491.9$$

则预测到第 2010 年及第 2011 年 GDP 数据如表 20-8 所示。

表 20-8　预测值

	2010 年	2011 年
GDP	111.4588	111.5992

在前面，用线性拟合已经得到了 GDP 的值，相比而言，只是误差值较大，但仍具有一定的参考性。用此灰色模型预测的结果较实际情况不相对称，故采用两种方法得到的结果取平均值进行更正。

更正 GDP 值如表 20-9 所示。

表 20-9　取平均值预测

	2010 年	2011 年
GDP	107.6179	104.3096

5．模型的分析

由上述相关因素收集与预测的数据，整理如表 20-10。

表 20-10　预测的数据

年份	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
专科	839	935	1050	1188	1336	1443	1380	1546	1662
本科	1035	1170	1335	1530	1738	1825	1761	2033	2331
硕士	1391	1609	1988	2393	2716	3200	2725	3192	3590
sum	145	212	280	338	413	495	559	611	631
GDP	109.1	110.0	110.1	111.3	112.8	114.2	109.6	109.1	107.6
com	181557	196222	276474	271835	301961	336768	426113	434364	496170
workers	5520.7	5748.6	6622.1	6896.0	7358.4	7875.2	8837.6	8831.2	9140.7

考虑到各因素对大学生就业起薪的影响程度不同，应对各因素进行一定的主成分分析，从而得到影响大学生就业起薪各因素所占的权重，对影响较小的成分进行剔除，保留影响较大的因子。所以在这里，我们采取了对所有考虑到的因素进行关联度分析，如下所示。

Step1：为消除量纲对分析结果的影响，我们需要对其进行无量纲化处理。常用的有标准化、初始化、极差法和最大值化等，在此也选用极差法进行处理，如下所示。

$$f(x(k))=\frac{x(k)-\min\limits_k x(k)}{\max\limits_k x(k)-\min\limits_k x(k)}=y(k)$$

令：

$$x'_{ij}=\frac{x_{ij}-m_j}{M_j-m_j}\quad(i=1\cdots7,j=1\cdots9)$$

其中，$M_j=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 7}\{x_{ij}\}$，$m_j=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 7}\{x_{ij}\}$，$j=1\cdots 9$，则 $x'_{ij}\in[0,1]$ 是无量纲的指标观测值。

Step2：建立各相关指标的原始数据矩阵 x_i。

$$x_i=\left(x_i(1),x_i(2),\cdots,x_i(k),\cdots\right)$$

式中 $x_i(k)$ 表示 i 因素在第 k 年的原始数据。

Step3：求初值像矩阵 x'_i。

$$x'_i=\left(x_i(1)/x_i(1),x_i(2)/x_i(1),\cdots,x_i(k)/x_i(1),\cdots\right)=\left(x'_i(1),x'_i(2),\cdots x'_i(k),\cdots\right)$$

Step4：求差序列 $\Delta_{0i}(k)$。

$$\Delta_{0i}(k)=\left|x_0^i(k)-x'_i(k)\right|,\Delta_{0i}(k)=\left(\Delta_{0i}(1),\Delta_{0i}(2),\cdots\Delta_{0i}(k),\cdots\right)$$

Step5：计算关联系数 $\xi_{0i}(k)$ 和灰色关联度 $\Delta_{0i}(k)$。

$$\xi_{0i}(k)=\frac{\min\limits_i\min\limits_k\Delta_{0i}(k)+\varphi\max\limits_i\max\limits_k\Delta_{0i}(k)}{\Delta_{0i}(k)+\varphi\max\limits_i\max\limits_k\Delta_{0i}(k)}$$

其中 φ 为分辨系数，其作用在于提高关联系数间的差异显著性，$\varphi\in(0,1)$，一般取 $\varphi=0.5$。

则灰色关联度：

$$\gamma_{0i}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_{0i}(k)$$

MATLAB 软件对其进行求解，编程如下：

```
%1.3) 计算关联度
clc,clear,close all
x=[839 935 1050   1188    1336    1443    1380    1546    1662
1035    1170    1335    1530    1738    1825    1761    2033    2331
1391    1609    1988    2393    2716    3200    2725    3192    3590
145 212 280 338 413 495 559 611 631
109.08  110.03  110.08  111.31  112.68  114.16  109.63  109.11  107.62
1.8156e+005 1.9622e+005 2.7647e+005 2.7184e+005 3.0196e+005 3.3677e+005
    4.2611e+005 4.3436e+005 4.9617e+005
5520.7  5748.6  6622.1  6896    7358.4  7875.2  8837.6  8831.2  9140.7];
x0=minmax(x);
for i=1:7
   for j=1:9
      x1(i,j)=(x(i,j)-x0(i,1))/(x0(i,2)-x0(i,1));  % 归一化处理
   end
end
data=x1;
n=size(data,1);
for k=1:3
   ck=data(k,:);m1=size(ck,1);
   bj=data(4:n,:);m2=size(bj,1);
   for i=1:m1
      for j=1:m2
         t(j,:)=bj(j,:)-ck(i,:);
      end
      jc1=min(min(abs(t')));jc2=max(max(abs(t')));    % 最小值、最大值
      rho=0.5;
      ksi=(jc1+rho*jc2)./(abs(t)+rho*jc2);            % 关联系数
      rt=sum(ksi')/size(ksi,2);                       % 灰色关联度
      r(i,:)=rt;
```

```
    end
    z(k,:)=r;
end
z                                   % 灰色关联度
[rs,rind]=sort(z','descend')        % 对关联度进行排序
```

运行程序得到 sum 、GDP、com 和 workers 分别对专科生、本科生和研究生的灰色关联度如下：

$$\xi=\begin{bmatrix}0.922 & 0.634 & 0.850 & 0.888\\ 0.887 & 0.620 & 0.869 & 0.890\\ 0.889 & 0.654 & 0.845 & 0.865\end{bmatrix}$$

排序得到：

专科生　　$\xi_{01}>\xi_{04}>\xi_{03}>\xi_{02}>0.5$

本科生　　$\xi_{04}>\xi_{01}>\xi_{03}>\xi_{02}>0.5$

研究生　　$\xi_{01}>\xi_{04}>\xi_{03}>\xi_{02}>0.5$

综上结果看出，每种因素对起薪点的影响都比较大，但国内生产总值 GDP 对毕业生的起薪影响相对较小；sum、com 和 workers 对毕业生的起薪的关联度都 $\geqslant 0.8$ 。

6．模型的建立与求解

借助 SPSS19.0，分别对各因素进行偏相关检验，得：

$r_{x1;2,3,4}=0.83$ ，$r_{x2;1,3,4}=0.723$ ，$r_{x3;1,2,4}=0.728$ ，$r_{x4;1,2,3}=-0.784$

$r_{y1;2,3,4}=0.747$ ，$r_{y2;1,3,4}=0.596$ ，$r_{y3;1,2,4}=0.751$ ，$r_{y4;1,2,3}=-0.786$

$r_{z1;2,3,4}=0.77$ ，$r_{z2;1,3,4}=0.83$ ，$r_{z3;1,2,4}=0.794$ ，$r_{z4;1,2,3}=-0.811$

（注：1、2、3、4 分别对应 sum、GDP、com、workers 因素，$r_{x1;2,3,4}=0.83$ 表示在 2、3、4 号因素的控制下，1 对专科生就业起薪的偏相关系数为 0.83，$r_{y1;2,3,4}=0.747$ 和 $r_{z1;2,3,4}=0.77$ 则针对本科生和硕士。）

以上可得，各因素均通过偏相关检验，故我们采用多元拟合的方式分别对专科生、本科生和硕士进行分析，由 SPSS19.0 分析可得表 20-11。

表 20-11　回归系数表

	专　科	本　科	硕　士
复相关系数 R	$R=0.993$	$R=0.987$	$R=0.99$
样本决定系数 R^2	$R^2=0.987$	$R^2=0.974$	$R^2=0.981$
F	$F=76.149$	$F=37.263$	$F=51.106$
p	$p=0.000$	$p=0.002$	$p=0.001$
专科未标准化回归方程	$y=2.5x_1+32.585x_2+0.003x_3-0.39x_4-1566.121$		
专科标准化回归方程	$y^*=1.576x_1+0.236x_2+1.319x_3-1.871x_4$		
本科未标准化回归方程	$y=3.974x_1+48.724x_2+0.008x_3-0.827x_4-1721.239$		
本科标准化回归方程	$y=1.69x_1+0.238x_2+2.008x_3-2.676x_4$		
硕士未标准化回归方程	$y=6.64x_1+151.848x_2+0.014x_3-1.402x_4-10988.091$		
硕士标准化回归方程	$y=1.558x_1+0.41x_2+1.976x_3-2.504x_4$		

（注：x_1 表示 sum，x_2 表示 GDP，x_3 表示 com，x_4 表示 workers，$y_i(i=1,2,3)$ 分别表示专科、本科和硕士的起薪。）

根据表 20-11 的统计量，对于本科生的预测误差存在相对较大的误差，但总体上，可

以进行对 2011 年的起薪的预测，由此得到表 20-12。

表 20-12　预测数据

	专　科	本　科	硕　士
2011 年	1574.4	2836.9	4143.8

从各标准回归方程中可看出，GDP 前的系数分别为 0.236、0.238 和 0.41，较其他三个因素而言，相差较小，显著性水平并不高，影响较小；在此，我们考虑相关性分析。

我们对以上四种因素进行相关性检验，通过 SPSS19.0 我们可以得到各个因素分别对专科、本科和硕士的相关性矩阵。

$$\text{专科：}\begin{bmatrix} 1.000 & 0.979 & -0.009 & 0.939 & 0.958 \\ 0.979 & 1.000 & -0.092 & 0.972 & 0.993 \\ -0.009 & -0.092 & 1.000 & -0.286 & -0.149 \\ 0.939 & 0.972 & -0.286 & 1.000 & 0.986 \\ 0.958 & 0.993 & -0.149 & 0.986 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$\text{本科：}\begin{bmatrix} 1.000 & 0.964 & -0.095 & 0.944 & 0.945 \\ 0.964 & 1.000 & -0.092 & 0.972 & 0.993 \\ -0.095 & -0.092 & 1.000 & -0.286 & -0.149 \\ 0.944 & 0.972 & -0.286 & 1.000 & 0.986 \\ 0.945 & 0.993 & -0.149 & 0.986 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$\text{硕士：}\begin{bmatrix} 1.000 & 0.955 & -0.073 & 0.905 & 0.929 \\ 0.955 & 1.000 & -0.092 & 0.972 & 0.993 \\ -0.073 & -0.092 & 1.000 & -0.286 & -0.149 \\ 0.905 & 0.972 & -0.286 & 1.000 & 0.986 \\ 0.929 & 0.993 & -0.149 & 0.986 & 1.000 \end{bmatrix}$$

根据以上矩阵可以看出 GDP 与起薪点的相关性非常小，相反 sum、com 和 workers 的相关性很大，所以在此考虑剔除 GDP 因素。

20.5.4　模型的进一步改进

1．模型的建立与求解

根据以上的分析，在剔除 GDP 的前提下我们建立如下多元线性回归模型：

$$y_i = \alpha x_1 + \beta x_3 + \gamma x_4 + c + \varepsilon_i \quad (i = 1 \cdots n)$$

α、β 和 γ 为模型回归系数，c 为常数项，ε_i 为除自变量 x_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$ 的影响之外对 y 产生影响的随机变量，即随机误差。求解的结果经过整理由表格形式给出。

同样求解得到表 20-13。

表 20-13　回归系数表

	专　科	本　科	硕　士
复相关系数 R	$R = 0.986$	$R = 0.98$	$R = 0.969$
样本决定系数 R^2	$R^2 = 0.973$	$R^2 = 0.935$	$R^2 = 0.938$

续表

	专　　科	本　　科	硕　　士
F	$F = 59.767$	$F = 39.437$	$F = 25.298$
p	$p = 0.000$	$p = 0.001$	$p = 0.002$
专科未标准化回归方程	$y = 3.171x_1 + 0.001x_2 - 0.266x_3 + 1729.927$		
专科标准化回归方程	$y = 2x_1 + 0.254x_2 - 1.277x_3$		
本科未标准化回归方程	$y = 4.977x_1 + 0.004x_2 - 0.642x_3 + 3207.333$		
本科标准化回归方程	$y = 2.177x_1 + 0.934x_2 - 2.077x_3$		
硕士未标准化回归方程	$y = 9.767x_1 + 0.001x_2 - 0.825x_3 + 4372.106$		
硕士标准化回归方程	$y = 2.293x_1 + 0.129x_2 - 1.474x_3$		

MATLAB 编程预测专科、本科和硕士就业起薪值，编程如下：

```
%1.4) 预测的大学生起薪
clc,clear,close all
syms x1 x2 x3
y1=3.171*x1+0.001*x2-0.266*x3+1729.927;
y2=4.977*x1+0.004*x2-0.642*x3+3207.333;
y3=9.767*x1+0.001*x2-0.825*x3+4372.106;
x11=[145,212,280,338,413,495,559,611,631,660];
x22=[1.8156e+005,1.9622e+005,2.7647e+005,2.7184e+005,3.0196e+005,3.3677
e+005,4.2611e+005,4.3436e+005,4.9617e+005,5.5101e+005];
x33=[5520.7,5748.6,6622.1,6896,7358.4,7875.2,8837.6,8831.2,9140.7,9132]
;
for i=1:10
    y11(i,1)=subs(y1,{x1,x2,x3},{x11(1,i),x22(1,i),x33(1,i)});
                                            % 未知量用已知数据替换
    y22(i,1)=subs(y2,{x1,x2,x3},{x11(1,i),x22(1,i),x33(1,i)});
                                            % 未知量用已知数据替换
    y33(i,1)=subs(y3,{x1,x2,x3},{x11(1,i),x22(1,i),x33(1,i)});
                                            % 未知量用已知数据替换
end
```

则预测结果如表 20-14 所示。

表 20-14　预测结果

年　　份	专　　科	预　测　值	本　　科	预　测　值	硕　　士	预　测　值
2002	839	902.78	1035	1110.9	1391	1415.3
2003	935	1069.3	1170	1356.7	1609	1896.3
2004	1050	1132.8	1335	1455.4	1988	1920.1
2005	1188	1239.2	1530	1549.7	2393	2256
2006	1336	1384.2	1738	1746.6	2716	2637.2
2007	1443	1541.5	1825	1962.1	3200	3046.5
2008	1380	1577.8	1761	2020.2	2725	2966.9
2009	1546	1752.7	2033	2316.1	3192	3488.4
2010	1662	1795.6	2331	2464.2	3590	3490.2
2011		1944.7		2833.4		3835.4

2. 结果的分析及检验

有时间序列数据的处理中，会引起序列相关问题。由于存在序列相关，当采用最小二

乘法建立回归预测模型时，将会使自变量前的系数（a 和 b）的估计不再具有最小方差，不再是有效的估计量，将会使系统检验功能减小，置信区间过宽，使预测失效。因而，必须对回归预测模型进行序列相关检验，也就是 DW 检验，以保证预测结果的有效性。

DW 检验的步骤如下（以专科为例）。

Step1：计算 DW 的值。

统计量 DW 定义为：

$$\mathrm{DW}=\frac{\sum_{t=2}^{n}\left(e_t-e_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=2}^{n}e_t{}^2}$$

根据 MATLAB 进行求解，结果为：

$$\mathrm{DW}=0.1899$$

Step2：利用同样的方法对本科和硕士进行检验。MATLAB 程序如下：

```
clc,clear,close all
x11=[839    935 1050    1188    1336    1443    1380    1546    1662]';
x12=[902.78 1069.3  1132.8  1239.2  1384.2  1541.5  1577.8  1752.7
    1795.6]';
x21=[1035   1170    1335    1530    1738    1825    1761    2033
    2331]';
x22=[1110.9 1356.7  1455.4  1549.7  1746.6  1962.1  2020.2  2316.1
    2464.2]';
x31=[1391   1609    1988    2393    2716    3200    2725    3192
    3590]';
x32=[1415.3 1896.3  1920.1  2256    2637.2  3046.5  2966.9  3488.4
    3490.2]';
e1=x12-x11;
e11=e1(1:8,:);
e12=e1(2:9,:);
DW1 = sum((e12-e11).^2)/sum(e12.^2)  % DW 检验
subplot(1,3,1)
plot(e11,e12,'+')
title('专科 DW 检验')

subplot(1,3,2)
e2=x22-x21;
e21=e2(1:8,:);
e22=e2(2:9,:);
DW2 = sum((e22-e21).^2)/sum(e22.^2)  % DW 检验
plot(e21,e22,'+')
title('本科 DW 检验')

subplot(1,3,3)
e3=x32-x31;
e31=e3(1:8,:);
e32=e3(2:9,:);
DW3 = sum((e32-e31).^2)/sum(e32.^2)  % DW 检验
plot(e31,e32,'+')
title('硕士 DW 检验')
hold on
t1=0;y1=-200:0.01:400;
plot(t1,y1,'r')
hold on
plot(y1,t1,'r')
```

运行程序输出结果得到表 20-15。

表 20-15　DW检验值

	专　科　生	本　科　生	硕　士　生
DW	0.1899	0.3483	1.7991

Step3：根据预测值与实际值之间的相对误差，画出 $e_t \sim e_{t-1}$ 的散点图，如图 20-5 所示。

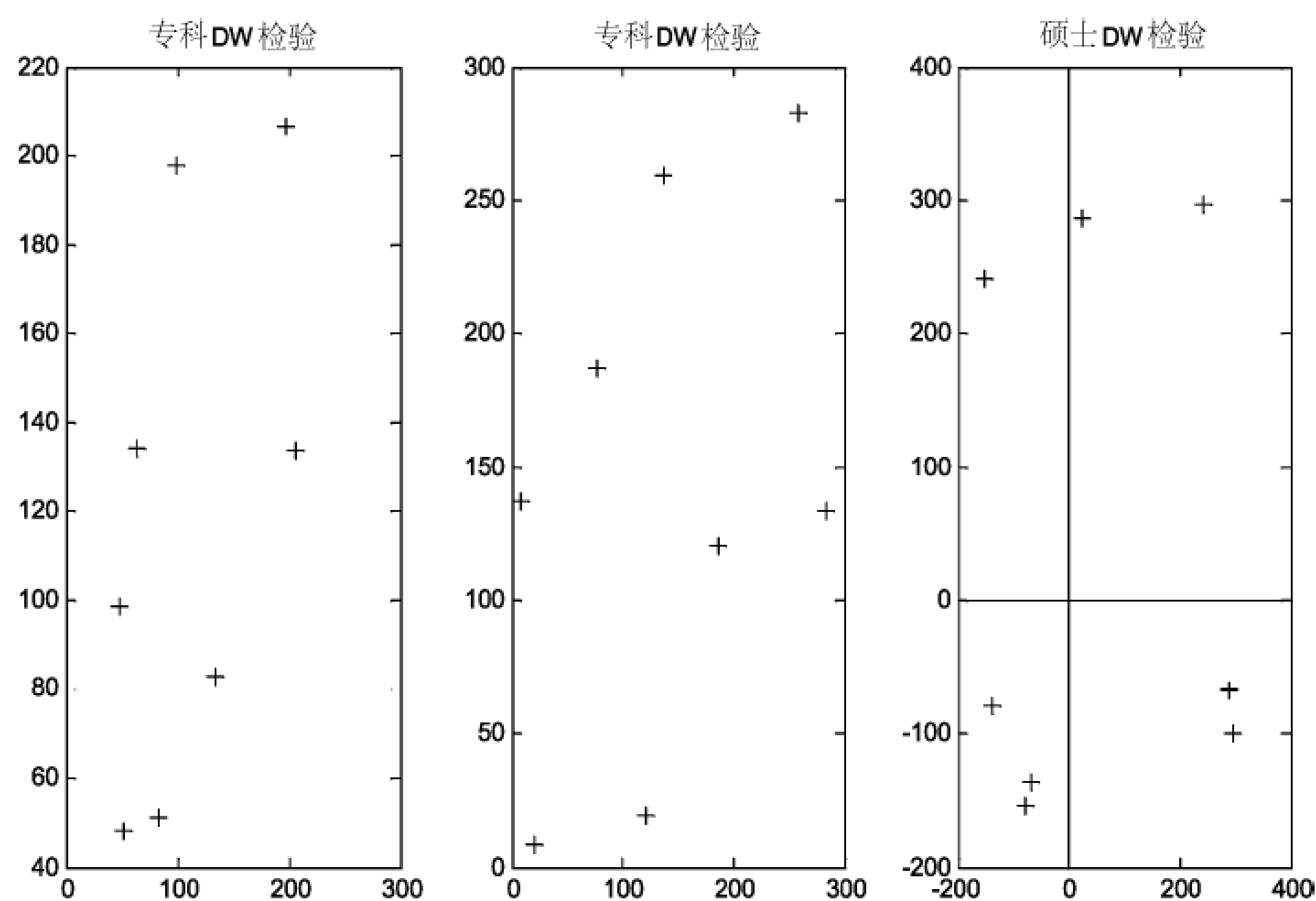


图 20-5　误差自相关检验

由以上分析可知，专科毕业生和本科毕业生 DW 检验值略小，误差散点图分布于第一象限，故可以得出，专科毕业生和本科毕业生的随机误差 ε_t 不存在自相关性。而对于硕士毕业生而言，DW 值在 2 附近，残差 ε_t 具有一定的相关性，但从误差散点图中，误差散点于四象限中，无明显的自相关性，故由此说明了我们结果的可靠性。

其中硕士生起薪 DW 检验稍大，其主要原因是在 2007 年～2008 年的时候，可能由于最近用人单位考虑到硕士毕业生的起薪。而专科毕业生和本科毕业生的起薪相对较低，对专科生和本科生的青睐，导致了研究生的工资起薪发生突变，起伏不定，所以 DW 检验值过大。

20.6　问　题　二

20.6.1　问题二的分析

根据问题二要求，在表 2 的基础上（也可补充数据），构建综合评价模型，定量分析就业指导课程、期望月薪及求职次数等对于大学生就业产生的影响。考虑不同学生之间的能力差距，结合建立的综合评价模型给出以上 90 名大学生的建议期望月薪。

针对问题二，我们以毕业起薪点反映大学生的就业质量。我们知道影响大学毕业生就业起薪的因素很多，如个人交流能力、掌握技能能力、是否参加就业指导课程和求职失败次数等等，但是很多内在的因素可以反映在外在的因素上，如个人交流能力和掌握技能能

力等可以借助是否参加就业指导课程、求职失败次数和期望月薪来衡量。

因此，文中将建立一个以期望月薪及求职次数、就业指导课程为指标的评价模型，定量分析每个指标对大学生就业产生的影响，由于每个人的综合能力不一样，存在一定的差异性，所以我们将 90 组数据进行系统聚类分析，将其综合能力接近的分为一类，然后分别对每一类进行多元回归分析，通过 SPSS 求解出样本决定系数 R^2 及 F 值、P 值，通过对这些值的比较，得出一个相对符合的方程，并对其进行定量评价。同时为了使得每位同学更好的就业，借助我们建立的模型对期望薪资进行逆向求解，即可得出每位学生比较合理的期望月薪。

20.6.2　模型的建立

基于上述流程图我们首先对其进行聚类分析，将综合能力相近的聚为一类，由 SPSS19.0 系统聚类，我们得到图 20-6。

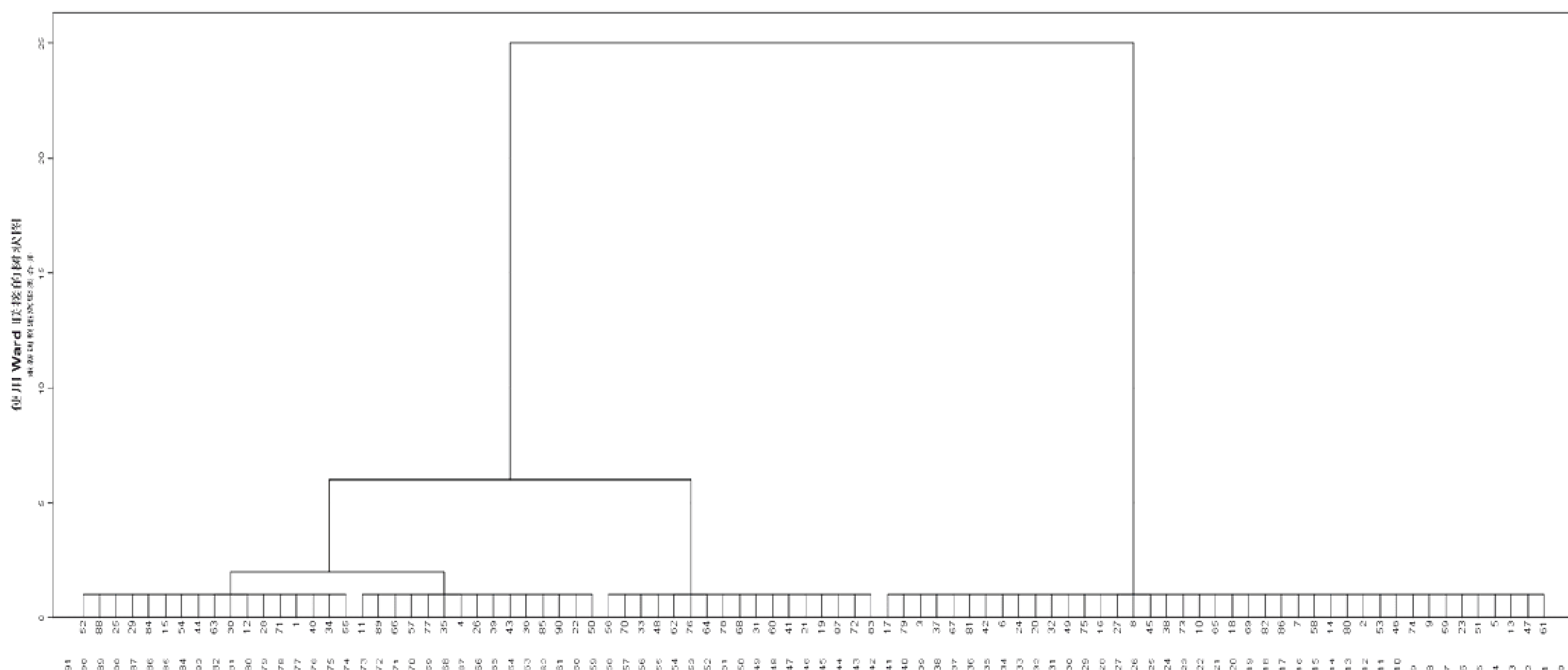


图 20-6　系统聚类图

由树状图 20-6 的分析可得，90 个数字分为四类，具体如表 20-16 所示。

表 20-16　聚类结果

第一类	1、12、15、25、28、29、30、34、40、44、52、54、55、63、71、84、88
第二类	4、11、22、26、35、36、39、43、50、57、66、77、85、89、90
第三类	19、21、31、33、41、48、56、60、62、64、68、70、72、76、78、83、87
第四类	2、3、5、6、7、8、9、10、13、14、16、17、18、20、23、24、27、32、37、38、42、45、46、47、49、51、53、58、59、61、65、67、69、73、74、75、79、80、81、82、86

（注：各数字分别对应每位学生的序号。）

通过对聚类分析的结果，然后分别对每类建立多种多元回归模型，通过 SPSS19.0 求解出每一种模型所对应的样本决定系数 R^2 及 F 值、P 值，通过对这些值的比较，得出一个最佳模型。由于第四类的数据相对较多，具有一定的代表性，故下面以第四类为例来说明。

Step1：对数据进行整理得表 20-17。

表 20-17　数据表

序　　号	起　　薪	期 望 月 薪	求职失败次数	是否参加就业指导
2	1500	1300	1	1
3	1100	1500	3	0
5	1400	1100	2	1
6	1500	1700	3	0
7	1100	1300	1	1
……	……	……	……	……
65	1100	1100	3	0
……	……	……	……	……
80	1500	1400	3	0
81	1200	1400	2	0
82	1200	1200	3	0
86	1200	1300	2	0

（注：“1”表示“是”参加就业指导，“0”表示“否”。）

Step2：模型前的准备

假设：期望月薪为 x_1，求职失败次数为 x_2，是否参加就业指导为 x_3，起薪为 $y_i\ (i=1\cdots4)$，分别表示四类对应的起薪因变量函数建立不同的多元回归模型。

说明：在多元回归方程中，未知数的系数相当于各个指标的权重系数，所以可以根据其系数的大小来判断某些指标对目标函数贡献的大小，从而进行选择是否剔除。

Step3：多元回归方程模型的建立及求解

1）首先不考虑是否参加就业指导这个因素，建立的模型为：

$$y_4 = \alpha x_1 + \beta x_2 + c + \varepsilon$$

借助 SPSS19.0 对其进行求解得到表 20-18。

表 20-18　回归系数表

未标准化回归方程	$y_4 = \alpha x_1 + \beta x_2 + c + \varepsilon$				
	$y_4 = 0.556x_1 + 58.992x_2 + 417.728$				
标准化回归方程	$y^*_4 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2$				
	$y^*_4 = 0.672x_1 + 0.334x_2$				
样本决定系数 R^2	0.331	F	9.413	p	0.000

由标准化方程系数可以看出期望月薪与求职失败次数对就业的影响都不能忽略。但考虑到它的 R^2 太小，所以在第一步的基础上增加‘是否参加就业指导’这个因素进行分析。

2）加上“是否参加就业指导”这个因素，再按上述方法建立模型：

$$y_4 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + c + \varepsilon$$

同样求解得到表 20-19。

表 20-19　回归系数表

未标准化回归方程	$y_4 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + c + \varepsilon$				
	$y_4 = 0.642x_1 + 71.767x_2 + 130.833x_3 + 217.902$				
标准化回归方程	$y^*_4 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3$				
	$y^*_4 = 0.777x_1 + 0.418x_2 + 0.315x_3$				
样本决定系数 R^2	0.422	F	9.006	p	0.000

由标准化方程系数可以看出，期望月薪和求职失败次数与是否参加就业指导对就业的影响都比较重要，所以都不能忽略。

3）进一步考虑，考虑到期望月薪与求职失败次数的相互联系对模型的影响，建立如下模型：

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \mu x_1 x_2 + c + \varepsilon$$

求解得到表 20-20。

表 20-20　回归系数表

第四类未标准化回归方程	$y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \mu x_1 x_2 + c + \varepsilon$				
	$y_4 = 0.132x_1 - 176.626x_2 + 133.682x_3 + 0.193x_1x_2 + 903.347$				
第四类标准化回归方程	$y^*_4 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \mu_1 x_1 x_2$				
	$y^*_4 = 0.159x_1 - 1.03x_2 + 0.322x_3 + 1.277x_1x_2$				
样本决定系数 R^2	0.494	F	8.795	p	0.000

由标准化回归方程看出，x_1 前的系数较其他因素的系数相比较小，即所占的权重小。所以接下来我们将分析剔除‘期望月薪’单独对就业的影响。

4）在忽略期望月薪单独对就业的影响的情况下建立相应的模型：

$$y_4 = \beta x_2 + \gamma x_3 + \mu x_1 x_2 + c + \varepsilon$$

同样进行求解得到表 20-21。

表 20-21　回归系数表

第四类未标准化回归方程	$y_4 = \beta x_2 + \gamma x_3 + \mu x_1 x_2 + c + \varepsilon$				
	$y_4 = -229.795x_2 + 130.706x_3 + 0.232x_1x_2 + 1089.455$				
第四类标准化回归方程	$y^*_4 = \beta x_2 + \gamma x_3 + \mu x_1 x_2$				
	$y^*_4 = -1.34x_2 + 0.315x_3 + 1.534x_1x_2$				
样本决定系数 R^2	0.490	F	11.873	p	0.000

在此回归方程中，样本决定系数 R^2 较大，F 值相对较大，模型更具合理性。而从标准化回归方程中可以看出，“是否参加就业指导”显著性水平较低，也可以考虑剔除后的回归方程，同上面的操作方法。

综上所述，对决定系数 R^2 及 F 值、P 值的不断调整，不断比较，最后得出一个最优模型。对其他三类亦通过上述办法进行不断矫正、优化，得出他们的最优模型与最优方程（具体过程见上述内容），这里以表格的形式给出，如表 20-22 所示。

表 20-22　回归系数表

	第　一　类	第　二　类	第　三　类	第　四　类
复相关系数 R	$R = 0.737$	$R = 0.950$	$R = 0.951$	$R = 0.700$
样本决定系数 R^2	$R^2 = 0.543$	$R^2 = 0.902$	$R^2 = 0.905$	$R^2 = 0.490$
F	$F = 3.751$	$F = 16.556$	$F = 28.525$	$F = 11.873$
p	$p = 0.039$	$p = 0.000$	$p = 0.000$	$p = 0.000$
第一类 未标准化回归方程	$y_1 = 29.63x_1 + 2111.816x_2 - 0.847x_1x_2 - 0.006x_1^2 - 35845.767$			
第一类 标准化回归方程	$y^*_1 = 15.664x_1 + 12.031x_2 - 11.928x_1x_2 - 14.182x_1^2$			

续表

	第　一　类	第　二　类	第　三　类	第　四　类
第二类 未标准化回归方程	$y_2 = -0.57x_1 - 887.2x_2 + 1478.7x_3 + 0.53x_1x_2 - 0.724x_1x_3 + 2636.277$			
第二类 标准化回归方程	$y^*_2 = 0.363x_1 + 217.1x_2 + 484.18x_3 + 0.115x_1x_2 - 4.627x_1x_3$			
第三类 未标准化回归方程	$y_3 = 0.714x_1 + 199.74x_2 - 837.999x_3 + 0.309x_1x_3 + 216.921$			
第三类 标准化回归方程	$y^*_3 = 0.707x_1 + 1.07x_2 - 2.607x_3 + 2.73x_1x_3$			
第四类 未标准化回归方程	$y_4 = -229.795x_2 + 130.706x_3 + 0.232x_1x_2 + 1089.455$			
第四类标准化回归方程	$y^*_4 = -1.34x_2 + 0.315x_3 + 1.534x_1x_2$			

在表 20-22 中，明显的可以看出，第一类多元回归方程的 P 值较大，预测的误差值很大，不能满足相关要求；而分析第一类的数据可以看出，该组数据的期望月薪与起薪均分布于 2000～2500 元，期望月薪与起薪在 ±300 元之间波动，故在此采用动态神经网络方法，对该类数据进行预测。其他三类预测的多元回归方程检验通过。

20.6.3　模型的求解

由 20.6.2 小节建立的模型定量的给出了每类学生的起薪与本人期望月薪、求职失败次数及是否参加就业指导的关系。以上分析得知，我们将单独的对第一类使用 MATLAB 中的 nntool 工具箱，采用广义回归方法（Generalized regression），得到相关数据。至于其他三类数据，由于多元回归方程基本达到相关要求，每位学生的起薪现已给定，故本章将基于起薪一定的前提下，对每位学生的期望月薪进行合理的预测，从而求出合理的期望月薪，使得每位毕业生的期望月薪对应的实际起薪在 95%的置信区间内。则由此得到表 20-23。

表 20-23　广义回归方法预测

序号	起薪	期望月薪	求职失败次数	是否参加就业指导	预测起薪值	预测起薪/实际起薪	预测期望月薪值	预测期望/实际期望
1	2500	2500	5	0	2168.40	0.87	2482.40	0.99
2	1500	1300	1	1	1291.97	0.86	1300	1.00
3	1100	1500	3	0	1444.07	1.31	1005.64	0.67
4	2000	1600	2	1	1966.10	0.98	1455.13	0.91
5	1400	1100	2	1	1270.97	0.91	1100	1.00
6	1500	1700	3	0	1583.27	1.06	1580.35	0.93
7	1100	1300	1	1	1291.97	1.17	472.54	0.36
8	1000	1000	6	0	1102.69	1.10	926.23	0.93
9	1400	1200	4	1	1414.58	1.01	1184.28	0.99
10	1100	1100	3	0	1165.67	1.06	1005.64	0.91
11	1700	2000	1	1	1699.70	1.00	1999.61	1.00
12	1800	2500	5	0	2168.40	1.20	2500.00	1.00

续表

序号	起薪	期望月薪	求职失败次数	是否参加就业指导	预测起薪值	预测起薪/实际起薪	预测期望月薪值	预测期望/实际期望
13	1400	1000	2	1	1224.57	0.87	1000	1.00
14	1500	1400	1	1	1315.17	0.88	1400	1.00
15	2200	2500	4	1	2241.50	1.02	2397.10	0.96
16	1600	1500	3	1	1574.78	0.98	1500	1.00
17	1300	1600	3	0	1513.67	1.16	1292.99	0.81
18	1000	1200	3	1	1365.98	1.37	674.16	0.56
19	2600	2800	2	1	2642.80	1.02	2758.16	0.99
20	1400	1800	1	1	1407.97	1.01	1765.64	0.98
21	2800	2600	4	1	2837.68	1.01	2563.16	0.99
22	2100	1800	4	1	2052.90	0.98	1800	1.00
23	1300	1200	3	1	1365.98	1.05	1105.20	0.92
24	1500	1700	2	0	1418.67	0.95	1700	1.00
25	2200	2400	2	0	2200.00	1.00	2400.00	1.00
26	1900	1600	4	1	1887.70	0.99	1600	1.00
27	1700	1600	3	1	1644.38	0.97	1600	1.00
28	2600	2400	4	0	2587.40	1.00	2400.00	1.00
29	2100	2300	2	0	2142.90	1.02	2300	1.00
30	2000	2300	1	0	2100.00	1.05	2250.00	0.98
31	2800	2700	3	1	2740.24	0.98	2700	1.00
32	1500	1800	1	0	1277.26	0.85	1800	1.00
33	2500	2700	2	1	2540.50	1.02	2660.41	0.99
34	2500	2200	4	0	2469.50	0.99	2200	1.00
35	1700	1800	2	0	1743.80	1.03	1710.61	0.95
36	2100	2100	3	0	2116.60	1.01	2083.73	0.99
37	1100	1500	1	1	1338.37	1.22	472.54	0.32
38	1100	800	4	1	1043.38	0.95	800	1.00
39	2000	2000	3	0	2014.60	1.01	1985.69	0.99
40	2500	2500	3	1	2361.80	0.94	2482.40	0.99
41	2800	2800	3	0	2815.34	1.01	2778.51	0.99
42	1200	1500	1	0	1207.66	1.01	1466.96	0.98
43	2100	2000	3	1	2045.30	0.97	2000	1.00
44	1900	2200	1	0	1934.10	1.02	2200.00	1.00
45	1000	1000	3	0	1096.07	1.10	861.96	0.86
46	1600	1300	4	1	1507.38	0.94	1300	1.00
47	1300	1100	4	1	1321.78	1.02	1076.52	0.98
48	2500	2700	2	0	2544.20	1.02	2638.09	0.98
49	1600	1600	3	0	1513.67	0.95	1600	1.00
50	2000	1800	4	1	2052.90	1.03	1735.96	0.96
51	1300	1200	3	0	1235.27	0.95	1200	1.00
52	2200	2300	2	0	2142.90	0.97	2300	1.00
53	1500	1300	4	0	1376.68	0.92	1300	1.00

续表

序号	起薪	期望月薪	求职失败次数	是否参加就业指导	预测起薪值	预测起薪/实际起薪	预测期望月薪值	预测期望/实际期望
54	2300	2500	2	1	2359.50	1.03	2476.50	0.99
55	2300	2100	4	0	2300.00	1.00	2100	1.00
56	2400	2800	1	0	2415.86	1.01	2777.78	0.99
57	1900	1800	3	1	1986.10	1.05	1509.12	0.84
58	1100	1400	1	0	1184.46	1.08	1035.93	0.74
59	1400	1200	4	0	1283.88	0.92	1200	1.00
60	2800	2700	3	0	2743.94	0.98	2700	1.00
61	1300	1000	4	0	1098.28	0.84	1000	1.00
62	2600	2700	2	1	2540.50	0.98	2700	1.00
63	2000	2200	2	0	1988.00	0.99	2200	1.00
64	2900	3000	2	1	2847.40	0.98	3000	1.00
65	1100	1100	3	0	1165.67	1.06	1005.64	0.91
66	1800	2000	2	0	1841.80	1.02	1914.69	0.96
67	1200	1400	2	0	1279.47	1.07	1228.73	0.88
68	2900	3100	2	1	2949.70	1.02	3051.41	0.98
69	1000	1200	2	0	1186.67	1.19	797.69	0.66
70	2500	2900	1	1	2545.36	1.02	2855.66	0.98
71	2600	2400	4	0	2587.40	1.00	2400.00	1.00
72	2700	2900	2	0	2687.00	1.00	2918.20	1.00
73	1100	900	4	1	1136.18	1.03	861.01	0.96
74	1700	1400	4	0	1469.48	0.86	1400	1.00
75	1500	1600	2	0	1372.27	0.91	1600	1.00
76	2600	2600	3	1	2637.94	1.01	2562.91	0.99
77	1800	1800	3	0	1810.60	1.01	1789.61	0.99
78	2800	3000	2	1	2847.40	1.02	2953.66	0.98
79	1300	1600	1	0	1230.86	0.95	1600	1.00
80	1500	1400	3	0	1374.47	0.92	1400	1.00
81	1200	1400	2	0	1279.47	1.07	1228.73	0.88
82	1200	1200	3	0	1235.27	1.03	1149.32	0.96
83	2700	3000	1	1	2647.66	0.98	3000	1.00
84	2100	2400	1	0	2134.50	1.02	2366.70	0.99
85	2000	1900	3	0	1912.60	0.96	1900	1.00
86	1200	1300	2	0	1233.07	1.03	1228.73	0.95
87	2700	2800	2	1	2642.80	0.98	2800	1.00
88	2200	2300	2	0	2142.90	0.97	2311.10	1.00
89	1700	2000	1	0	1669.00	0.98	1225.00	0.61
90	2000	1900	3	1	2015.70	1.01	1846.96	0.97

20.6.4　结果的分析

从结果看出，预测起薪与实际起薪的比值均在 0.84~1.37，故模型预测起薪可接受，模

型的建立合理，由此求出了预测期望月薪值。而预测期望月薪与实际期望月薪的比值波动较大，大致位于 0.61~1.38，对于个别数据达到 1.69 或 0.32，由于拟合误差的存在，而模型对这几个点的约束相对较小，故存在奇异数据。

出现预测期望月薪与实际期望月薪的比值小于 1 的情况，这是由于有些毕业生过高地估计自己的能力，因此导致期望月薪过高。而预测期望月薪与实际期望月薪的比值大于 1 的情况，是由于有些毕业生不自信的表现，未充分认识到自己，或是由于临场发挥失常等；对于预测期望月薪与实际期望月薪的比值大于 1 的情况，表中的处理是取实际期望值，这样就业机会更大。综合这些原因，预测结果具有一定的参考性。但存在不足之处是模型给出结果的值误差太大，致使模型适用性变窄。

20.7　问　题　三

20.7.1　问题的分析

问题三要求结合本科生毕业就业起薪表 2 和硕士毕业生起薪表 3，定量分析是否有必要在硕士研究生中开设就业指导课程。（数据见附录 2、Sheet2 和 Sheet3）

对于大学生就业起薪的高低，前面根据本科生就业起薪表，得到期望月薪、求职失败次数及是否参加就业指导对于不同类的毕业生的影响程度各不同。而本章中，要求结合 90 名本科生与 30 名硕士毕业生进行综合研究，在此，本章将先考虑“是否参加就业指导”对 90 名本科生带来的影响，根据影响程度，进而比较是否参加就业指导对硕士毕业生的影响。

由于本科生与硕士毕业生二者之间的能力存在较大差别，建立相应的预测模型时，不能笼统的针对上述三因素进行研究。又在硕士毕业生起薪表中，都没有经过‘是否参加就业指导’，故我们在问题二模型所考虑的因素上增加学历 x_4（x_4 量化所得值记做本科为 0，研究生为 1）这一个因素，从而使本科毕业生与硕士毕业生具有可比性。

20.7.2　模型的建立

根据 90 名本科毕业生就业起薪表，先对期望月薪进行标准化，从而防止“大数吃小数”，然后利用 SPSS19.0 对数据进行多元线性回归分析，从而得到‘是否参加就业指导’ x_3 所占的权重，进而讨论‘是否参加就业指导’对本科生起薪的影响，经整理得到表 20-24。

表 20-24　回归系数表

复相关系数 R	$R=0.956$
样本决定系数 R^2	$R^2=0.913$
F	$F=301.455$
p	$p=0.000$
未标准化回归方程	$y=0.891x_1+97.731x_2+122.449x_3-148.196$
标准化回归方程	$y^*=0.963x_1+0.193x_2+0.073x_3+0.106x_4$

经表 20-24 分析可知，模型 $y=0.891x_1+97.731x_2+122.449x_3-148.196$，“是否参加就

业指导” x_3 前的系数为 122.449，意味着“在针对毕业生的起薪问题上，参加就业指导，起薪将能增加 122.449 元，若不参加就业指导，起薪将降低 122.449 元”。由此分析，参加就业指导对本科毕业生是有益的。

对 90 名本科生与 30 名硕士毕业生进行综合研究，我们在上述模型所考虑的因素上增加学历 x_4（x_4 量化所得值记做本科为 0，研究生为 1），使本科毕业生与硕士毕业生具有可比性，经分析、整合可得基本数据如表 20-25 所示。

表 20-25　增加学历高低数据表

序号	起薪	期望月薪	求职失败次数	是否参加就业指导	学历高低
1	2500	2500	5	0	0
2	1500	1300	1	1	0
3	1100	1500	3	0	0
……	……	……	……	……	……
88	2200	2300	2	0	0
89	1700	2000	1	0	0
90	2000	1900	3	1	0
1	3700	4200	0	0	1
2	2900	2700	5	0	1
……	……	……	……	……	……
28	2000	2200	2	0	1
29	3300	3400	3	0	1
30	2800	3100	2	0	1

又如上述中的多元拟合分析，得到各个因素对起薪值的影响程度。利用 SPSS19.0 对数据进行多元线性回归分析，得到表 20-26。

表 20-26　回归系数表

复相关系数 R	$R=0.981$
样本决定系数 R^2	$R^2=0.962$
F	$F=721.301$
p	$p=0.000$
未标准化回归方程	$y=0.918x_1+113.571x_2+121.026x_3+56.23x_4-238.622$
标准化回归方程	$y^*=0.974x_1+0.177x_2+0.073x_3+0.031x_4$

（注：期望月薪为 x_1，求职失败次数为 x_2，是否参加就业指导为 x_3，x_4 表示学历高低。）

模型的量化指标样本决定系数 $R^2=0.962$ 较大，说明曲线拟合较好，$F=721.301$，$p=0.000$。通过检验，说明模型的误差相对很小，故模型较合理。

20.7.3　模型的求解

由上述模型，代入硕士毕业生的数据，MATLAB 编程如下：

```
clc,clear,close all
```

```
%第一类
x1=[2500    1800    2200    2200    2600    2100    2000    2500    2500
    1900    2200    2300    2300    2000    2600    2100    2200
2500    2500    2500    2400    2400    2300    2300    2200    2500
    2200    2300    2500    2100    2200    2400    2400    2300
5   5   4   2   4   2   1   4   3   1   2   2   4   2   4   1   2
0   0   1   0   0   0   0   0   1   0   0   1   0   0   0   0   0]';
syms x a b c
n1=size(x1,1);
for i=1:n1
   y1=solve('-a+29.63*x+2111.816*b-0.847*b*x-0.006*x^2-35845.767');
                                                    % 求解方程
   y1=subs(y1,{a,b},{x1(i,1),x1(i,3)});             % 用已知量赋值给未知量
   digits 6,
   yuce1(i,:)=vpa(y1);
end
%第二类
x2=[2000    1700    2100    1900    1700    2100    2000    2100    2000
    1900    1800    1800    2000    1700    2000
1600    2000    1800    1600    1800    2100    2000    2000    1800
    1800    2000    1800    1900    2000    1900
2   1   4   4   2   3   3   3   4   3   2   3   3   1   3
1   1   1   1   0   0   0   1   1   1   0   0   0   0   1]';
% syms x a b c
n2=size(x2,1);
for i=1:n2
   y2=solve('-a-0.57*x-887.2*b+1478.7*c+0.53*b*x-0.724*c*x+2636.2');
                                                    % 求解方程
   y2=subs(y2,{a,b,c},{x2(i,1),x2(i,3),x2(i,4)}); % 用已知量赋值给未知量
   digits 6,
   yuce2(i,:)=vpa(y2);  % 数字输出显示
end
%第三类
x3=[2600    2800    2800    2500    2800    2500    2400    2800    2600
    2900    2900    2500    2700    2600    2800    2700    2700
2800    2600    2700    2700    2800    2700    2800    2700    2700
    3000    3100    2900    2900    2600    3000    3000    2800
2   4   3   2   3   2   1   3   2   2   2   1   2   3   2   1   2
1   1   1   1   0   0   0   0   1   1   1   1   0   1   1   1   1
]';
% syms x a b c
n3=size(x3,1);
for i=1:n3
   y3=solve('-a+0.714*x+199.74*b-837.999*c+0.309*c*x+216.921');
                                                    % 求解方程
   y3=subs(y3,{a,b,c},{x3(i,1),x3(i,3),x3(i,4)}); % 用已知量赋值给未知量
   digits 6,                                        % 精度为 6 位有效数字
   yuce3(i,:)=vpa(y3);                              % 数字输出显示
end
%第四类
x4=[1500    1100    1400    1500    1100    1000    1400    1100    1400
    1500    1600    1300    1000    1400    1300    1500    1700    1500
    1100    1100    1200    1000    1600    1300    1600    1300    1500
    1100    1400    1300    1100    1200    1000    1100    1700    1500
    1300    1500    1200    1200    1200
1300    1500    1100    1700    1300    1000    1200    1100    1000
    1400    1500    1600    1200    1800    1200    1700    1600    1800
    1500    800 1500    1000    1300    1100    1600    1200    1300
    1400    1200    1000    1100    1400    1200    900 1400    1600
```

```
     1600     1400     1400     1200     1300
1    3    2    3    1    6    4    3    2    1    3    3    3    1    3    2    3    1    1
     4    1    3    4    4    3    3    4    1    4    4    3    2    2    4    4    2    1
     3    2    3    2
1    0    1    0    1    0    1    0    1    1    1    0    1    1    1    0    1    0    1
     1    0    0    1    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1    0    0    0
     0    0    0    0
]';
% syms x a b c
n4=size(x4,1);
for i=1:n4
    y4=solve('-a-229.795*b+130.706*c+0.232*b*x+1089.455');   % 求解方程
    y4=subs(y4,{a,b,c},{x4(i,1),x4(i,3),x4(i,4)}); % 用已知量赋值给未知量
    digits 6,                                      % 精度为 6 位有效数字
    yuce4(i,:)=vpa(y4);                            % 数字输出显示
end
```

得到表 20-27 所示的结果。

表 20-27　预测值

序　号	未参加就业指导起薪	参加就业指导起薪
1	3700	3673.2
2	2900	2864.1
3	2100	2177.9
4	2500	2545.1
5	2300	2361.5
6	2600	2685.2
7	2900	2934.1
8	3100	3144.2
9	3000	3004.1
10	3900	3782.1
11	3100	3025.9
12	4000	3992.2
13	3400	3371.3
14	4100	3943.9
15	2500	2566.9
16	3400	3349.6
17	2600	2566.9
18	3400	3441.4
19	3500	3393.1
20	2100	2204.4
21	2500	2566.9
22	2400	2501.6
23	3400	3301.3
24	3800	3760.3
25	2700	2680.5
26	3700	3625.0
27	3400	3441.4

续表

序　　号	未参加就业指导起薪	参加就业指导起薪
28	2000	2064.4
29	3300	3279.5
30	2800	2890.6

20.7.4　结果的分析

由 20.7.2 小节模型可知，$y = 0.918x_1 + 113.571x_2 + 121.026x_3 + 56.23x_4 - 238.622$，“是否参加就业指导”$x_3$ 前的系数为 121.026，意味着“在针对毕业生的起薪问题上，参加就业指导，就能获得 121.026 元的利润，若不参加就业指导，折损 121.026 元”。

而由标准变化方程，$y^* = 0.974x_1 + 0.177x_2 + 0.073x_3 + 0.031x_4$ 可知，“是否参加就业指导”对起薪的影响比学历的高低更大，硕士毕业生的起薪相对较高的原因在于期望月薪 x_1 的值，起点高，导致起薪高。

综上分析，硕士毕业生参加就业指导是有益的，故有必要在硕士研究生中开设就业指导课程。

20.8　模型的评价

20.8.1　模型优点

本章结合实际的就业数据，抓住问题的本质，忽略次要因素，做出必要的、合理的简化假设，详细分析以后相继建立了直线拟合模型、灰色预测模型及多元线性回归模型来求解相关问题，通过分析数学模型得到了三个问题的相对准确结果，为较好的解决相关就业问题，提高大学生就业质量提供了重要的理论参考。

本章针对 2011 年的专科毕业生、本科毕业生和硕士毕业生的起薪问题，给出了 2011 年的大学生毕业就业起薪的预测值，有一定的参考性。并针对本科生的期望月薪进行了合理的预测，给出了较为合理的期望月薪值，对本科毕业生有一定的意义。最后针对是否有必要开设硕士生就业指导课程，我们也做了详细的分析与解答，得出了硕士生应该参加就业指导这一结果，对硕士生的就业质量的提高有参考性的作用。

20.8.2　模型的缺点

本章主要建立了多元线性回归模型，对近几年就业的数据进行了分析，得到了相应的拟合方程和回归方程，但是由于受到众多因素的影响(特别是某些年相关数据缺乏权威性)，而且所获得数据数量有限，限制了两个模型的适用范围。

第 21 章　蛛网结构合理性研究

世界上生存着许多种类的蜘蛛，而其中大部分种类都会通过结网来进行捕食。考虑到蛛丝的自然特性，本章采用一定的数学建模方法，对蛛网的自然状态进行多边形分析，通过有限元软件对蛛网结构进行分析，得出相应的位移、应力、应变，然后将位移、应力、应变作为模糊综合评价的输入量，从而针对不同的蛛网模型进行定性到定量的评价，达到优化分析的目的。

学习目标：

（1）学习和掌握蜘蛛网模型评价方法；

（2）掌握综合评价模型等方法。

21.1　摘　　要

本章先后从蛛网的轮廓、捕丝疏密性分布、蛛网捕食的效率、蛛网的稳定性、框丝与半径丝受力与性能等几个角度着手，建立优化模型、综合评价模型和力学模型对蛛网结构的合理性进行分析。

首先，本章研究了蛛网外部形状，推理出正多边形蛛网的合理性和普遍存在性，在此基础上建立起以蛛丝长度最短为最优目标的优化模型，得到了一系列与捕丝圈数相对应的多边形最合理边数。当捕丝圈数为 80 层时，最合理的多边形边数为 10。

其次，本章比较了三种具有代表性的蛛丝疏密程度分布的蛛网模型。首先定义了蛛网捕食效率的指标并计算出三种蛛网的捕食效率量值。之后将蛛网的稳定性反映到捕丝圈数、蛛丝最大应力、位移和最大应变四项指标上。最后建立综合评价模型从捕食效率和稳定性两个方面对三种蛛网模型进行评价和排序。得出蛛丝密度分布均匀的蛛网模型最优的结论。

最后，本章又从受力的角度分析蛛网外边缘半径丝、框丝和锚定丝的受力情况，结合不同类蛛丝力学性能存在差别的事实，印证了自然界中性能决定用途的客观规律。

本章最大的特点是采用不同的数学模型从多个方面对蛛网的结构进行分析，分析和计算的结果合理。使用 ANSYS 软件直观的表示出蛛网的受力特点。

关键词：蛛网、优化模型、ANSYS、结构。

21.2　问题的背景与重述

21.2.1　问题的背景

蜘蛛作为一种节肢动物，已经在地球上存活了四亿多年，足迹遍布世界各大洲。蜘蛛

具有极高的药用价值和仿生学价值，值得我们不断地对其进行深入的研究。

蜘蛛的捕食与结网是一个十分有趣的问题。蜘蛛在几亿年的进化过程中不断改变自己生活习性以适应变化的环境，在长期的进化过程中蜘蛛网的类别趋于多样，但是同种蛛网的结构特点却又趋于稳定，趋于稳定的蛛网结构模型就是千百年来自然选择的杰作。

尽管自然界当中存在极少数种类的蜘蛛已经逐渐有了织网的能力，但是对绝大多数的蜘蛛而言，蛛网对蜘蛛的意义是重大的，蛛网的结构关系着蜘蛛的生长、繁殖和躲避天敌，更重要的是蛛网的结构与蜘蛛捕食的效率直接相关。因此，蛛网结构的合理性决定了蜘蛛在自然界生存的适应性和竞争性的强弱，研究蛛网的结构与捕食的问题具有重要的意义。

21.2.2　问题的重述

世界上生存着许多种类的蜘蛛，而其中大部分种类都会通过结网来进行捕食。请你建立合理的数学模型，说明蜘蛛网织成怎样的结构才是最合适的。

21.3　问 题 分 析

蜘蛛网结构包括的方面有很多，如蜘蛛网的外形轮廓，蜘蛛网上蛛丝布线的方向和疏密程度，蜘蛛网与周围环境的连接的方式，在对蜘蛛网结构进行分析时最重要的一点是有序，从不同的方面依次进行研究。

21.3.1　对蛛网外形轮廓的分析

首先研究蜘蛛网的外形轮廓。通过查阅大量的文献了解到蛛网的外形很少出现狭长状，一般近似为中心对称的图形。如果从蜘蛛捕食的角度来思考这个问题，也能够得到一致的结论：蜘蛛要想在猎物挣脱蛛网前将猎物制服，则需要蜘蛛到蛛网上任一点的最长的时间最短，所以蜘蛛常在蜘蛛网的中间，且蛛网多呈现出正多边形的形状。这里讨论蛛网多边形的边数问题。

对多边形而言，边的个数直接反映了多边形的形状与轮廓，由上述分析认为大多数蛛网均为正 n 边形，其中 $n\geqslant 3$，可以通过参数 n 来反映蛛网的形状。

通过查阅资料知道蜘蛛吐丝织网所使用的材料是十分宝贵的，蛛丝的质量是限制蜘蛛织网的一个重要因素，可以找到反映蛛网形状的多边形个数 n 和蛛丝量值之间的关系，通过建立优化模型，寻找到不同条件下最合理的 n，进而找到最合理蛛网的形状。

21.3.2　对蛛丝分布疏密性的分析

上一问，在假设蛛丝均匀分布的前提下讨论了蛛网轮廓的最佳形状，这里将进一步研究蛛网上蛛丝密度的分布。

可以认为蛛丝的密度大致有三种分布模式。

第一种是捕丝均匀分布，即任意相邻的横向蛛丝的距离是相同的。

第二种是从中心向两边捕丝分布的密度降低，即从内向外相邻横向蛛丝的距离越来越大。

第三种和第二种相反，即从中心向两边捕丝的分布密度上升，从内向外相邻横向蛛丝之间的距离越来越小。

图 21-1 是三种蛛丝的示意图。

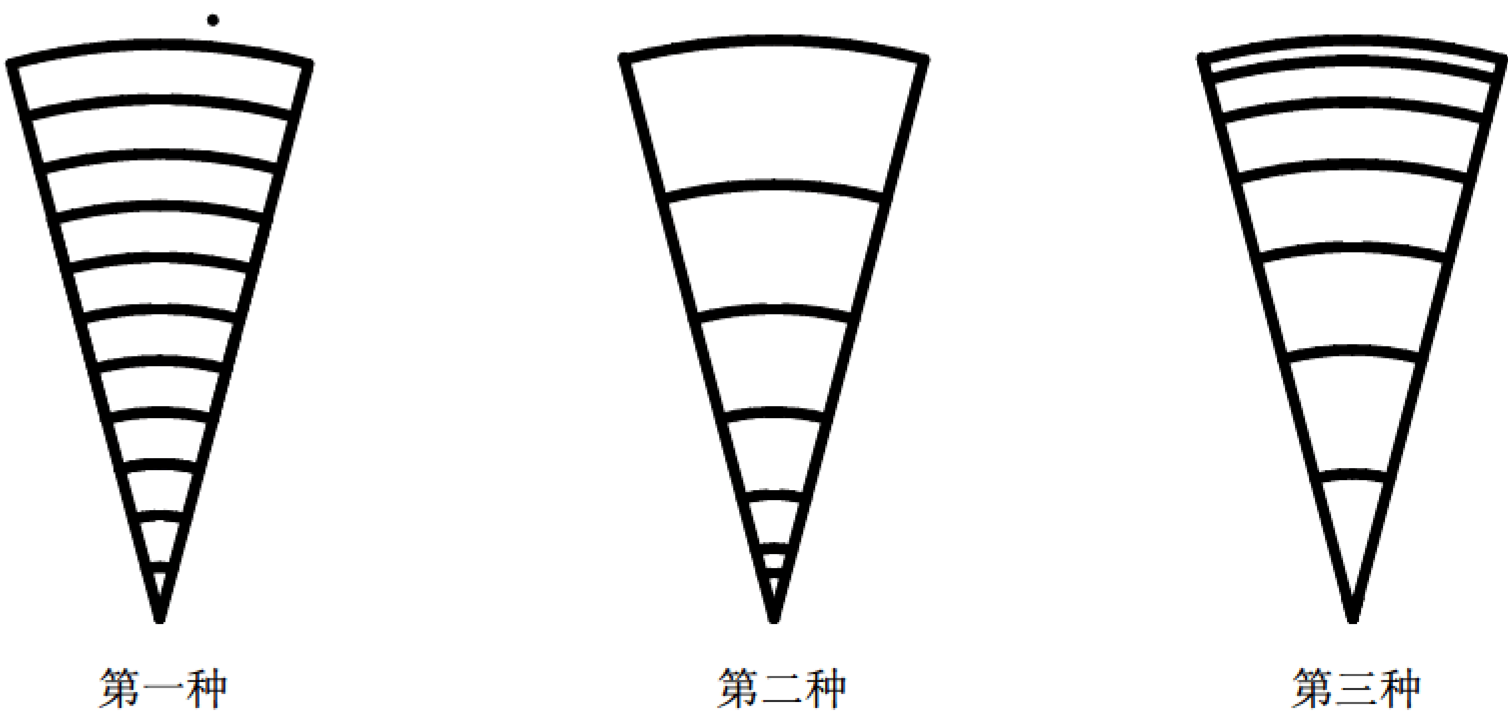


图 21-1　蛛丝类型图

讨论上面三种蛛丝模型的优劣，首先需要从蛛网的实用性着手。蛛网的实用性应该包括两点要求，一个是便于捕食，一个是具有较高的稳定性。我们主要从这两点进行分析，寻找和计算有关的参数来反映这两个基本方面，最后通过综合评价模型对三种模型进行打分和排序，找到最合适的模型。

21.3.3　对蛛网蛛丝受力的分析

前面已经分析了蛛网的中间部分，下面我们研究蛛网的边缘部分。通过观察文献和现有蜘蛛网的结构发现，框丝和锚定丝之间一般都呈现出固定的两种连接方式，一种是Δ（三角形）连接，一种是 Y 形连接。我们通过分析这两种结构的受力情况，来对比这两种结构的特点。

21.3.4　本文求解流程

在前面的分析中，我们始终认为蛛丝的力学性能是一样的，但是事实是蜘蛛可以放射出不同种类的蛛丝，并且将不同种类的蛛丝应用到蛛网的不同位置。这里，我们简要分析半径丝、框丝和锚定丝受力的差异，并讨论蛛丝性能的差异。

由上述分析我们可以得到本文的思路流程图，如图 21-2 所示。

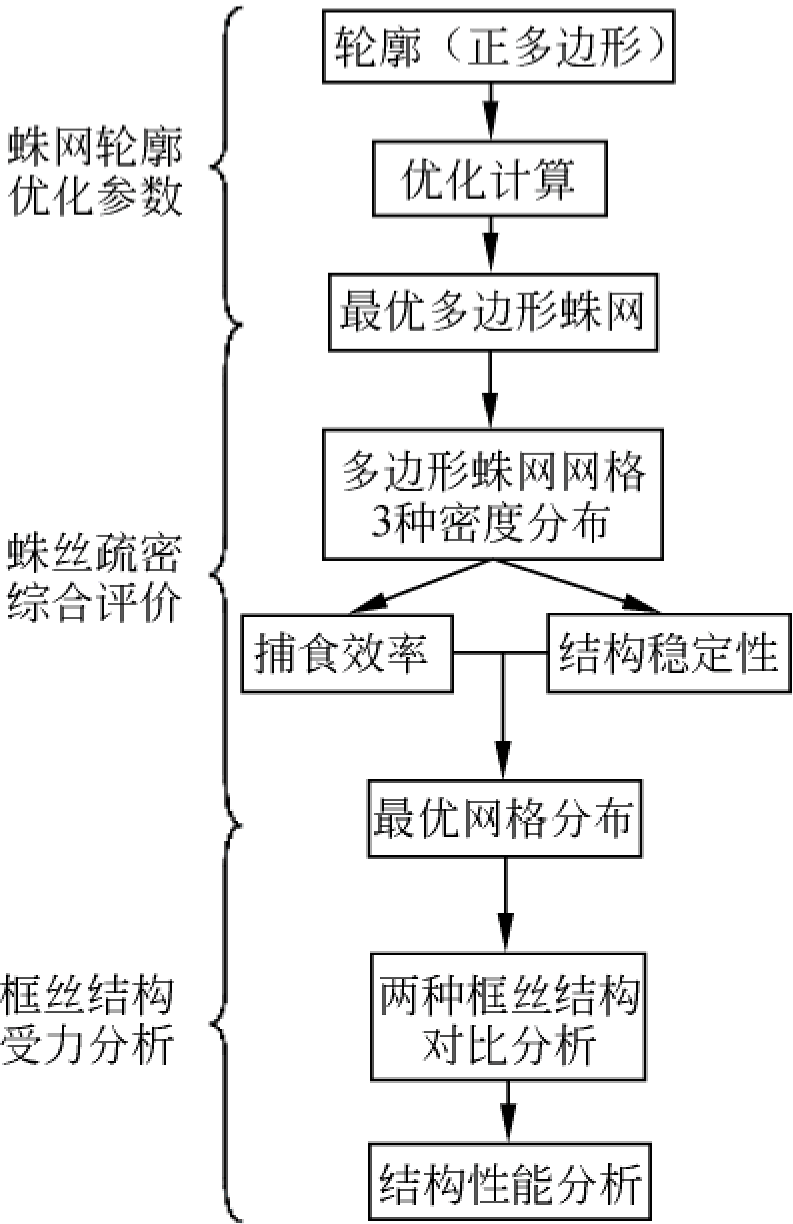


图 21-2　流程图

21.4 模 型 假 设

（1）在讨论蛛网结构合理性的时候主要考虑蛛网对蜘蛛捕食的影响，不考虑对其生长、繁殖和躲避天敌等方面的影响。

（2）将蜘蛛与昆虫看做一个点，忽略其自身的大小。

（3）忽略蛛网本身的重力。

（4）分析中蛛丝的截面面积一样，既蛛丝的粗细大小一样，并且成分相同。

（5）在对蛛网进行受力分析中，将外力均匀地施加在蛛网上，蛛网发生整体的平移。

21.5 符号说明

符 号 说 明	符 号 意 义
S	蜘蛛网的面积
n	蜘蛛网为正多边形时多边形的边数
m	蜘蛛网为正多边形时蛛丝的圈数
d	相邻圈数之间的距离
l_i	从外向内数第 i 圈的周长
L	正多边形蛛网的蛛丝总周长
η	蜘蛛网的捕食效率
E	蜘蛛网丝弹性模量
$\overline{F}^e$	网丝横纵向受力矩阵
$\overline{K}^e$	网丝刚度矩阵
$\overline{u}^e$	网丝横纵向扰度矩阵
x'_{ij}	无量纲的指标观测值
P_{ij}	第 i 个指标属于第 j 个评语的隶属度
D_i	第 i 个指标的权重
M_i	第 i 个指标的具体数值
RI	随机修正系数

21.6 模型的建立求解及分析

21.6.1 蛛网外形轮廓探究的模型分析

通过前面的阐述，可知多数蛛网的外形轮廓可以大致的认为是正多边形，所以只要确定正多边形的边数，就可以确定蛛网的外轮廓。此外，蜘蛛织网受到蛛丝的限制，蛛丝的使用应该遵循“高效少用”的原则。正因为如此，蛛网的边数不会无限大，会趋于一个最

合理的数值。

此问中，假设蛛网上所有的蛛丝粗细均匀、成分相同，即可以认为蛛丝的长度反映出蛛丝使用量值的大小。如图 21-3 所示是一个正六边形的蜘蛛网，要计算出在面积一定、蛛丝稀疏程度相同的情况下，n 取多大会使得图中的蛛丝总长最短。

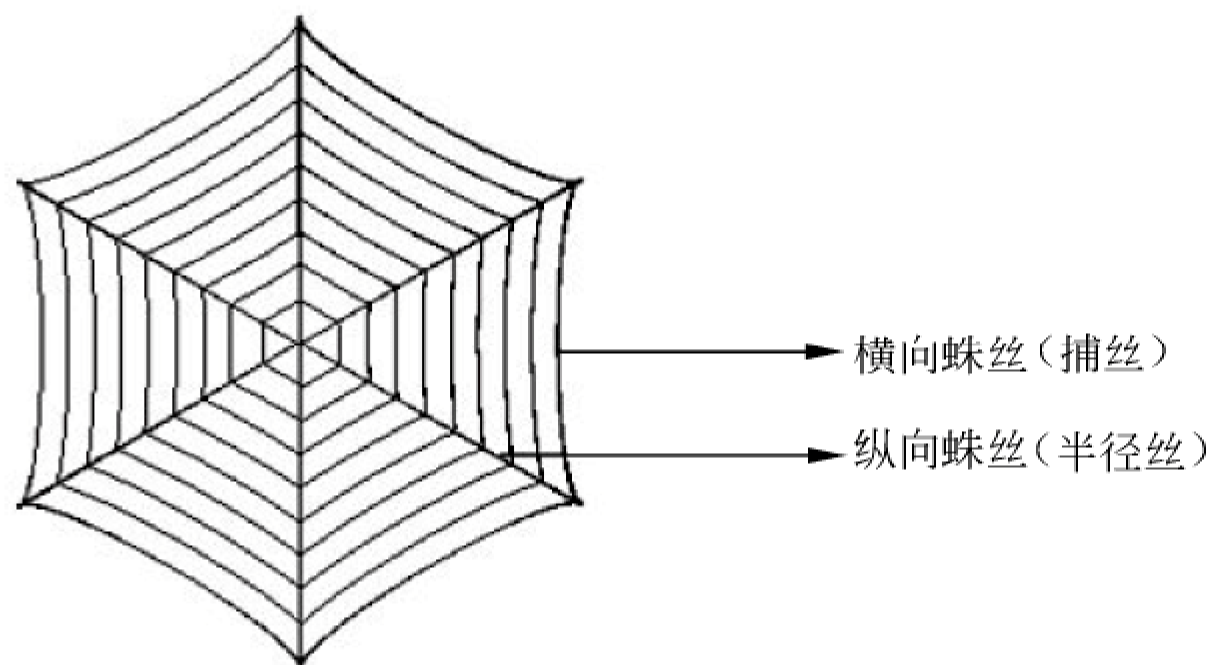


图 21-3　正六边形蜘蛛网

21.6.2　蛛网外形轮廓探究的模型建立

设蛛网的面积为常数 S，蜘蛛网的蛛丝圈数为 m，圈数 m 可以反映蛛网的疏密程度。下面我们以正六边形为例，对正 n 边形进行具体的分析和建模。

Step1：连接正 n 边形的中心和 n 个顶点，形成 n 个三角形。底的长度为 $2a$，高和斜边的夹角为 θ，如图 21-4 所示。

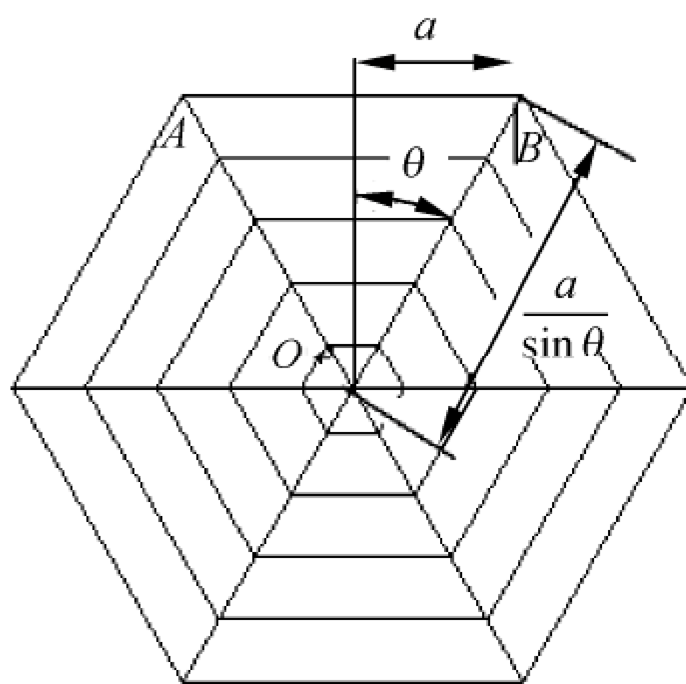


图 21-4　正多边形蛛网分析简图

Step2：由图 21-4 中几何关系可知 $OB=\dfrac{a}{\sin\theta}$。

所以 n 边形的对角线的总长度为：$\dfrac{na}{\sin\theta}$。

由 ΔABO 的面积的两种表达方式可得到等式：$\dfrac{S}{n}=a\cdot\dfrac{a}{\tan\theta}$

所以 $a=\sqrt{\dfrac{S\tan\theta}{n}}$。

设最外层一圈的周长为 l_1，从外向内数第 i 圈的周长为 l_i。

由相似三角形的关系得：$l_i = l_1 \cdot \dfrac{\dfrac{a}{\sin\theta} - id}{\dfrac{a}{\sin\theta}}$

又 $\theta = \dfrac{2\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{n}$，可得 $d = \dfrac{\dfrac{a}{\tan\theta}}{m}$。

正 n 边形的蛛网所有蛛丝的长度：

$$L = \frac{na}{\sin\theta} + \sum_{i=1}^{m} l_i$$

Step3：综上所述，归纳出一定条件下以蛛网蛛丝最短为目标的优化模型。

$$\min = \frac{a \cdot n}{\sin\theta} + \sum_{i=1}^{m} l_i$$

$$s.t.\begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{S \cdot \tan\theta}{n}} \\ l_1 = 2na \\ m = \dfrac{a}{d\sin\theta} \\ l_i = l_1 \cdot \dfrac{a - id\sin\theta}{a} = 2na - 2ind\sin\theta\,(i = 2 \cdots m) \\ \theta = \dfrac{\pi}{n} \\ n \in N^{+} \end{cases}$$

21.6.3　蛛网外形轮廓探究的模型的求解和结果分析

1．模型的求解

上述模型中 m 和 S 为常数，只有 n 为此优化模型的决策变量。通过分析，还可以发现变量 n 与蛛网面积 S 是无关的，与参数 m 是有关的，故可以推出在本模型中，蜘蛛网的边数和蜘蛛网蛛丝的疏密程度是密切相关的，和蛛网的面积是无关的，可以认为对于大小不同，但是网络结构十分相似的两个蛛网的形状是相似的。

由上述分析，我们赋予参数 m 不同的数值，使用 LINGO 软件进行求解：

```
model:
sets:
count/1..85/:L;  !变量设置
endsets

min=a*n/@sin(cita)+@sum(count(i):L(i));   !目标方程

!cita 弧度制
cita=3.1415926/n;
```

```
!面积常数
S=10;

a=@sqrt(S*@tan(cita)/n);  !数学表达式
a/d/@sin(cita)-85=0;

L(1)=2*n*a;
!@for(count(j)|j#le#1:L(j)=2*n*a);   !约束条件
@for(count(j)|j#gt#1:L(j)=2*n*a-2*j*n*d*@sin(cita)); !约束条件

d>0;
!n>3;
!@gin(n);  !整数

end
```

得到的部分结果如表 21-1 所示。

表 21-1　多边形边数和圈数表

参数 m	n 的最优解	参数 m	n 的最优解
5	4	75	9
10	5	80	10
15	6	85	10
20	6	90	10
25	7	95	10
30	7	100	10
35	8	105	11
40	8	110	11
45	8	115	11
50	8	120	11
55	9	125	11
60	9	130	11
65	9	135	11
70	9	140	12

由表中数据可以发现 n 的最小值是 4，当参数在一定范围内变化时，n 的最优解有相同的整数值，参数 m 值的增加，n 的最优解也在逐渐变大。因为本题中的决策变量为正整数 n，这就使我们不能充分的观察到本题中 n 和参数 m 之间的函数关系。

为此，去掉原优化模型中对决策变量 n 正整数的限制条件，得到另一组的值 n'（见程序文档中的附表 1），使用 MATLAB 拟合工具箱做出 n、n' 和参数 m 之间的趋势图，以及 $(n-n')$ 和参数 m 之间的留数关系图，如图 21-5 所示。

从图 21-5 中可以看出 n 随参数 m 变化而变化的曲线关系，以及 n 与 n' 之间的关系，即 n' 在一定的范围内围绕 n 变化。

2．模型结果的分析

我们对计算出来的 n 值进行分析。当 $m=80$ 圈时，蛛网最优轮廓为一个十边形。做出十边形蛛网的示意图如图 21-6 所示。从图中看到蛛网的轮廓十分接近于一个圆形。将其与自然界中实际的网络进行对比发现极高的相似性。这表明我们所建立的优化模型所计算出

来的结果具有一定的可靠性和真实性，如图 21-6 和图 21-7 所示。

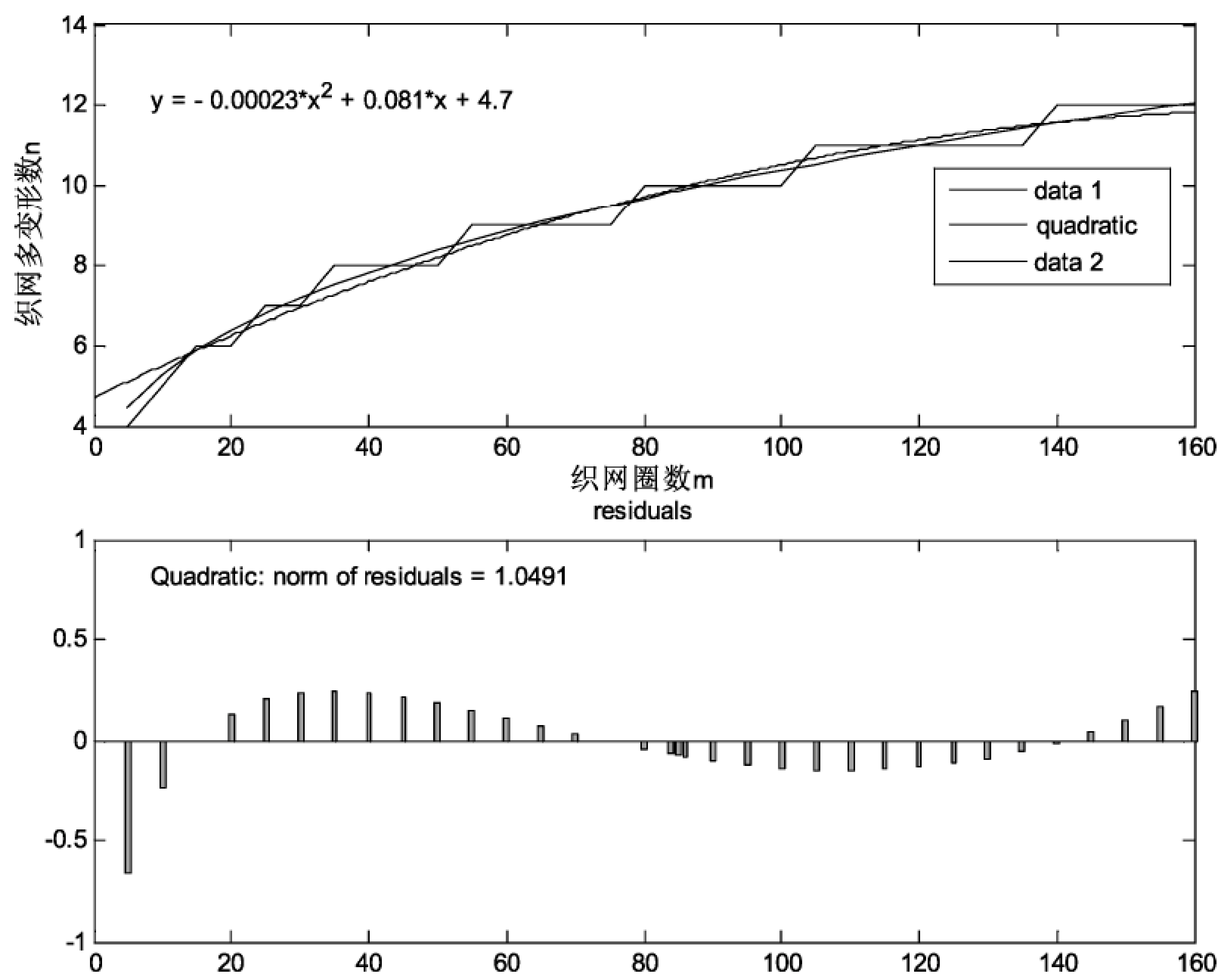


图 21-5　织网圈数与多边形关系图

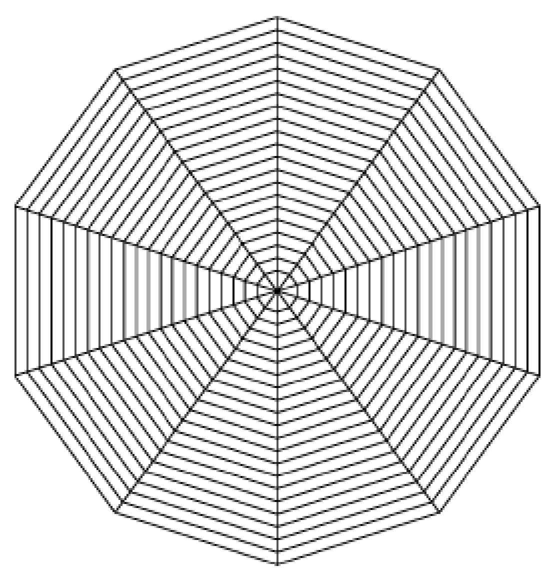


图 21-6　理论蛛网图

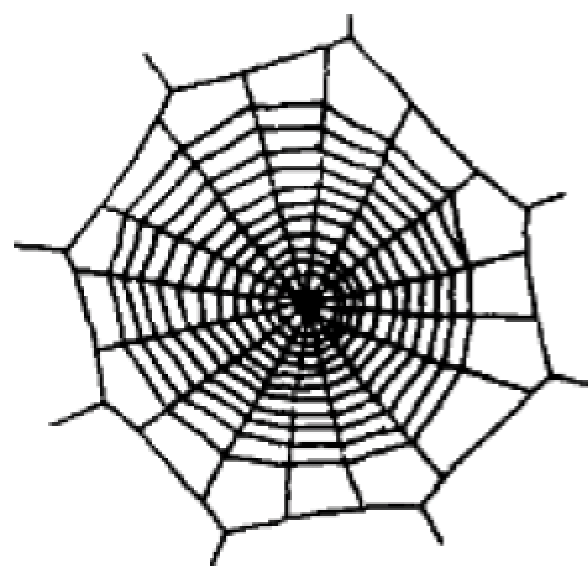


图 21-7　实际蛛网图

从蜘蛛网进化的相关资料知道，圆形蛛网出现在蛛网进化阶段的后期（可见蜘蛛进化图谱），并且在圆网的基础上，又变化出一些新的类圆形蛛网结构，圆形蛛网在自然界其他蛛网中所占比例很高，对圆形和类圆形蛛网研究具有普遍的意义，如图 21-8 所示。

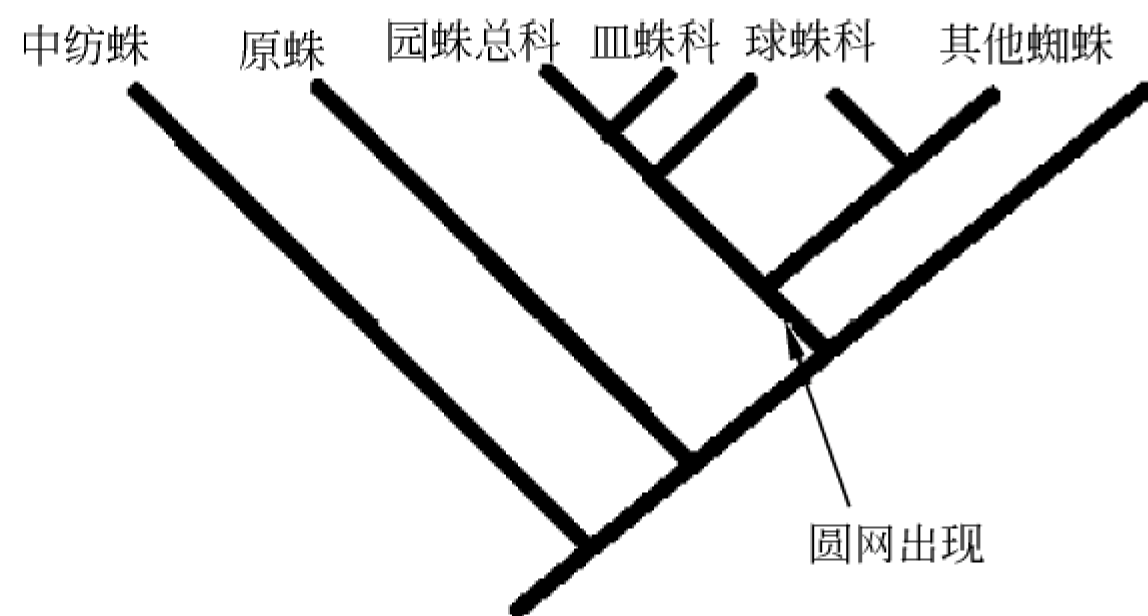


图 21-8　蜘蛛进化图谱

21.6.4　对蛛丝分布疏密程度研究的分析

上面对比了十边形蛛网和自然界中蛛网的结构，在发现二者相似性的同时注意到了二者的区别：自然界蛛网上蛛丝的分布并不一定是均匀的。上面对蛛丝分布均匀性的假设存在合理性也需要重新进行思考和探究。

可将自然界中的蛛丝疏密性的情况大致分为三类。

（1）第一种捕丝均匀分布，即任意相邻的横向蛛丝的距离是相同的。

（2）第二种是从中心向两边捕丝的分布密度降低，即从内向外相邻横向蛛丝的距离越来越大。

（3）第三种和第二种相反，即从中心向两边横向蛛丝的分布密度上升，从内向外相邻横向蛛丝之间的距离越来越小。

为了比较这三种模型的优劣，选取蛛网“捕食效率”和蛛网稳定性这两个方面作为评价指标，采用综合评价模型对三种模型进行打分排序。

下面我们首先研究“蛛网的捕食效率”。

1．蛛网“捕食效率”的分析

蜘蛛网最大的实用价值就是捕食，所以在研究蛛网优劣性的时候一定要考虑蛛网对捕食的影响。

忽略昆虫的大小，在蜘蛛捕食过程中将被捕食的昆虫抽象成点。被捕的昆虫在网上被粘住的位置位于横向丝（捕丝）上，如图 21-9 所示，可认为在这些合理假设的基础上，蜘蛛捕食捕丝上一只昆虫需要消耗的体力与被捕昆虫所在的捕丝和相邻两个半径丝围成图形的面积正相关。那么蜘蛛捕食从中心向外数第 i 条捕丝上的一个昆虫所消耗的体力正比于图示阴影面积 S_i 。用面积 S_i 表示捕食相应位置上的昆虫所消耗的体力。

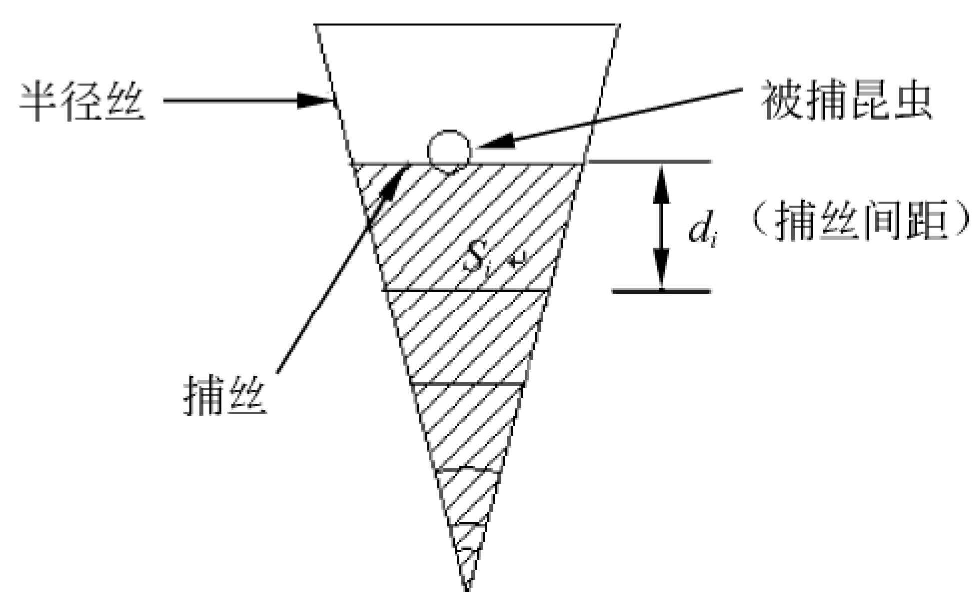


图 21-9　捕捉昆虫扫过面积图解

可认为被捕昆虫在半径丝方向上是均匀分布的，即在每一条捕丝上出现被捕昆虫的概率是相同的，那么应该计算出蜘蛛捕食所有捕丝上昆虫所消耗的体力，可以通过计算所有不同阴影面积的和对其进行表示。如果蜘蛛平均每次捕食昆虫所消耗的体力最少，那么可以认为蛛网的“捕食效率”就越高。所以用阴影面积之和与圈数的比值 $\dfrac{\sum_{i=1}^{m} S_i}{m}$ 的大小来反

映蛛网的“捕食效率”。我们知道其值越大，捕食效率越低，利用这种负相关的关系对蛛网捕食效率进行如下定义：

$$\eta = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m} S_i}$$

捕食效率越高，蛛网越优。

2. 蛛网“捕食效率”模型的建立和求解

以正八边形的蛛网为例计算“捕食效率”。

边数 $n = 8$，S 面积一定，为了对下面三种类型的蛛网进行计算比较，拟定 $S = 10$。

为了计算方便，将三角形面积转化为相应的扇形面积。

用 $\Delta d = d_i - d_{i-1}$ 来描述三种捕丝的密度分布的情况。

当 $\Delta d = 0$ 时，捕丝从中心向周围均匀分布，为上述第一种类型。

当 $\Delta d = c > 0$ 时，捕丝密度从中心向周围逐渐降低，为上述第二种类型。

当 $\Delta d = c' < 0$ 时，捕丝密度从中心向周围逐渐升高，为上述第三种类型。

在本题中所选的三种模型具有代表性，最后需要对三种丝的优劣进行排序。c 值的大小虽然会影响到“蛛网捕食效率”的数值，但是不会改变排序的先后，为了简化计算。令 $d_1 = d$，$c = -c' = d$。

1）第一种捕丝分布

如图 21-10 为等间距捕丝分布。

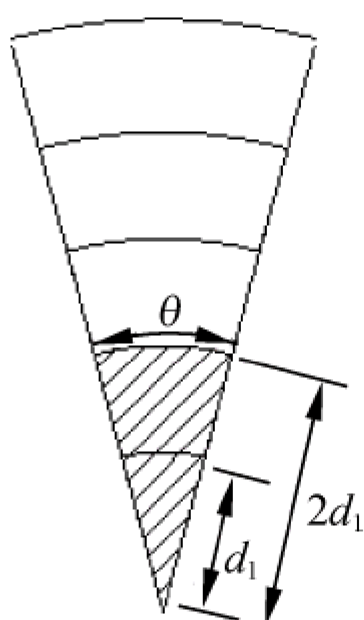


图 21-10　等间距捕丝分布

根据图 21-10 所示，容易计算出第 i 条捕丝与相邻半径丝围成的扇形的面积为：

$$S_i = \frac{1}{2}\theta(id_1)^2$$

可以表示出所有的面积之和为：

$$S = \sum_{i=1}^{m} S_i = \frac{1}{2}\theta d_1^{\,2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m_1^{\,2}\right)$$

化简整理可得：

$$S = \frac{1}{2}d_1^{\,2}\frac{m_1(m_1+1)(2m_1+1)}{6}\theta$$

其中，扇形弧度角为：

$$\theta = \frac{2\pi}{n}$$

圆形包围圈半径为：

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}(S_{const} = 10) = 1.7841$$

等间隔 d_1 为：

$$d_1 = \frac{r}{m_1}$$

由上一部分的结论知道在假设捕丝均匀分布的前提下，多边形数为 8 时，蜘蛛网圈数 m 最小可以取 35，所以计算出 $d_1 = 0.0510$。

整理上式可以计算出 $S = 15.2143$。

所以第一种网的捕食效率 $\eta = \frac{m}{S} = \frac{35}{15.2143} = 2.3004$。

LINGO 编程如下：

```
model:
sets:
count/1..35/:n1;  !变量设置
endsets

min=(@sum(count(i):1/2*n1(i)*n1(i)*d*d*(cita)))/35;  !目标函数

@for(count(j):n1(j)=j);   !约束条件
!cita 弧度制
cita=2*3.1415926/n;

!面积常数
S=10;
!半径 r
r=@sqrt(S/3.1415926);
!间隔 d
d=r/35;

i=35;
!满足最大边界条件
n1(i)*d-@sqrt(S/3.1415926)<0;

n=8;
!@gin(n);  !整数

end
```

计算结果汇总于表 21-2 所示。

表 21-2　计算结果

种类—各项数据	多边形边数 n	等间距 $\Delta d = 0$	蜘蛛网织网圈 m	蜘蛛扫过面积 S	捕食效率 η
数值	8	0	35	2.5357	2.3004

2）第二种捕丝分布

在求第二种和第三种捕丝的时候基本的思路和第一种保持一致。

则蜘蛛扫过的面积为：

$$S = \sum_{i=1}^{m'} S_i = \frac{1}{2}\theta d_1^2 \left(1^2 + (1+2)^2 + (1+2+3)^2 + \cdots + (1+2+3+\cdots+m')^2\right)$$

对比蜘蛛网格线等间距 d_1，有：

$$S = \frac{1}{2} d_2^2 \theta \sum_{i=1}^{m'} \frac{i^2(i+1)^2}{4}$$

同样，蜘蛛网格线包括于 S 内，满足边界条件：

$$\frac{m'(m'+1)}{2} \cdot d_2 - r \leqslant 0$$

计算可得 m' 最大取 7，LINGO 编程如下：

```
model:
sets:
count/1..7/:n1;  !变量设置
endsets
min=(@sum(count(i):1/4*n1(i)*n1(i)*(n1(i)+1)*(n1(i)+1)*1/2*h*h*(cita))+S/
n)/7; !目标函数

@for(count(j):n1(j)=j);
!多边形边数
n=8;
!cita 弧度制
cita=n/2/3.1415926;
!面积常数
S=10;
!半径 r
r=@sqrt(S/3.1415926);

i=7;
!间隔 h
n1(i)*(n1(i)+1)*h/2-r<0;
!满足最大边界条件
!n1(i)*(n1(i)+1)*h-2*@sqrt(S/3.1415926)<0;

h>0.05097;
!@gin(n);

end
```

计算结果见表 21-3。

表 21-3　计算结果

种类二各项数据	多边形边数 n	非等间距 $\Delta d = d_1$	蜘蛛网织网圈数 m'	蜘蛛扫过面积 S	捕食效率 η
数值	8	0.0510	7	1.6283	4.2990

3）第三种捕丝分布

m'' 为蜘蛛网织网的圈数，易知 $m'' = m' = 7$。

则蜘蛛扫过的面积为：

$$S = \sum_{i=1}^{m''} S_i$$

$$S_i = \frac{1}{2} d_1^2 \theta \sum_{i=1}^{m''} \left(\frac{(2m'-i+1)}{2} i\right)^2$$

LINGO 编程如下：

```
model:
sets:
count/1..7/;    !变量设置
endsets
min=(@sum(count(i):(1/2*(2*n1-i+1)*i)*(1/2*(2*n1-i+1)*i)*1/2*h*h*(cita))+
S/n)/7;  !目标函数

!@for(count(j):n1(j)=j);
!多边形边数
n=8;
!cita 弧度制
cita=2*3.1415926/n;
!面积常数
S=10;
!半径 r
r=@sqrt(S/3.1415926);

!织网圈数
n1=7;
!间隔 h
n1*(n1+1)*h/2-r<0;
!满足最大边界条件
n1*(n1+1)*h-2*@sqrt(S/3.1415926)<0;

h>0.05097;
end
```

计算结果汇总于表 21-4。

表 21-4　计算结果

种类三各项数据	多边形边数 n	非等间距 $\Delta d=-d_1$	蜘蛛网织网圈数 m''	蜘蛛扫过面积 S	捕食效率 η
数值	8	-0.0510	7	3.2279	2.1686

3．蛛网捕食效率模型的结果分析和模型评价

由此得到了三种捕丝不同分布情况下蜘蛛捕食的效率。通过对比可以发现捕丝的密度从中间向两边逐渐降低的蛛网的捕食效率是最高的，其次是均匀分布的蛛丝，效率最低的蛛网是第三种。

通过对自然界中蜘蛛网的观察及常识可以知道第二种蛛丝是常见的。而捕丝密度从中间向两边逐渐降低的蛛网模型在自然界中几乎找不到。

由此可以认为通过所建立的模型求出的蛛网捕食效率和实际是比较贴合的。

虽然计算出来的模型与实际比较较为贴合，但是蛛网捕食效率模型依然存在一些问题。

模型的假设不够准确：在模型假设中我们将蜘蛛捕食的昆虫看做一个点，但是实际中昆虫的大小与形状对蜘蛛捕食是具有一定影响的。昆虫也不一定会粘在某一条捕丝上，这些都造成计算出来的结果与实际存在误差。

在考虑捕食之间差距的变化量 Δd 的时候认为 Δd 的大小为一个常量，又为了便于计算

认为大小为 d_1，这个与实际的模型也是存在一定差距的。在现实中 Δd 可能是一个变化的值。在时间充裕的条件下，可以将 Δd 作为决策变量，将这个问题转化为一个最优问题进行进一步的探究。

在分析了蛛网捕食效率模型的优劣之后，就可以对这个模型建立一个宏观的认识，便于在层次分析法模型中确定“捕食效率”与“稳定性”之间的权重。

4．蛛网稳定性的研究

蛛网稳定性决定蛛网使用的时间，捕捉昆虫的能力是反映蛛网优劣的重要指标。

在对稳定性进行分析的时候我们给予三种蜘蛛网相同位置上一个相同的外力，计算外力作用下蛛网受力分析和相关参数。

因为蛛网本身就具有一定的强度，力在蛛网之间的传递和力在杆件中的传递相类似。蛛丝可以看做是具有一定刚度的杆件，它在外力的作用下产生一定的内力与位移，我们利用单元刚度矩阵平来分析单根蛛丝的受力情况与位移情况。用 ANSYS 软件计算相关的参数，并将受力情况通过图像显示出来。

值得注意的是我们这里认为所有蛛丝的材质都是相同的，而我们的目标是比较三种捕丝分布的优劣，所以蛛丝材质方面的参数对我们的结果没有影响，这些参数可以使用 ANSYS 中的默认值。

1）研究指标的确定

分析一根蛛丝的受力时我们将其看做一杆件，蛛丝在外力作用下（鉴于蛛丝与杆件之间的区别，我们只考虑蛛丝的受拉情况），内部的受力与位移情况如图 21-11 所示。

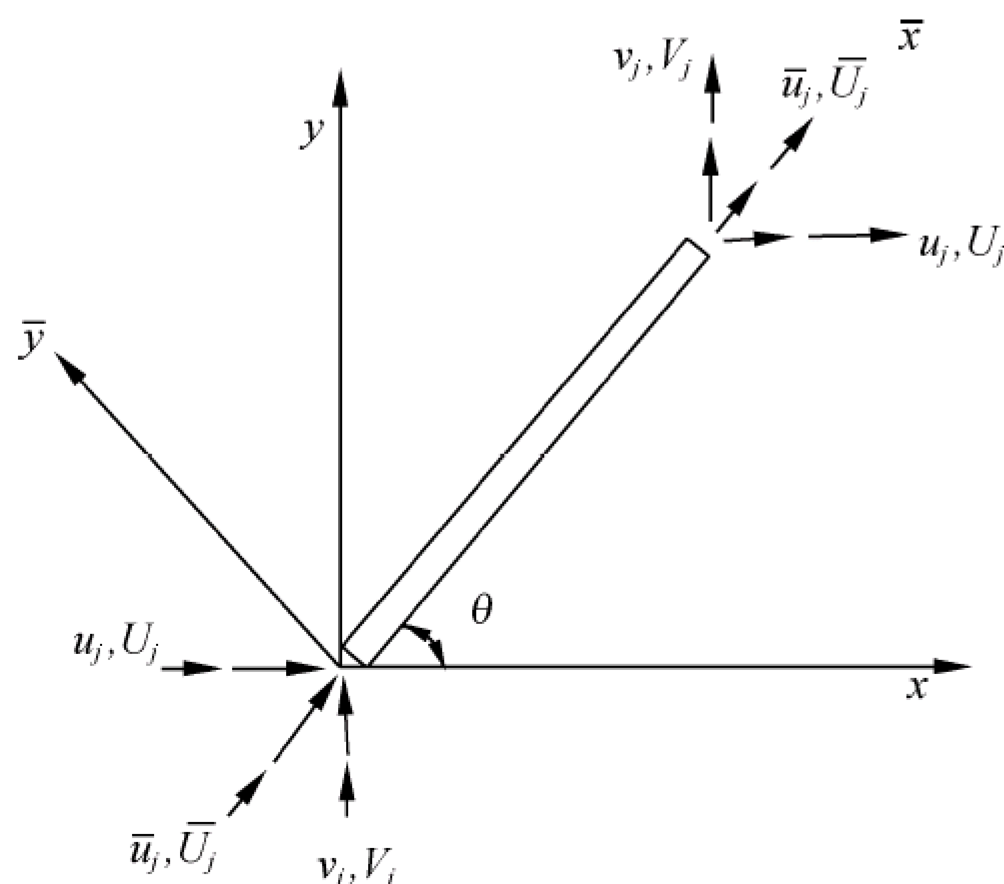


图 21-11　蛛丝的受力与位移

在对蛛丝受力分析时，我们选择材料力学中经常使用的最大应力、最大位移和最大应变三个指标。

2）单元刚度矩阵模型的建立

Step1：局部坐标系（或称单元坐标系）与整体坐标系（或称系统坐标系）间关系

考虑蛛丝单元垂直（y 向）自由度时，节点自由度为 2。局部坐标下的单元刚度矩阵扩展为四阶形式为：

$$\{\overline{F}^e\}=[\overline{K}^e]\{\overline{u}^e\},\quad \begin{Bmatrix}\overline{U}_i\\ \overline{V}_i\\ \overline{U}_j\\ \overline{V}_j\end{Bmatrix}=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{u}_i\\ \overline{v}_i\\ \overline{u}_j\\ \overline{v}_j\end{Bmatrix}$$

其中，E 为蜘蛛网丝弹性模量，$\overline{F}^e$ 为网丝横纵向受力矩阵、$\overline{K}^e$ 为网丝刚度矩阵、$\overline{u}^e$ 为网丝横纵向扰度矩阵。

Step2：节点 i 的位移分量在局部坐标与整体坐标间的转换关系如下。

$$\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{u}_i\\ \overline{v}_i\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\overline{u}_i\\ \overline{v}_i\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\end{Bmatrix}$$

Step3：节点 j 的位移及节点力同样有这种转换关系。则有单元位移及单元力在不同坐标系下的转换关系如下。

$$\begin{Bmatrix}\overline{u}_i\\ \overline{v}_i\\ \overline{u}_j\\ \overline{v}_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C&S&0&0\\-S&C&0&0\\0&0&C&S\\0&0&-S&C\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ u_j\\ v_j\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\overline{U}_i\\ \overline{V}_i\\ \overline{U}_j\\ \overline{V}_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C&S&0&0\\-S&C&0&0\\0&0&C&S\\0&0&-S&C\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_i\\ V_i\\ U_j\\ V_j\end{Bmatrix}$$

其中的转换矩阵可记为$[T]$，则上述关系记为：

$$\{\overline{u}\}=[T]\{u\},\quad \{\overline{U}\}=[T]\{U\}$$

Step4：得整体坐标下的单元刚度矩阵如下。

$$[K^e]=[T]^T[\overline{K}^e][T]$$

$$[K^e]=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}C^2&CS&-C^2&-CS\\CS&S^2&-CS&-S^2\\-C^2&-CS&C^2&CS\\-CS&-S^2&CS&S^2\end{bmatrix}$$

则整体坐标下的单元刚度方程为：

$$\{F^e\}=[K^e]\{u^e\}$$

分析多单元系统时，由各单元刚度矩阵组合为总体刚度矩阵。

5．蜘蛛网稳定性模型的求解与分析

1）第一种捕丝结构稳定性分析

通过利用 ANSYS 软件可以得到每种情况下蛛网内部的应力、位移和应变大小值，如表 21-5 所示。

表 21-5　因素汇总表

因 素 类 别	最大应力(N/m^2)	最大位移(mm)	最 大 应 变
蛛网等间距	1.2	1.29e-11	4.535e-12
蛛网间距递增	2.1	2.649e-10	7.992e-12
蛛网间距递减	2.9	1.743e-10	1.074e-11

以下蛛网等间距 d_1，其应力、位移和应变的图（其他两种情况的相关图形见程序文档）如图 21-12 所示。

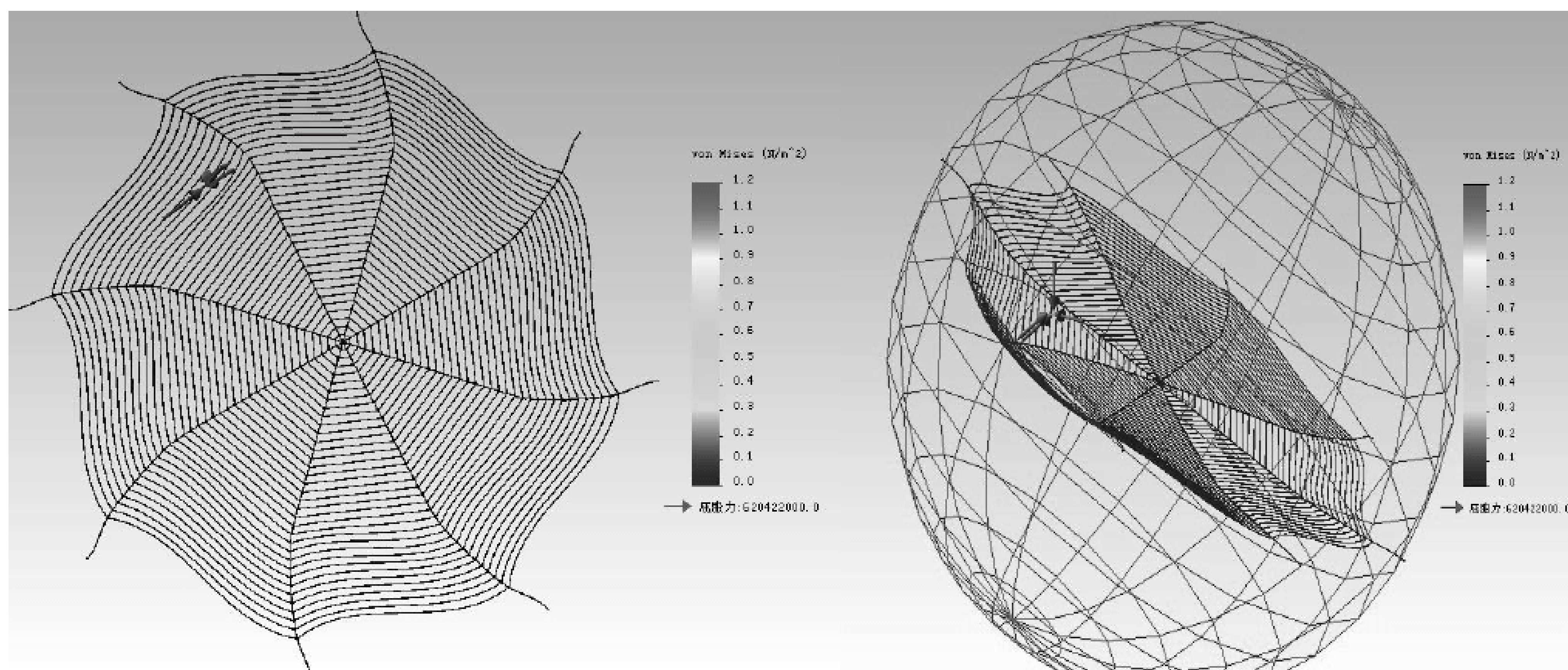


图 21-12　应力 von Mises(N/m^2)

当蜘蛛网受到昆虫撞击时，昆虫可等效为作用于蛛网的一个力，使得蛛网产生应力，蛛网发生弹性变形，图 21-12 为等间距 d_1 蛛网应力图。在右侧应力大小分布其中，从蓝色到红色，表示应力逐渐增大。

图 21-13 为合位移 URES(mm) 图，合位移 URES(mm) 为横向和纵向的位移之和。图 21-13 反映了当力作用于蛛网后，蛛网丝偏移原来的位置的大小分布图，从图 21-13 中，很直观的可以看出作用点处的合位移最大，也是蛛网易产生破坏的地方。在右侧合位移大小分布其中，从蓝色到红色，表示合位移逐渐增大。从该图可知，等间距 d_1 蛛网较好。

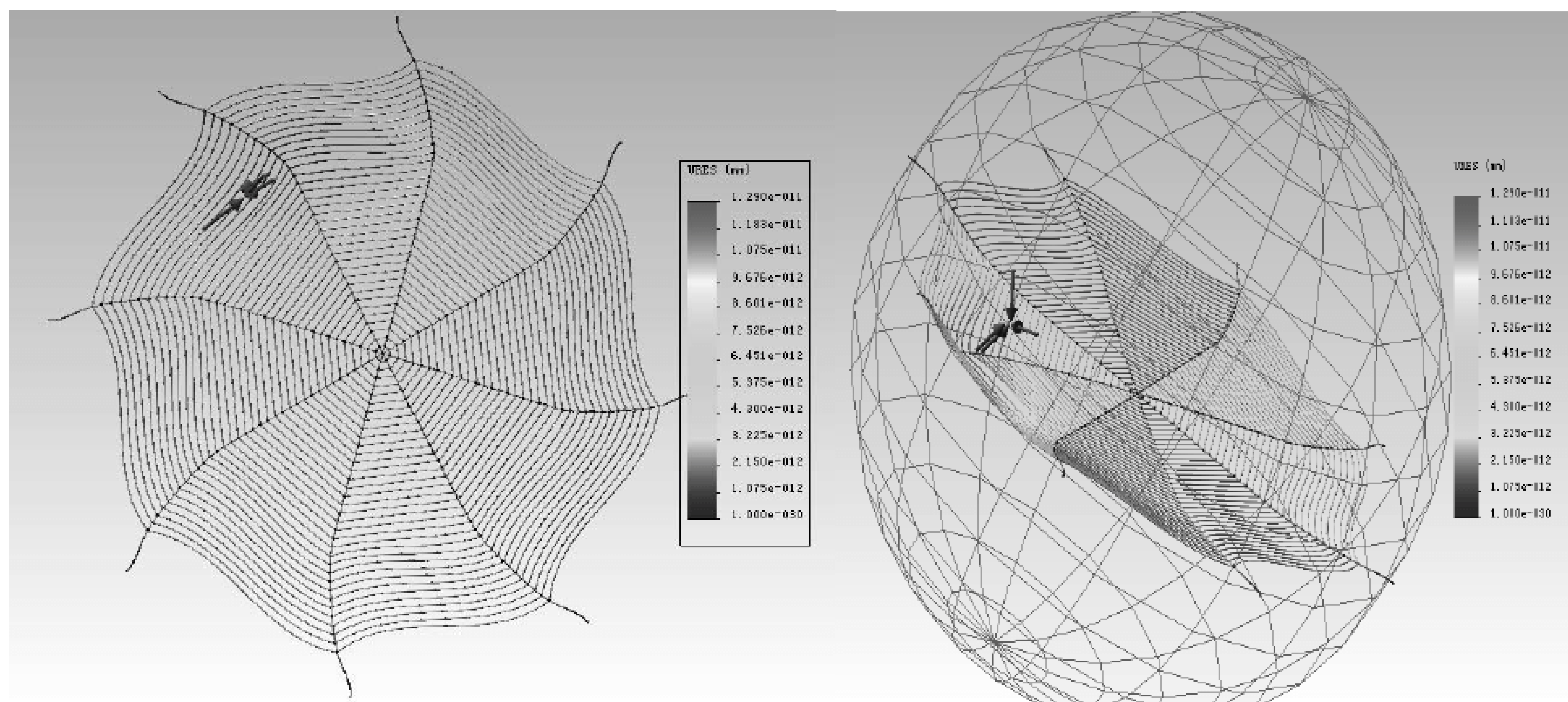


图 21-13　合位移 URES(mm)

图 21-14 为应变 ESTRN 图，从图中能较易看出各点间的相对变形量，在右侧应变量大小分布其中，从蓝色到红色，表示应变量逐渐增大。

2）第二种捕丝结构稳定性分析

第二种捕丝结构稳定性分析如图 21-15 所示。

图 21-15 中，对第二种密度从中间向两边逐渐降低的蜘蛛网格，在相同的位置作用相

同的力，产生的合位移变化如图 21-15 所示，由图 21-15 可知，线性间距 d_2 的蜘蛛网格较等间距蛛网产生较大的偏移量，蛛网破坏程度加大，该蛛网稳定性一般。

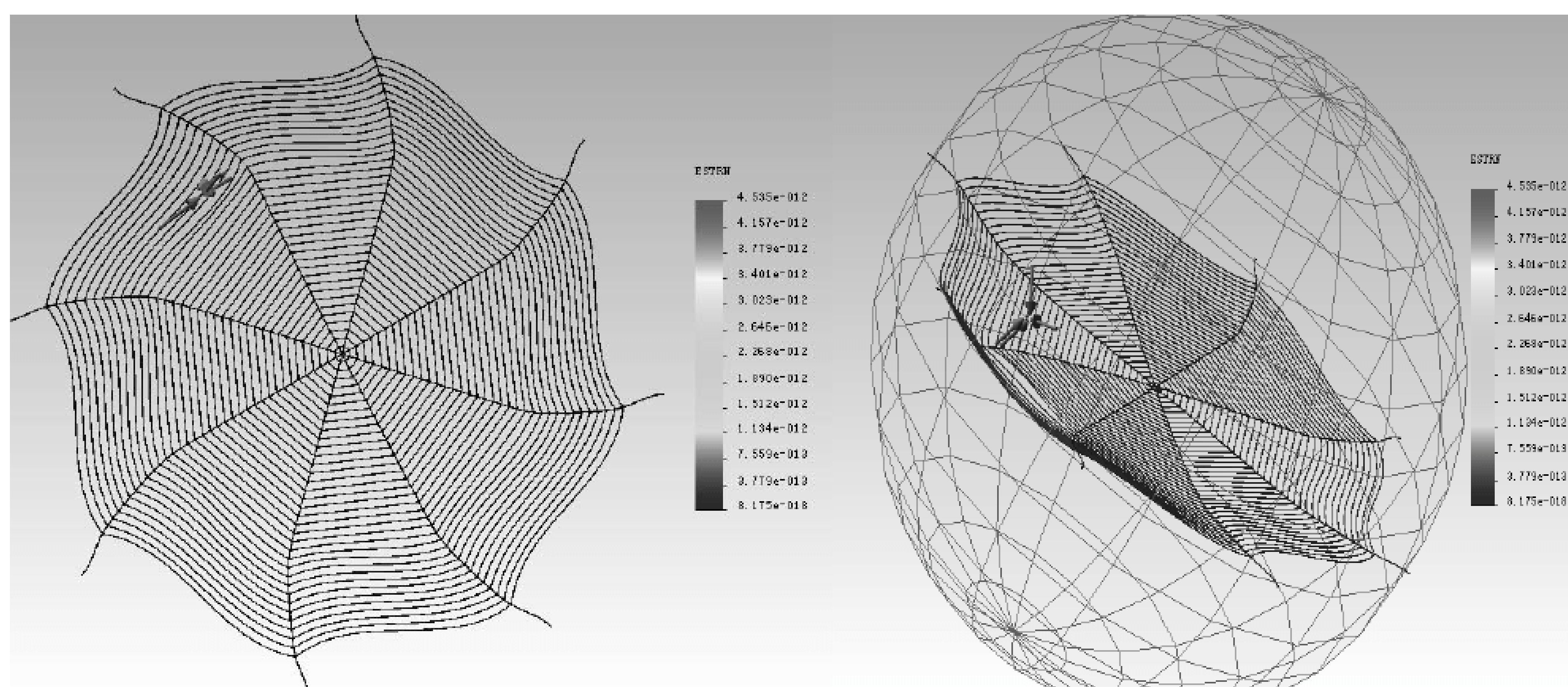


图 21-14　应变 ESTRN

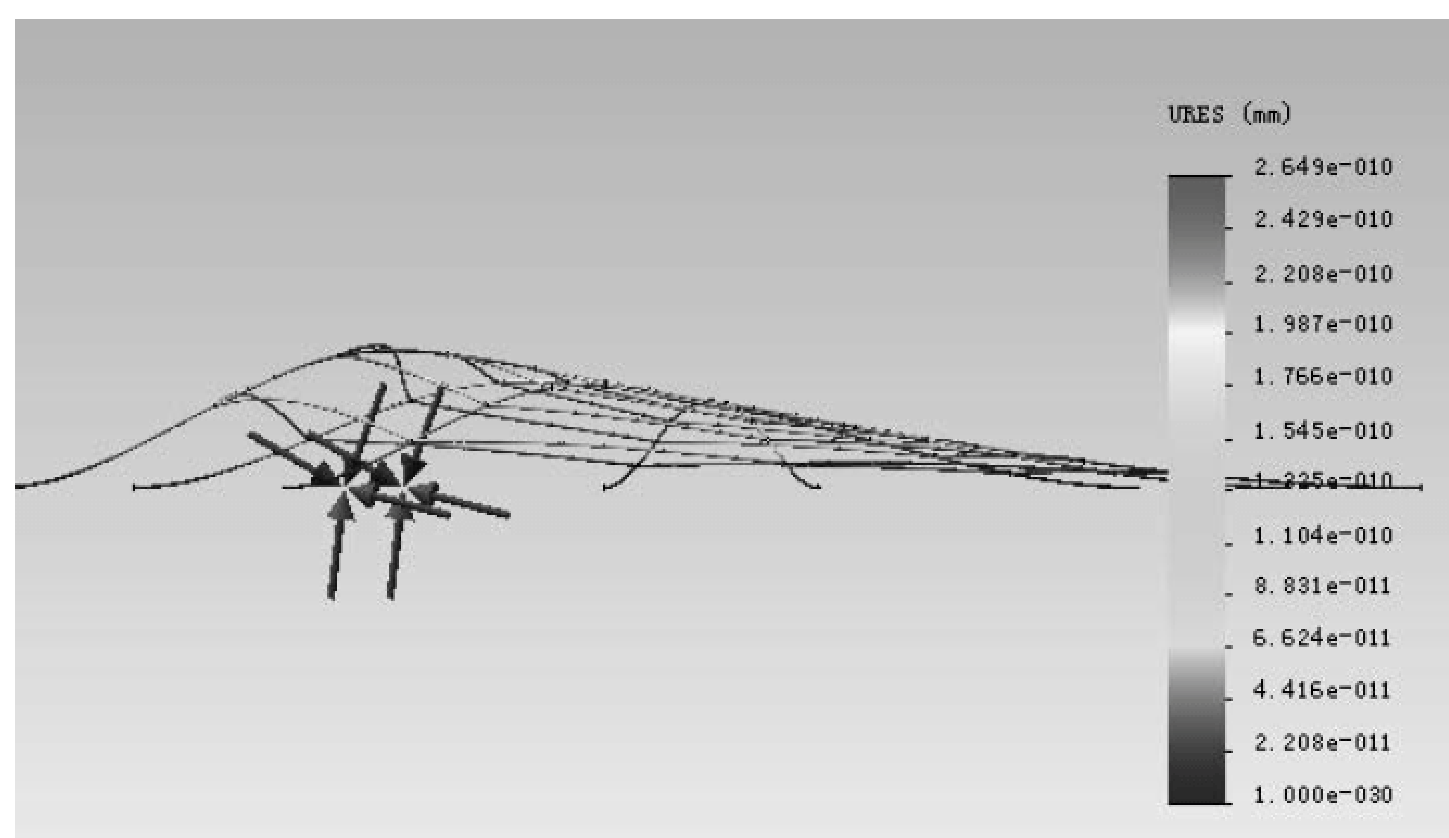


图 21-15　蜘蛛网格线性间距 d_2 递增合位移 URES(mm)

3）第三种捕丝结构稳定性分析

第三种捕丝结构稳定性分析如图 21-16 所示。

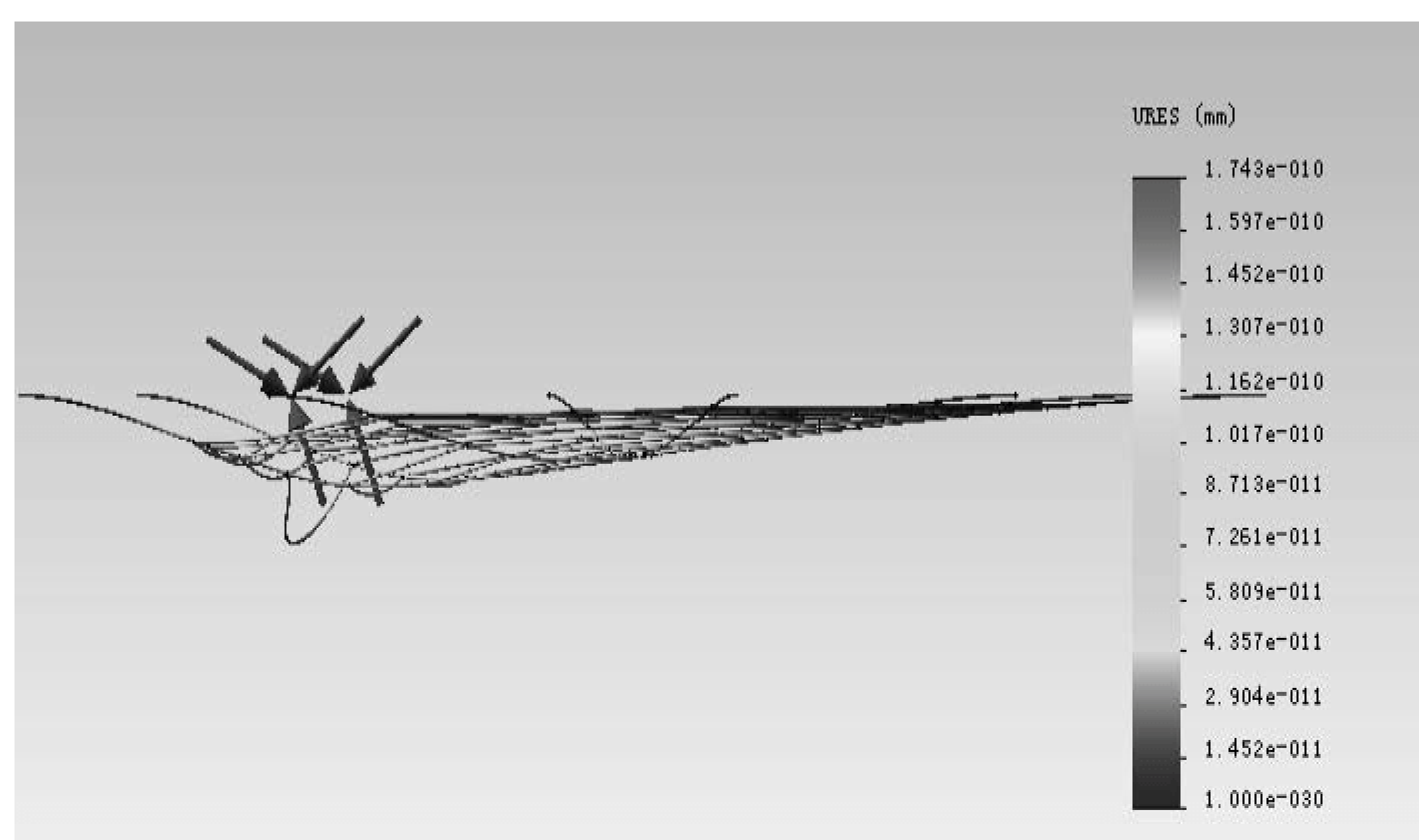


图 21-16　蜘蛛网格线性间距 d_3 递减合位移 URES(mm)

图 21-16 亦在等间距蛛网的基础上，在相同的位置作用相同的力，产生的合位移变化如图 21-16 所示，从中可知，线性间距 d_3 的蜘蛛网格较等间距蛛网产生很大的偏移量，基本到达了破坏的程度，昆虫可以逃逸，蛛网稳定性较差。

通过上述的数据和图形，可知在蛛网等间距的情况下，蛛网本身的稳定性是比较好的。

21.6.5　综合评价模型

1. 综合评价模型的分析

前面已经研究了蛛网捕食效率和蛛网稳定性，在对三种不同密度分布的蛛网模型进行评价的时候，需要综合这两个方面，考虑这两个方面中的各项指标。因此采用层次分析法确定每种因素的权重之后，利用线性加权法对三种情况下的蛛网优劣性进行打分，分数最高的网络结构最优。

2. 综合评价模型的建立

Step1：数据的无量纲化处理

由于数据的量纲不一致将会对结果产生一定误差，故应该先对数据进行无量纲化处理。一般来说，数据的无量纲化处理有标准差方法、极值差方法和功效系数方法等。在此，选取极值差方法对 5 类指标进行标准化处理。处理方法为：

$$x'_{ij}=\frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}x_{ij}}\quad(i=1,2,3;j=1,2,\cdots 5)$$

其中，则 $x'_{ij}\in[0,1]$ 是无量纲的指标观测值。

Step2：层次分析图

对于本章中蛛网的实用性，其实质上体现在两个方面，即蜘蛛捕食和蛛网的稳定性，而蛛网的稳定性又可以通过蛛网的圈数、蛛网受到的最大应力及蛛网的最大位移和应变来表示。各种因素的层次图如图 21-17 所示。

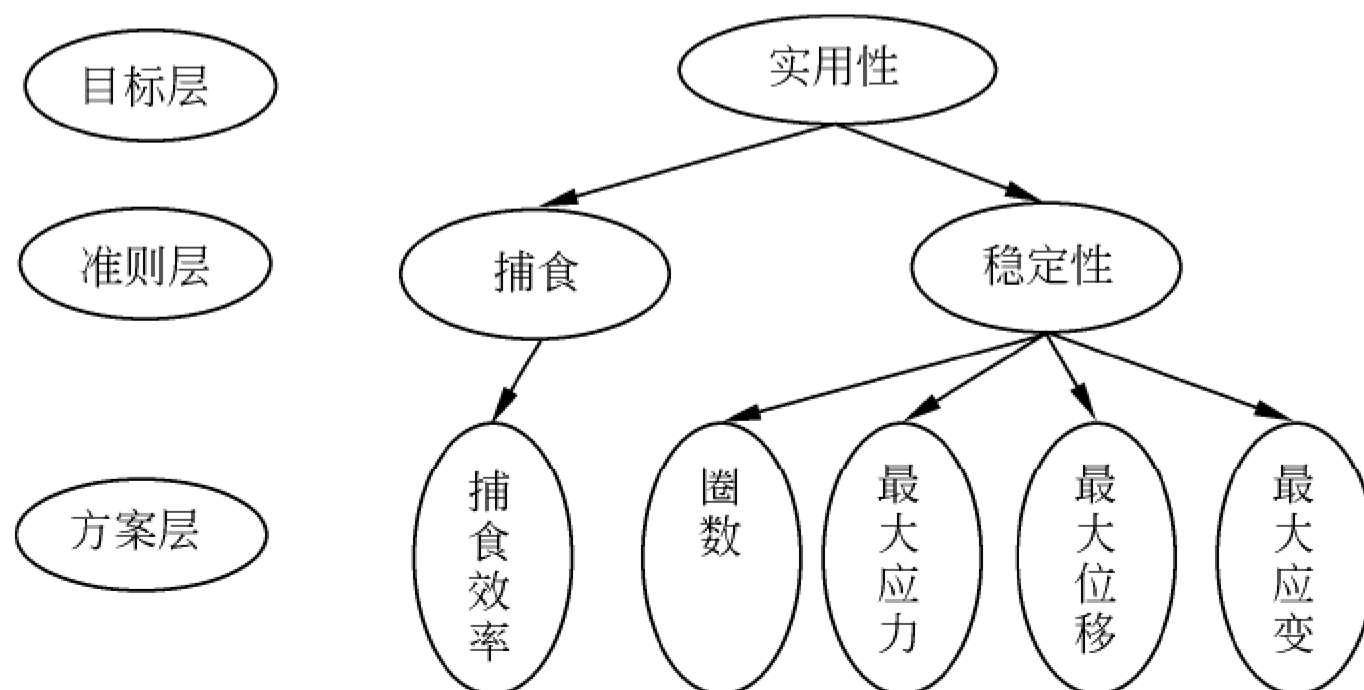


图 21-17　层次分析图

Step3：类别权向量的确定

由于层次分析法是一种定性与定量结合求权重的方法，在此运用层次分析法（AHP）

确定每种指标的权重。在定性的构造成对比较矩阵时，通常采用的等级尺度如表 21-6 所示。

表 21-6　1～9 尺度的含义

标　　度	含　　义
1	表示两个因素相比，具有同等重要性
3	表示两个因素相比，前者比后者稍微重要
5	表示两个因素相比，前者比后者明显重要
7	表示两个因素相比，前者比后者强烈重要
9	表示两个因素相比，前者比后者极端重要
2、4、6、8	表示上述相邻判断的中间值

把影响蛛网实用性的因素记作 $U=\{U_1,U_2,\cdots U_n\}$，称为实用性的评价指标集。注意到关于评价指标集中的评价指标往往不是同等重要的，因此对其进行加权处理。根据美国匹兹堡大学著名的运筹专家 T.L.Saaty 创造的层次，可以得到评价指标加权矩阵：

$$w=(w_1,w_2,w_3,\cdots,w_n),\sum_{i=1}^{n}w_i=1,w_i\geqslant 0$$

因为得到的评价结果往往不是单一的，而是多个，但这些评价结果往往带有模糊性，事实上并没有找到一个绝对的指标来刻画什么样的空气质量是好的。因此我们假设评语集为模糊集 $V=\{v_1,v_2,v_3\cdots,v_m\}$。

构造实用性的评价矩阵构造模糊评价矩阵 $p=(p_{ij})_{n\times m}$，其中 p_{ij} 表示第 i 个指标属于第 j 个评语的隶属度。由于评价指标需要进行加权处理，从而利用加权指标矩阵与模糊评价矩阵得到综合评价矩阵 B，即：

$$B=(w_1,w_2,w_3\cdots w_n)\otimes\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm}\end{pmatrix}$$

综合模糊评价矩阵刻画了影响实用性各因素的隶属情况。注意，这里矩阵的乘法不是矩阵的张量积，而是模糊乘法。

对综合评价矩阵 B 做归一化处理，即不妨假设计算得 $B=(b_1,b_2,b_3\cdots,b_n)$，则 $B=\dfrac{1}{b_1+b_2+b_3+\cdots b_n}(b_1,b_2,b_3\cdots,b_n)$ 为 B 的归一化向量。

建立如下公式对实用性进行综合评定。

$$S=\sum_{i=1}^{5}M_i\times D_i$$

S——蛛网质量得分；

D_i——第 i 个指标的权重；

M_i——第 i 个指标的具体数值。

3．综合评价模型的求解

通过查阅相关资料可以得到几个因素之间的重要性程度，根据这种重要性程度，构造的两两对比较矩阵如下：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

利用 MATLAB 可以得到每种因素的权重值：

```
clc,clear,close all
% 对比较矩阵
A=[1   2    4    5
  1/2   1   3   4
  1/4  1/3   1    2
  1/5   1/4  1/2   1];
[D,X]=eig(A);               %求特征值和特征向量
ZD=max(max(X));             %最大特征值
[m,m]=size(D);              %矩阵大小
p=max(X);                   %特征值
for i=1:m
    if p(i)==ZD             %找出标号
       q=i;
   end
end
z=sum(D);                   %求和
for i=1:m
    for j=1:m
        D(i,j)=D(i,j)/z(j);  %归一处理
    end
end
ZD
B=D(:,q)
RI=[0 0 0.58 0.9 1.12 1.24 1.32 1.41 1.45 1.49 1.51];
CI=(ZD-m)/(m-1)             %一致性指标
CR=CI/RI(m)                 %一致性比例
```

具体数据如表 21-7 所示。

表 21-7　权重数值

因素类别	捕食效率	最大应力	最大位移	最大应变	圈数
权重值	0.4	0.2951	0.1834	0.0749	0.0467

在得到了权重之后，便需要利用线性加权法对三种情况下的蛛网实用性进行打分，得到的分数数值如表 21-8 所示。

表 21-8　各种因素的数值

因素类别	捕食效率	最大应力(N/m^2)	最大位移(mm)	最大应变	圈数
蛛网等间距	2.3004	1.2	1.29e-11	4.535e-12	35
蛛网间距递增	4.2990	2.1	2.649e-10	7.992e-12	7
蛛网间距递减	2.1686	2.9	1.743e-10	1.074e-11	7

经计算分析：

```
% 线性加权的程序
A=[2.3004 1/1.2   1/1.29e-11  1/4.535e-12 35
4.2990    1/2.1   1/2.649e-10 1/7.992e-12  7
2.1686    1/2.9   1/1.743e-10 1/1.074e-11  7];
B=A;
a=size(B,1);              %A 的行数
b=size(B,2);              %A 的列数
MX=sum(B);                %每一列的和值
for j=1:b                 %将 A 里面的值标准化
    for i=1:a
        B(i,j)=B(i,j)./MX(j);
    end
end
B;
B1=[0.4 0.2951  0.1834  0.0749  0.0467].*B(1,:);
B2=[0.4 0.2951  0.1834  0.0749  0.0467].*B(2,:);
B3=[0.4 0.2951  0.1834  0.0749  0.0467].*B(3,:);
s=sum(B1)+sum(B2)+sum(B3);
sum(B1)/s*100
sum(B2)/s*100
sum(B3)/s*100
```

打分如表 21-9 所示。

表 21-9　三种情况分别得的分数

不同情况	蛛网等间距	蛛网间距递增	蛛网间距递减
分数	42.1615	33.9390	23.8995

4．综合评价模型结果的检验

考虑到实际构造的判断矩阵与理论上的判断矩阵可能存在误差，所以需要进行一致性检验来减少误差，检验的指标为 CI：

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - m}{m-1}$$

其中：

$\lambda_{\max}$——判断矩阵 A 的最大特征根；

m——影响实用性的因素个数。

当 $CI=0$ 时，判断矩阵具有完全一致性，CI 值越小，则所建矩阵的一致性越好，即越接近现实生活，误差越小。

因为对问题认识的不同，可能会引起随机误差，所以对上述一致性指标还应该加上一个随机修正系数 RI，RI 的取值如表 21-10 所示。

表 21-10　不同阶判断矩阵随机一致性指标

阶数（n）	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

相对一致性指标 CR：

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

只有当 CR 比 0.1 小时，构造的判断矩阵才具有满意的一致性。

$CI=(\lambda_{\max}-n)/(n-1)$（$n$ 为判断矩阵阶数），RI 为判断矩阵的平均随机一致性指标，其值参见层次分析法（AHP）的平均随机一致性指标值。则有 CR=0.0179，由于判断矩阵一致性比例小于 0.1，所以判断该矩阵具有良好的一致性，可以通过矩阵的相容性检验。因此，计算的权重是可以接受的。

我们最终得到的结论是在三种蛛网结构中，捕丝等间距分布的蛛网最优。从中心到四周捕丝间距递减的蛛网最差。

21.7　框丝与锚定丝受力分析模型的建立和求解

本章前部分的研究集中于蛛网内部的轮廓和捕丝的密度分布。在本部分建立力学模型对蛛网的边缘部分进行受力分析。

在查询了大量资料之后发现半径丝和框丝之间的连接具有两种固定的模式，一种是Δ的，另外一种是 Y 形。下面我们建立模型分析了两种连接方式，对两种连接进行对比。

21.7.1　星型连接和 Y 型连接的力学模型分析

Step1：将实际中的蛛网进行抽象提取，如图 21-18 和图 21-19 所示。

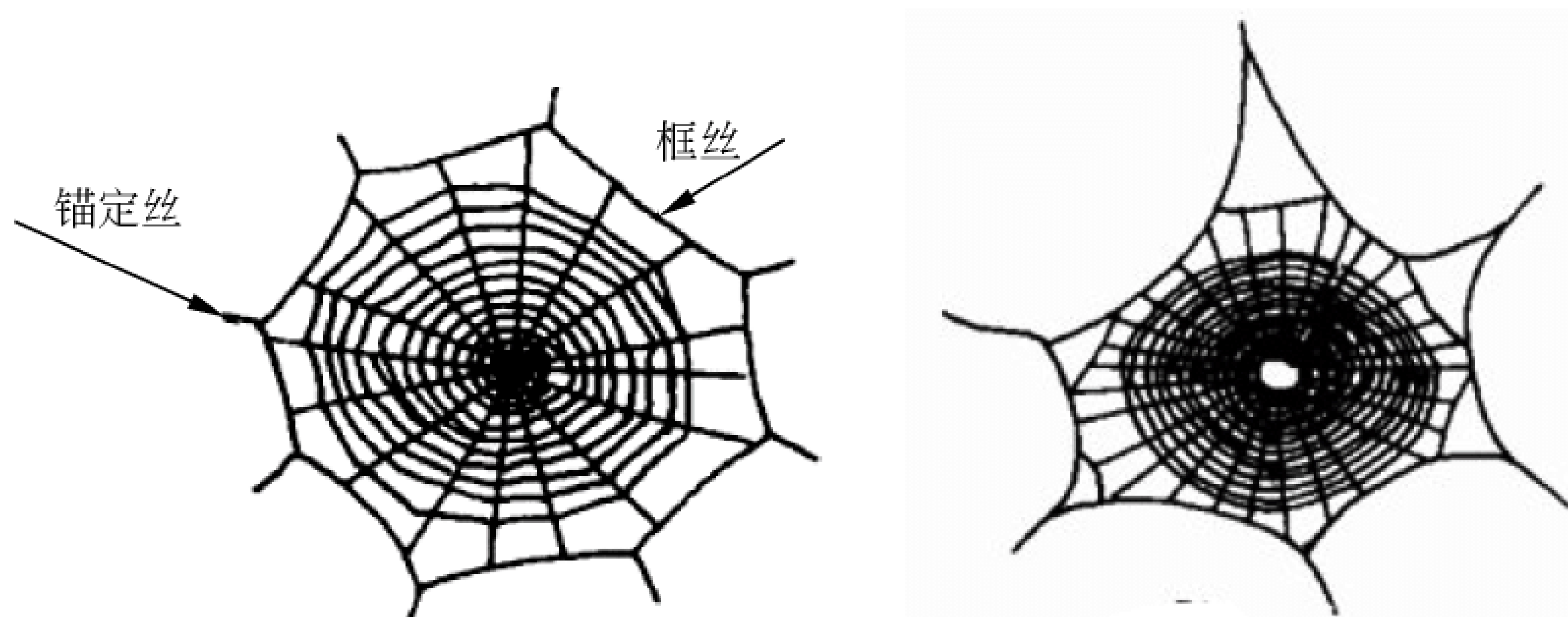


图 21-18　实际中两图形

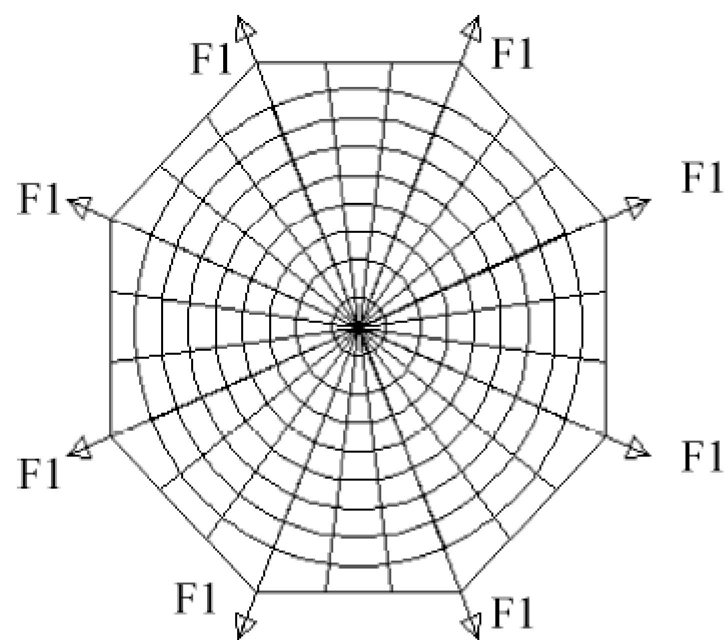


图 21-19　Y 型连接图

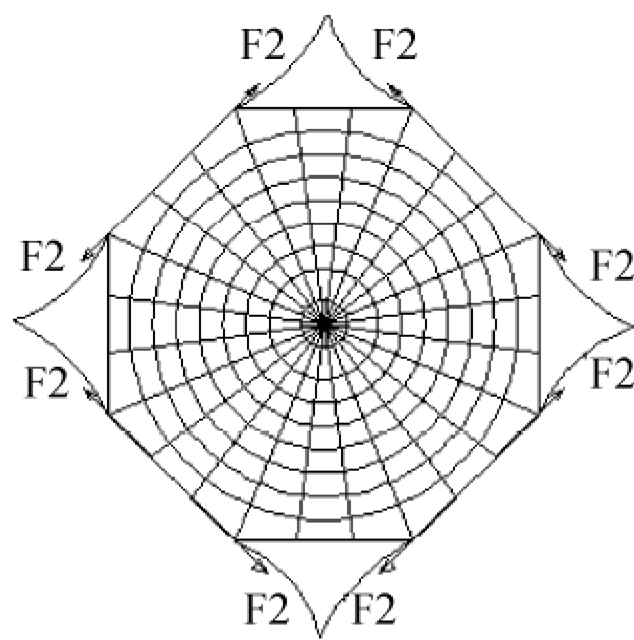


图 21-20　Δ 型连接图

Step2：当蜘蛛在蛛网的中心时，其自身和蛛网都具有一定的重力。本章建立的模型基于的假设是，当蛛网只是受到重力时其蛛网是以平面的形式产生向下的位移，上述中的两

种情况，由于本身结构存在一定的差异，导致在相同的外力作用下，其向下平移的距离不同，则与外界连接的丝与平面形成的夹角 θ 不同，如图 21-21 和图 21-22 所示。

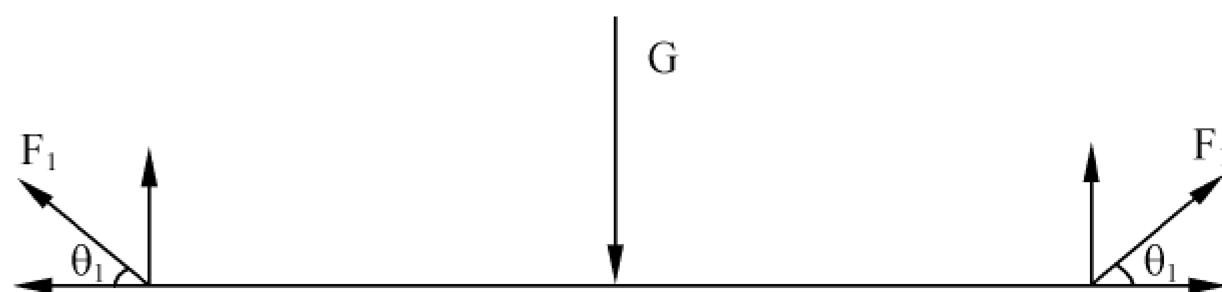


图 21-21　Y 连接方式下的受力图

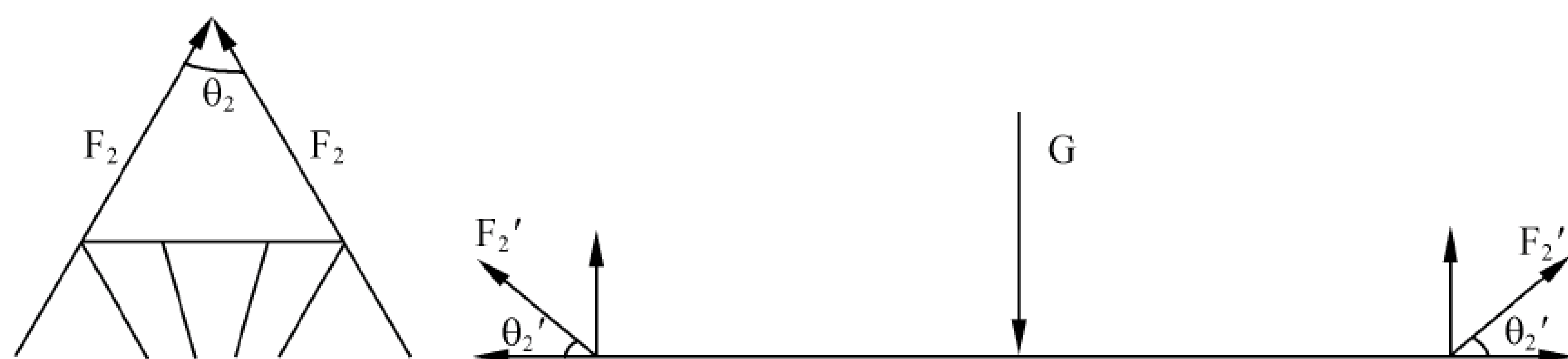


图 21-22　三角形连接方式下的受力图

Step3：根据简化后的受力，可以得到两种连接方式下连接力与重力之间的关系，如下所示。

Y 形连接方式如下：

$$8\times F_1\sin\theta_1 = G$$

三角形连接方式如下：

$$F_2' = 2F_2\cos(\frac{\theta_2}{2})$$

$$4\times F_2'\times\sin\theta_2' = G$$

Step4：利用上述得到的两个式子，可以找到 F_1、F_2 与角度之间的一些关系，如下所示。

$$\frac{F_1}{F_2\cos(\theta_2/2)} = \frac{\sin\theta_2'}{\sin\theta_1}$$

21.7.2　模型求解与分析

（1）对两种连接方式，每根丝受到的力都相等时，可以推出 $\sin\theta_1 < \sin\theta_2'$。前者的蛛网位移变化较小。

（2）对两种连接方式，向下平移的距离相同时，即 $\theta_1 = \theta_2'$，可以推出 $F_1 < F_2$。所以前者蛛丝受到的拉力较小。

通过上述分析可知，第一种连接方式下的蛛网具有比较高的稳定性。

21.7.3　框丝、半径丝、锚定丝受力比较及力学性能

下面我们以角度为切入点，分析半径丝和框丝，框丝与半径丝之间的连接。当蜘蛛位于蜘蛛网中心时，半径丝受到一向下的拉力，半径丝拉动框丝运动，产生一个很小的偏移。

蛛网处于静力平衡态时，其半径丝和框丝的分析受力如图 21-23 所示。

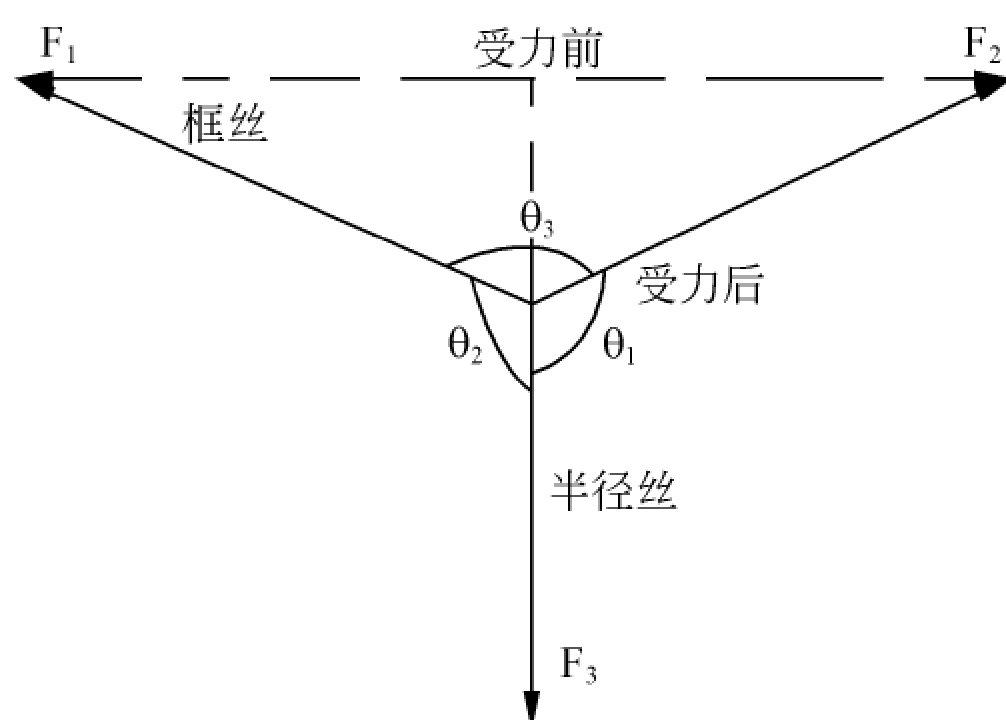


图 21-23　框丝与半径丝受力分析

根据静力平衡方程式，易得：

$$\frac{F_1}{\sin\theta_1}=\frac{F_2}{\sin\theta_2}=\frac{F_3}{\sin\theta_3}$$

因为框丝被拉处只能产生较小形变，所以 θ_3 趋近于 180°，θ_1 和 θ_2 趋近于 90°，而易知：

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3}>1\text{，}\quad\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}>1$$

所以：

$$F_1=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3}F_3>F_3\text{，}\quad F_2=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}F_3>F_3$$

可知框丝受力比半径丝受力大。

采用同样的方法，我们也可以得到框丝与锚定丝受力的大小关系。锚定丝的受力一般比框丝要大。

众多研究结果表明蜘蛛具有不同的丝腺，每一种丝腺分泌出不同种类的蛛丝，不同种类的蛛丝具有不同的力学性能。框丝、半径丝和锚定丝的性能都是有明显差异的，查阅资料可以知道锚定丝、框丝和半径丝的力学性能逐渐降低，这一顺序与三个位置上受力的大小也是一致的。由此我们可以知道丝自身的性能决定了丝所处的位置及所具备的功能，这印证了性能决定用途的客观规律。

21.8　模型的评价与推广

21.8.1　模型的评价与改进

本章一共建立了三个主要的数学模型，分别是优化模型、综合评价模型和力学模型。

1．优化模型的评价和改进

优化模型在蛛丝均相同的假设条件下把蛛网上所有蛛丝最短作为最优目标，符合实际，抓住了蛛网结构的一个重要约束条件：蛛丝用量有限。通过 lingo 计算出来的最优解

符合一定的实际，说明模型的建立具有合理性。但是此模型依旧存在缺陷。在对蛛网轮廓研究的时候我们只研究了正多边形。虽然正多边形是自然界中一种主要的蛛网形状。但是自然界中依旧存在一些其他的蛛网形状如扇形和条形，这些类型的蛛网也具有一定的研究价值。

对于优化模型的改进应该考虑上述缺陷，在研究正多边形之后继续研究其他几何体，达到对蛛网轮廓尽可能全面的概括和分析。

2．综合评价模型的评价和改进

综合评价模型在文中建立的目的是综合各方面因素对三种蛛丝密度分布的模型进行评价排序。综合评价模型的优点在于综合多项指标计算各指标的权重达到对目标的评价。指标的选取是综合评价模型中一个十分关键的问题，本章选取捕食效率和稳定性两个方面进行考虑，并创造性的定义了捕食效率的计算公式，是本章的一个亮点。综合评价模型的缺点是权重受人为主观因素的影响，所以最终计算的结果因人而异，不准确。

综合评价模型的改进要注意权重的确定。在确定权重的时候我们要充分的查阅资料，询问专家，进行调研，才能尽可能准确定权。

3．力学模型的评价和改进

力学模型抓住了两种蛛网结构的不同特点进行受力分析和比较，模型简单，易于理解。此外，通过力学模型的计算结果比较了蛛网不同位置处蛛丝受力的区别，结合不同位置蛛丝力学性能的差别，印证了性能决定用途的自然规律。本模型的缺点在于缺少定量的计算，力学模型只能分析理想简单结构的受力情况，对于复杂的结构受力分析很难通过本题中的力学模型进行求解和分析。

在改进此模型的时候要充分查找相关数据，进行定量计算，将计算结果与实际相对比，进一步说明模型的实用性。对于复杂的结构使用计算机模拟的方式进行受力研究。

21.8.2　模型的推广

优化模型的运用无处不在，在自然界千百万年的过程中，诸多生物都不断进行着变异和进化，始终都在朝着最适合自己生活的方向进行调整和改变，自然界中很多稳定和平衡都是“最优值”的体现，到处都可以看到优化模型的影子。在这一类问题的研究中优化模型意义深刻，思想简单，具有极高的应用和推广的价值。

第 22 章　太阳能小屋的设计

太阳能小屋的设计，主要考虑太阳能电池板的铺设工况，复杂的小屋，相应的约束条件就比较多，则太阳能电池板铺设就困难。然而太阳能小屋的设计，需要考虑小屋的朝向角，即满足太阳的方位角的前提下，尽可能地让阳光照在小屋屋顶上。当电池板铺设在屋顶时，需要考虑屋顶的形状和电池板的倾角，导致问题求解较困难，太阳能电池板的铺设问题则成为一个 NP 问题。本章通过计算机模拟，相应的尽可能找到一种好的铺设情况，达到最优化求解的目的。

学习目标：

（1）学习和掌握太阳辐射强度计算；

（2）掌握 MATLAB 进行大数据量模拟；

（3）掌握 MATLAB 求解太阳能电池板组合铺设优化问题等。

22.1　问 题 重 述

在设计太阳能小屋时，需在建筑物外表面（屋顶及外墙）铺设光伏电池，光伏电池组件所产生的直流电需要经过逆变器转换成 220V 交流电才能供家庭使用，并将剩余电量输入电网。不同种类的光伏电池每峰瓦的价格差别很大，且每峰瓦的实际发电效率或发电量还受诸多因素的影响，如太阳辐射强度、光线入射角、环境、建筑物所处的地理纬度、地区的气候与气象条件、安装部位及方式（贴附或架空）等。因此，在太阳能小屋的设计中，研究光伏电池在小屋外表面的优化铺设是很重要的问题。

程序文档中的附件 7 提供了相关信息。请参考本章程序文档中的附件提供的数据，对下列三个问题，分别给出小屋外表面光伏电池的铺设方案，使小屋的全年太阳能光伏发电总量尽可能大，而单位发电量的费用尽可能小，并计算出小屋光伏电池 35 年寿命期内的发电总量、经济效益（当前民用电价按 0.5 元/kWh 计算）及投资的回收年限。

在求解每个问题时，都要求配有图示，给出小屋各外表面电池组件铺设分组阵列图形及组件连接方式（串、并联）示意图，也要给出电池组件分组阵列容量及选配逆变器规格列表。

在同一表面采用两种或两种以上类型的光伏电池组件时，同一型号的电池板可串联，而不同型号的电池板不可串联。在不同表面上，即使是相同型号的电池也不能进行串、并联连接。应注意分组连接方式及逆变器的选配。

问题 1：请根据山西省大同市的气象数据，仅考虑贴附安装方式，选定光伏电池组件，对小屋（见附件 2，见程序文档）的部分外表面进行铺设，并根据电池组件分组数量和容量，选配相应的逆变器的容量和数量。

问题 2：电池板的朝向与倾角均会影响到光伏电池的工作效率，请选择架空方式安装光伏电池，重新考虑问题 1。

问题 3：根据附件 7 给出的小屋建筑要求，请为大同市重新设计一个小屋，要求画出小屋的外形图，并对所设计小屋的外表面优化铺设光伏电池，给出铺设及分组连接方式，选配逆变器，计算相应结果。

22.2　摘　　要

太阳能电池板作为再生资源日益用于家居生活，为绿色无污染能源。怎么合理的铺设太阳能电池板，成为关注的焦点。本章以山西大同市房屋使用太阳能电池板为例，合理的分析铺设太阳能电池板，在给定条件下优化太阳能电池板铺设方式。

对于问题一，首先根据大同市气象数据，由高度角和方位角计算公式得到每一天太阳运行轨迹对大同市该房屋的辐射强度影响。某一天太阳的辐射量，近似等于每时刻辐射强度值样条曲线拟合后的积分值。分析房屋东立面电池板铺设时，直接运用东立面的总辐射强度值，建立相应的电池板发电量最大优化模型，采用计算机模拟逐一查找可能组合的电池板型号，再对每一种组合里面的个案进行所有可能组合铺设，进行相关运算比较得出最优铺设方法，最终找到可靠铺设太阳能电池板的方法。东立面采用两串并联 C_3 进行铺设，35 年发电总量为 10371.2(kWh)，35 年发电经济效益为 5185.6 元，投资的回收年限为 49.811 年，选用 SN11 型逆变器。对于房屋东南顶面的计算，需要先考虑修正太阳高度角 α 和太阳方位角 A_1，后采用倾斜面简化太阳辐射强度计算公式进行分析，得出房屋东南顶面采用一串 C_3 与一串 C_5 并联的铺设方法，35 年发电总量为 29816.15（kWh），35 年发电经济效益为 14908.08 元，投资的回收年限为 31.98 年，选用 SN12 型逆变器。西面投资回收年限为 39.9 年，南面投资回收年限为 36.6 年，北面投资回收年限为 88.5 年。

问题二，电池板的朝向和倾角影响太阳在倾斜面的辐射强度，根据倾斜面的辐射强度公式，建立年太阳辐射强度最大优化模型，由计算机搜索求解出最适宜朝向角是南偏西 15°，电池板倾角为 $\beta' = 40^{\circ}$。根据朝向角和倾角重新计算倾斜面的太阳辐射强度，得到采用 6 串 C_2 和 8 串 C_8 并联后发电量最大，35 年发电总量为 138196.1（kWh），35 年发电经济效益为 69098.05 元，投资的回收年限为 16.0103 年，选用 SN6 型逆变器。

由问题三可知，在进行自行设计小屋时，首先应满足问题二优化房屋模型，保证房屋坐落时南偏西 $15°$，屋顶倾角为 $40°$。由问题一与问题二可知，大同市该处房屋铺设太阳能电池板，主要依靠东南顶面铺设电池板，且发电量最大时，投资回收年限较短，投资效率较高。在问题三中设计房屋模型时，填补东南顶面的缺失部分，且在约束条件下，最大限度的让外墙面接受太阳电辐射强度能量发电。据此建立以房屋接受太阳辐射强度最大值为目标的优化模型，从中找到一组可行边界解。当正南面房屋净空高度距地面高度为 2.8m，建筑最高点高度为 5.4m 时，此时东南顶面接受太阳辐射热的面积最大。得到采用 11 串并联 C_{10} 后，其发电量最大，35 年发电总量为 95350.2（kWh），35 年发电经济效益为 47675.1 元，投资的回收年限为 15.8609 年，选用 SN5 型逆变器。从结果可知，此房屋模型缩短了投资回收年限，故设计合理。

关键词：辐射强度、曲线拟合、计算机模拟、组合铺设、优化模型、边界可行解。

22.3　问 题 分 析

22.3.1　问题一的分析

对于问题一，首先根据大同市气象数据，由高度角和方位角计算公式得到每一天太阳运行轨迹对大同市该房屋的辐射强度影响。分析房屋东立面电池板铺设时，直接运用东立面的总辐射强度值，建立相应的电池板发电量最大优化模型，采用计算机模拟逐一查找可能组合的电池板型号，再对每一种组合里面的个案进行所有可能组合铺设，进行相关运算比较得出最优铺设方法，最终找到可靠铺设太阳能电池板的方法。对于房屋东南顶面的计算，需要先考虑修正太阳高度角 α 和太阳方位角 A_1，后采用倾斜面简化太阳辐射强度计算公式进行分析，得出房屋东南顶面的最优铺设方法，其思路如图 22-1 所示。

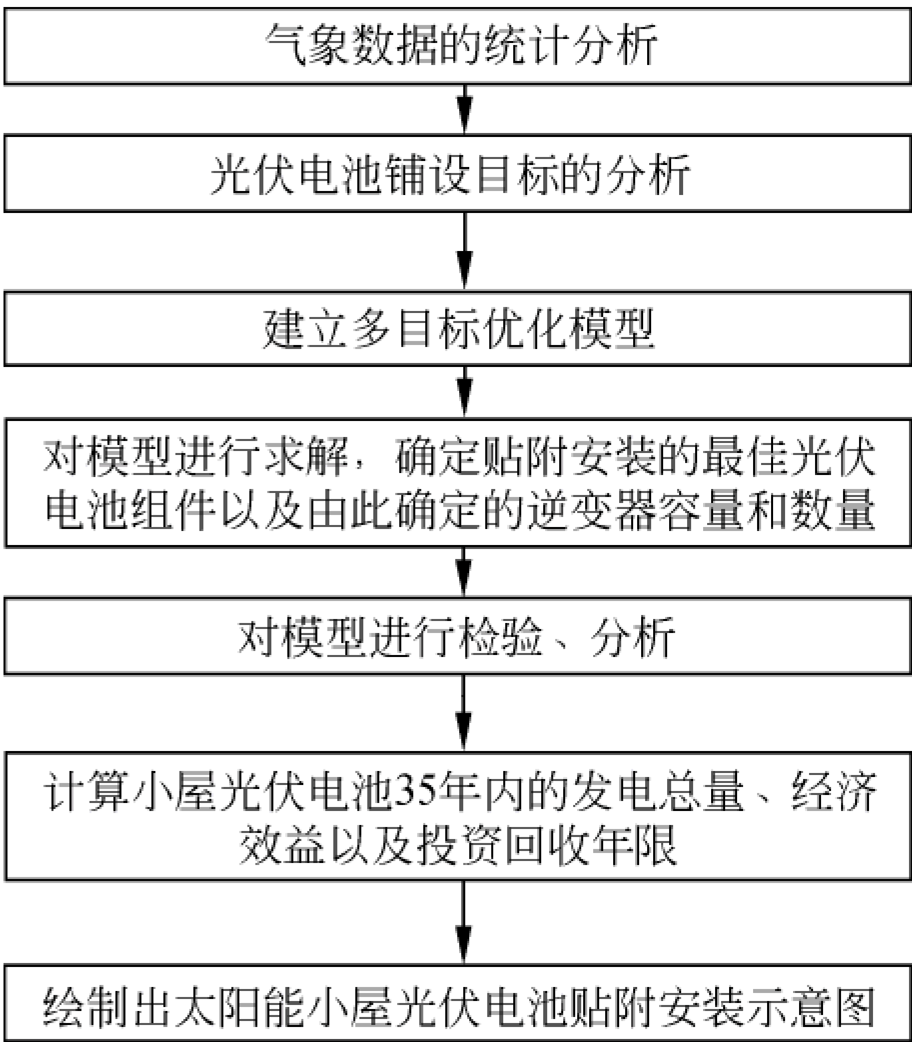


图 22-1　问题一的解答思路

22.3.2　问题二的分析

问题二，电池板的朝向和倾角影响太阳在倾斜面的辐射强度，根据倾斜面的辐射强度公式，建立年太阳辐射强度最大优化模型，由计算机搜索求解出最适宜朝向角和电池板倾角。根据朝向角和倾角重新计算倾斜面的太阳辐射强度，得到太阳能电池板铺设方式及逆变器型号。

22.3.3　问题三的分析

在进行自行设计小屋时，首先应满足问题二优化房屋模型，保证房屋朝向角和屋顶倾

角。在问题三中设计房屋模型时，在约束条件下，应最大限度的让外墙面接受太阳电辐射强度能量发电。据此建立以房屋接受太阳辐射强度最大值为目标的优化模型，从中找到一组可行解。

22.4 模 型 假 设

（1）假设文中气象数据及各参数值来源可靠；
（2）假设附件 6 中所给的辐射强度是在一个小时内的平均辐射强度；
（3）假设地球的自转速度是匀速的；
（4）假设地球是球形的；
（5）假设太阳光线各向同性；
（6）假设大同市在中午 12 点时太阳方位角为 180 度；
（7）假设房屋建筑门窗大小尺寸与题中给出的门窗数据相同。

22.5 符 号 说 明

符　　号	意　　义
x_{1i}, x_{2j}, x_{3k} $(i=1\cdots6; j=1\cdots7; k=1\cdots11)$	不同类型的光伏电池组件
u_{di}, u_{dj}, u_{dk} $(i=1\cdots6; j=1\cdots7; k=1\cdots11)$	不同类型的光伏电池组件所对应的电压值
u_i	逆变器的端电压下限值
u_b	逆变器的端电压上限值
q_{1i}, q_{1j}, q_{1k} $(i=1\cdots6; j=1\cdots7; k=1\cdots11)$	太阳辐射强度
p_b	逆变器的额定功率
w_{1i}, w_{2j}, w_{3k} $(i=1\cdots6; j=1\cdots7; k=1\cdots11)$	不同型号光伏电池组件的长度

22.6 问 题 一

22.6.1 问题一的分析

由题目所知，光伏电池每峰瓦（Wp）实际发电效率与电池种类、太阳辐射强度和光线入射角等多种因素有关，且其连接方式决定着逆变器的型号。本章将光伏电池相关因素和相应逆变器作为建立模型的约束条件，再结合目标建立本问题的优化模型。

（1）小屋的立体图，如图 22-2 所示。

（2）太阳方位角(A)。太阳方位角是太阳在方位上的角度，对辐射强度起着决定作用。查相关文献可得，如图 22-3 所示。

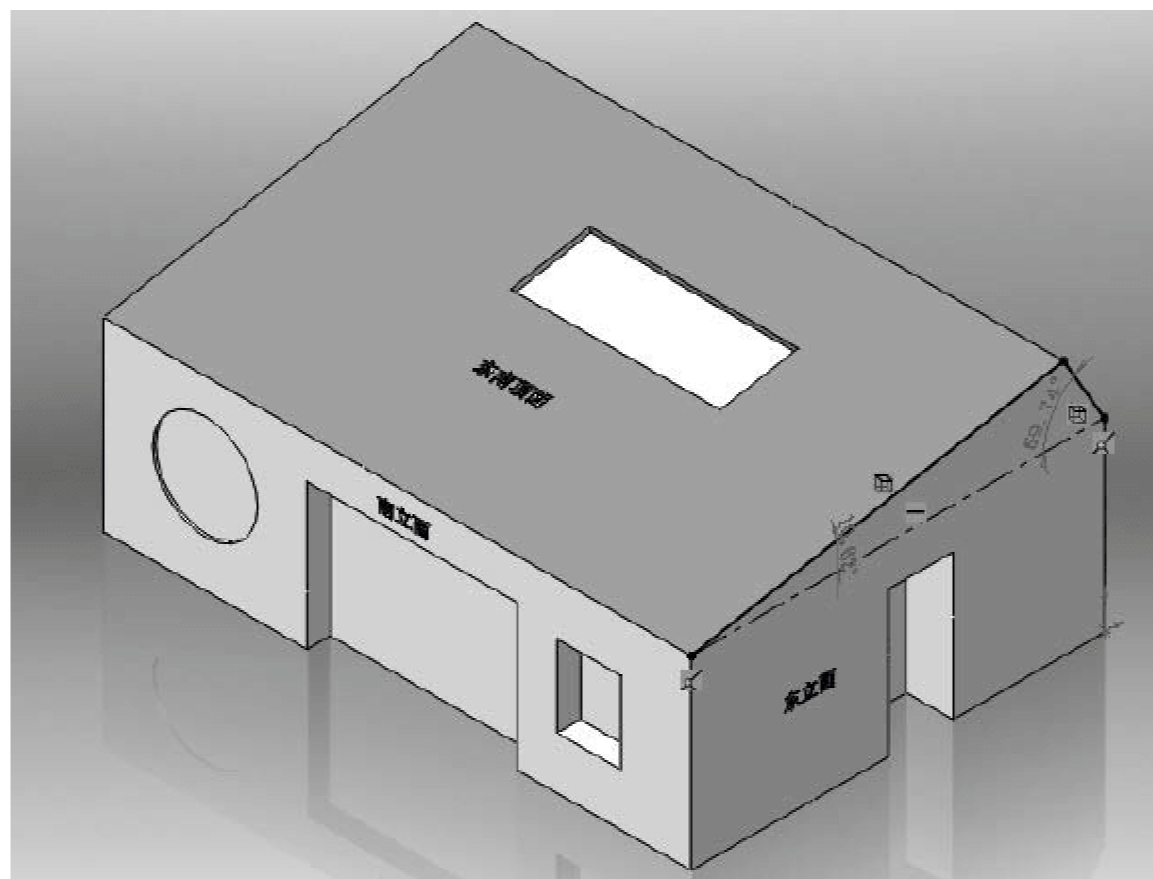


图 22-2　小屋的立体图形

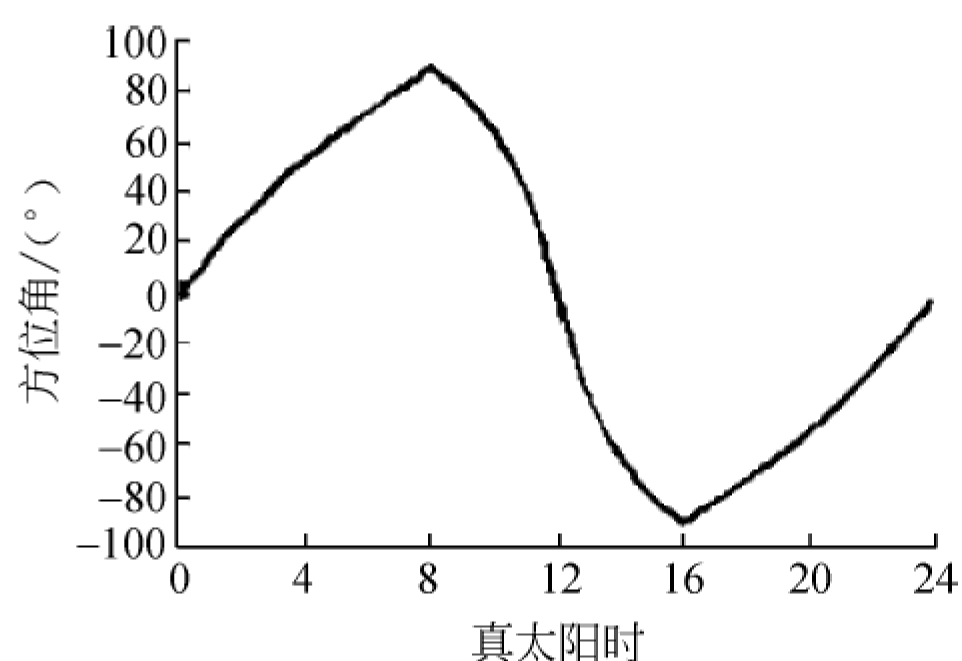


图 22-3　太阳的方位角

当与太阳的实际运行趋势相一致时，太阳方位角取值必须满足两个原则，即对应于以 24h 为周期的时间标尺，太阳运行的方位角必须保持正向增加或负向减小的变化趋势，为叙述简便，将此原则称为条件（一）。同时，太阳方位角连续变化，不存在跳跃，称为条件（二）。

由此可以确定，在真太阳时 0 时，A_1是A的解。以图 22-3 为例说明后续的取值方法。图中，在曲线出现的第一个拐点以前，A_1满足条件（一）的要求。因此，在这一段，取A_1作为A的解。在第一个拐点以后，A_1不再满足条件（一）的要求。

因此计算和选择正确的太阳方位角(A)具有必要性，依照附件 6 所给的公式，计算相应方位角并修正，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load yiyue1.mat
i=1;
for t=7:1:17
    w1=15*(t-12);
    w=-w1*2*pi/360;                           %时角弧度
    delta= sin(2*pi*285/365)*23.45*2*pi/360;%赤纬角弧度
    fai=40.1*2*pi/360;                        %大同纬度弧度
    sina=sin(fai)*sin(delta)+cos(fai)*cos(delta)*cos(w);
    alpha(i)=asin(sina)*360/2/pi;             %太阳高度角
    %方法一
    sinA1(i)=-sin(w)*cos(delta)/cos(alpha(i));
    A1(i)=asin(sinA1(i))*360/2/pi;            %太阳方位角度
    %方法二
    cosA2(i)=(sin(delta)*cos(fai)-cos(w)*cos(delta)*sin(fai))/cos(alpha(i));
    A2(i)=acos(cosA2(i))*360/2/pi;            %太阳方位角度
    %方法三
    cosA3(i)=(sin(delta)-sin(alpha(i))*sin(fai))/cos(alpha(i))/cos(fai);
    A3(i)=acos(cosA3(i))*360/2/pi;            %太阳方位角度
    i=i+1;
end
```

```
n=size(yiyue1);
for i=1:n(1,1)
    x=yiyue1(i,1);y=yiyue1(i,2);z=yiyue1(i,3);
    tanalpha1=(x-y)/(z);
    alpha1(i)=atan(tanalpha1)*360/2/pi;         %验算太阳高度角度
end
%修正太阳方位角
cosA21=A2(1,1);
cosA20=180;
cosA22=360-cosA21;
cosA210=(cosA20-cosA21)/(6-1);
cosA202=(cosA22-cosA20)/(n(1,1)-6);
for i=1:(6-1)
    xzA1(i)=cosA21+cosA210*(i-1);
    xzcosA1(i)=cos(xzA1(i)*2*pi/360);
end
for i=(6-1):n(1,1)
    xzA1(i)=cosA21+cosA202*(i-1);
    xzcosA1(i)=cos(xzA1(i)*2*pi/360);
end
```

运行程序，整理结果如表 22-1 所示。

表 22-1　太阳方位角

时刻	时角	高度角	修正高度角	方位角 $\cos A_1$	修正方位角 $\cos A_1$	修正方位角 A_1
7	-75	-3.990	0.000	0.684	-0.691	133.777
8	-60	5.752	5.752	-0.691	-0.798	143.022
9	-45	14.243	14.243	6.775	-0.884	152.266
10	-30	20.973	20.973	1.548	-0.948	161.511
11	-15	25.357	25.357	-0.894	-0.987	170.755
12	0	26.888	26.888	4.853	-1.000	180.000
13	15	25.357	25.357	-0.894	-0.987	189.245
14	30	20.973	20.973	1.548	-0.948	198.489
15	45	14.243	14.243	6.775	-0.884	207.734
16	60	5.752	5.752	-0.69	-0.798	216.978
17	75	-3.990	0.000	0.684	-0.691	226.223

（注：由上述可知，太阳方位角修正应满足下列条件。

$$\cos A_1(7)=-0.691,\quad \cos A_1(12)=-1,\quad \cos A_1(17)=-0.691$$

设 $x_1=-0.691$，$x_6=-1$，$x_{11}=-0.691$，由均匀插值公式可得：

$$x_i=x_1+\frac{x_6\text{-}x_1}{6\text{-}1}\times(i\text{-}1)\quad(i=1\cdots10)$$

可得表 22-1 修正方位角 $\cos A_1$ 及 A_1。）

（3）太阳光照射方向。对附件 4（见程序文档）大同气象数据进行整理，整理结果部分如表 22-2 所示。

表 22-2　太阳的辐射强度

日期	时刻	小时	水平面散射辐射强度 W/m^2	西向总辐射强度 W/m^2	北向总辐射强度 W/m^2
1 月 1 日	8	8	11.11	5.56	5.56
1 月 1 日	9	9	78.01	39.00	39.00

续表

日期	时刻	小时	水平面散射辐射强度 W/m^2	西向总辐射强度 W/m^2	北向总辐射强度 W/m^2
1 月 1 日	10	10	97.39	48.69	48.69
1 月 1 日	11	11	113.63	56.82	56.82
1 月 1 日	12	12	143.37	71.68	71.68
1 月 1 日	13	13	74.69	37.35	37.35
1 月 1 日	14	14	90.45	45.22	45.22
1 月 1 日	15	15	73.91	36.95	36.95
1 月 1 日	16	16	40.44	20.22	20.22
1 月 1 日	17	17	0.00	0.00	0.00

从表 22-2 中分析可知，太阳照射方向如图 22-4 所示。

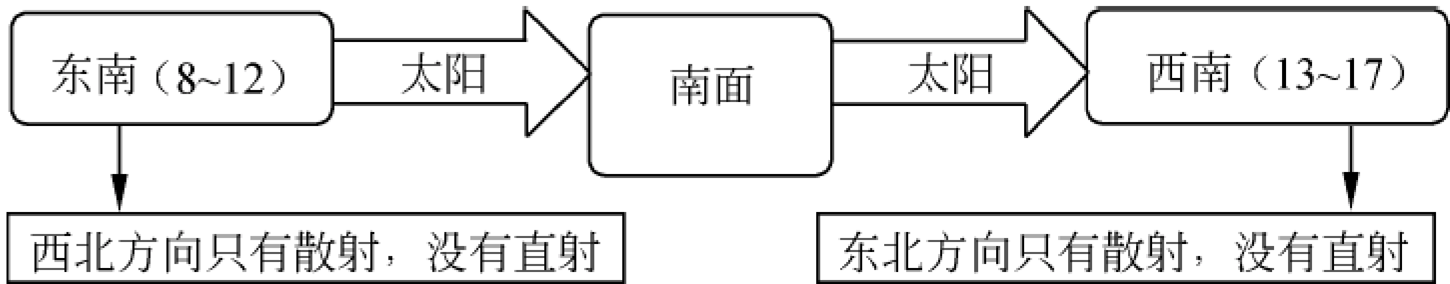


图 22-4 太阳的照射转变过程

从表 22-2 中可以看出，水平面的散射辐射强度等于背离太阳两面的辐射强度总和。

22.6.2 问题一模型的建立

问题要求对小屋的部分外表面进行铺设，给定小屋有四个侧面和一个顶面，为尽可能多考虑和研究不同的情况，本章选取具有代表性的东立面与东南顶面为例建立模型。

1. 东立面

（1）利用附件 2 所给出的东立面示意图，建立相应坐标，如图 22-5 所示。

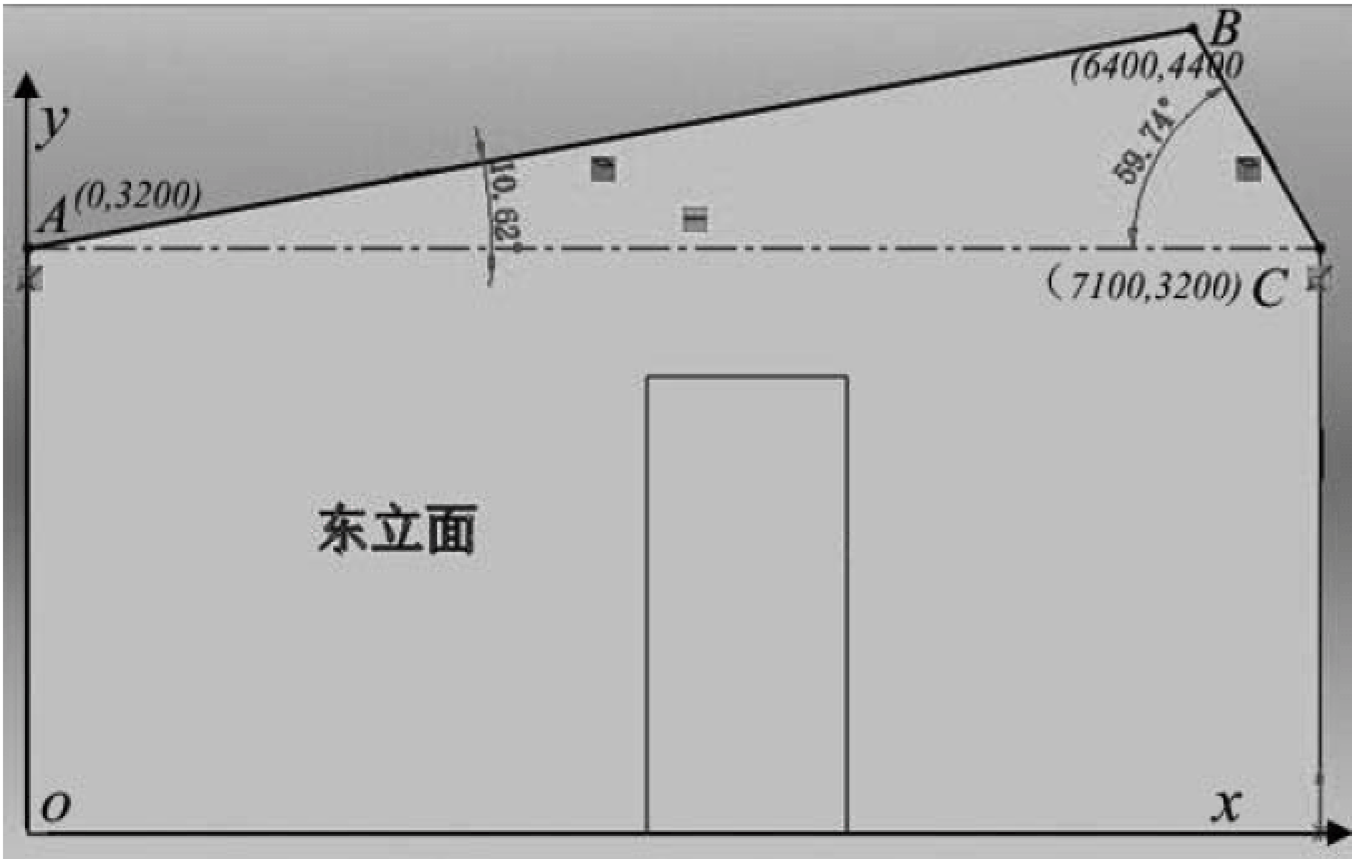


图 22-5 小屋东面的平面图

易知，直线 AB 方程，l_{AB}:$y_{AB}=0.1875x_{AB}+3200$；

直线 BC 方程，l_{BC}:$y_{BC}=-1.7143x_{BC}+15371$。

（2）光伏电池和相应逆变器间的约束方程

光伏分组阵列的端电压应满足逆变器直流输入电压范围，当电压低于其范围下限时，逆变器将停止运行。此时光伏发电系统不输出电力，即认为系统不能发电，有：

$$\begin{aligned} x_{1i}\cdot u_{di} &\geqslant u_l \quad (i=1\cdots 6) \\ x_{2j}\cdot u_{dj} &\geqslant u_l \quad (j=1\cdots 7) \\ x_{3k}\cdot u_{dk} &\geqslant u_l \quad (k=1\cdots 11) \end{aligned} \tag{22.1}$$

式中 u_l 为逆变器的端电压下限值 (Voc)。

为简化计算，在此可通过电池表面太阳光辐照阈值（光伏电池组件启动发电时其表面所应接受到的最低辐射量限值，单晶硅和多晶硅电池启动发电的表面总辐射量≥80W/m^2、薄膜电池表面总辐射量≥30W/m^2）进行判断，则有：

$$\begin{aligned} q_{1i} &\geqslant 80 \quad (i=1\cdots 6) \\ q_{2j} &\geqslant 80 \quad (j=1\cdots 7) \\ q_{3k} &\geqslant 30 \quad (k=1\cdots 11) \end{aligned} \tag{22.2}$$

q_{1i}、q_{2j} 和 q_{3k} 为太阳总辐射强度 $(\mathrm{W/m^2})$。

（3）太阳日照辐射强度计算

选取 1 月 1 日的倾斜面辐射强度进行分析，如图 22-6 所示。

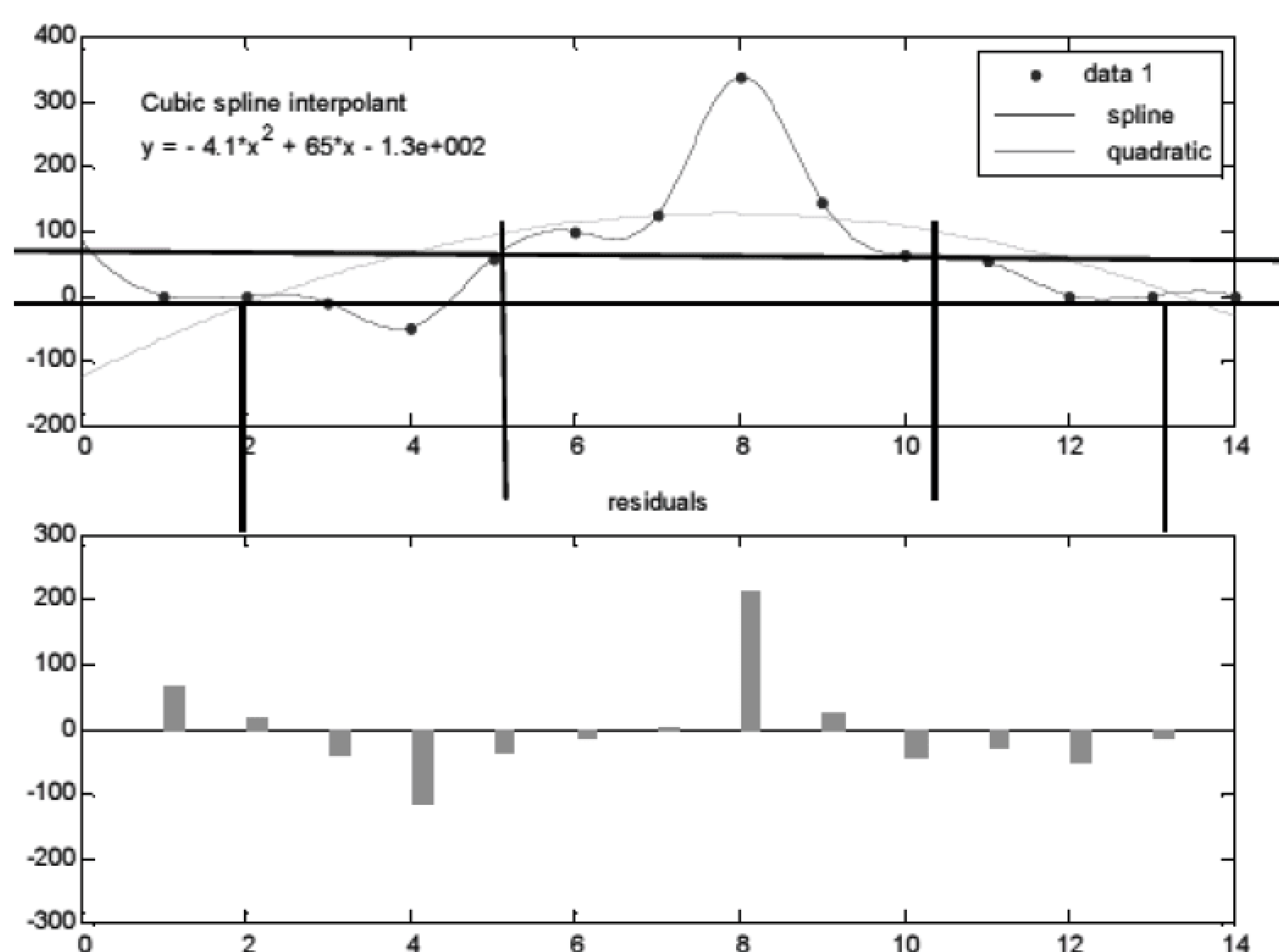


图 22-6　日照强度分布图

图 22-6 所示为 1 月 1 日全天的辐射强度拟合图。为计算每天的辐射强度，受电池表面太阳光辐照阈值的影响，需等效处理，采用积分计算方法较难，在此采用二次曲线拟合，进行面积的等效处理，于是将 $30\,\mathrm{W/m^2}$ 和 $80\,\mathrm{W/m^2}$ 的地方进行标示，在曲线以下的部分的面积表示其辐射强度。我们解得当辐射强度大于 $80\,\mathrm{W/m^2}$ 时，其曲线以下的面积为 $175244\,\mathrm{W/m^2}$，而当辐射强度大于 $30\,\mathrm{W/m^2}$ 时，解得其曲线以下的面积为 $183600\,\mathrm{W/m^2}$。

通过每一型号电池板成行铺设一行，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load fulu3.mat
load fulu4.mat
n0=size(fulu3);
for i=1:n0(1,1)
    n1(i,1)=floor((3400)/fulu3(i,2))+floor(2600/fulu3(i,2));
                                                    %铺设各型号电池的数量
    p(i,1)=fulu3(i,1)*n1(i,1);                      %铺设该型号电池的总组件功率
    u(i,1)=fulu3(i,5)*n1(i,1);                      %铺设该型号电池的开路总电压
    s(i,1)=fulu3(i,2)*fulu3(i,3)*10^(-6)*n1(i,1);   %铺设该型号电池的总面积
    S1(i,1)=n1(i,1);S1(i,2)=p(i,1);S1(i,3)=u(i,1);S1(i,4)=s(i,1);
end
n2=size(fulu4);  % 矩阵维数计算
fadl(:,n2(1,1))=[0];
fadl=fadl';      % 转置
Fadl(:,n0(1,1))=[0]';
Fadl=Fadl';     % 转置
for j=1:6                % A 型单晶硅
    for i=1:n2(1,1)
        if fulu4(i,4)<200
           %单晶硅和多晶硅电池启动发电的表面总辐射量≥80W/m2、薄膜电池表面总辐射量≥
           30W/m2)
            fadl(i,j)=fulu4(i,4)*fulu3(j,7)*0.05;
            if fadl(i,j)*S1(j,4)<80
                fadl(i,j)=0;
            end
        else
            fadl(i,j)=fulu4(i,4)*fulu3(j,7);
            if fadl(i,j)*S1(j,4)<80
                fadl(i,j)=0;
            end
        end
    end
     Fadl(j,1)=sum(fadl(:,j));
     Fadl(j,1)=Fadl(j,1)*S1(j,4);                          %总发电量
end
for j=7:13                   % BC 型电池
    for i=1:n2(1,1)
        fadl(i,j)=fulu4(i,4)*fulu3(j,7);
        if fadl(i,j)*S1(j,4)<80
             fadl(i,j)=0;
        end
    end
     Fadl(j,1)=sum(fadl(:,j));
     Fadl(j,1)=Fadl(j,1)*S1(j,4);                          %总发电量
end
for j=14:n0(1,1)                                           %BC 型电池
    for i=1:n2(1,1)
        fadl(i,j)=fulu4(i,4)*fulu3(j,7);
        if fadl(i,j)*S1(j,4)<30
             fadl(i,j)=0;
        end
    end
     Fadl(j,1)=sum(fadl(:,j));
     Fadl(j,1)=Fadl(j,1)*S1(j,4);                          %总发电量
end
```

```
n3=size(fadl);
for j=1:6
   Fadff(j,1)=14.9*S1(j,2);                              %总发电量费用
end
for j=7:13
   Fadff(j,1)=12.5*S1(j,2);     %总发电量费用
end
for j=14:n3(1,2)
   Fadff(j,1)=4.8*S1(j,2);      %总发电量费用
end
```

运行程序，整理结果得表 22-3 所示参数。

表 22-3　不同类型的电池的发电量

单行电池	电池数 n	组件总功率 p_s(W)	开路总电压 u_d(Voc)	全年发电量 (w·h)	全年发电量 p_q(kwh)	成本费 f_s(元)
A1	3	645	138.30	260201.82	260.20	9610.50
A2	2	650	93.82	260258.16	260.26	9685.00
A3	3	600	138.30	288941.45	288.94	8940.00
A4	3	810	114.30	327071.33	327.07	12069.00
A5	3	735	113.19	296462.11	296.46	10951.50
A6	2	590	91.84	236328.17	236.33	8791.00
B1	3	795	113.73	392062.60	392.06	9937.50
B2	2	640	91.96	295591.44	295.59	8000.00
B3	3	630	100.80	337453.50	337.45	7875.00
B4	3	720	110.70	348044.22	348.04	9000.00
B5	2	560	89.60	285961.37	285.96	7000.00
B6	2	590	90.20	268642.21	268.64	7375.00
B7	3	750	113.49	365169.58	365.17	9375.00
C1	4	400	552.00	211601.09	211.60	1920.00
C2	3	174	186.90	73789.16	73.79	835.20
C3	3	300	297.00	148163.54	148.16	1440.00
C4	3	270	346.20	129942.32	129.94	1296.00
C5	3	300	300.00	148016.61	148.02	1440.00
C6	18	72	480.60	10294.20	10.29	345.60
C7	9	36	113.40	32.46	0.03	172.80
C8	9	72	240.30	10295.57	10.30	345.60
C9	5	60	133.50	3596.68	3.60	288.00
C10	7	84	186.90	17769.98	17.77	403.20
C11	3	150	165.00	60530.40	60.53	720.00

设逆变器的额定功率为 p_b (W)，逆变器的端电压上限为 u_b (Voc)，端电压下限为 u_l (Voc)，逆变器的价格 p_{rb} (元)。

① 光伏阵列的最大功率不能超过逆变器的额定容量：

$$\begin{aligned} x_{1i}\cdot p_s &\leqslant p_b \quad (i=1\cdots 6) \\ x_{2j}\cdot p_s &\leqslant p_b \quad (j=1\cdots 7) \\ x_{3k}\cdot p_s &\leqslant p_b \quad (k=1\cdots 11) \end{aligned} \tag{22.3}$$

② 多个光伏组件串联后可以再进行并联，并联的光伏组件端电压相差不应超过 10%，有：

$$0.9 \cdot x_j \leqslant x_i \leqslant 1.1 \cdot x_j \quad (i = 1 \cdots 24)(j = 1 \cdots 24) \tag{22.4}$$

根据上述的约束条件，利用计算机搜索得到各个组合，进行枚举法，将每行每一型号电池板分组铺设，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load biao3.mat
%全部一行并联铺设
n0=size(biao3);
k=1;m=1;
for i=1:(n0(1,1)-1)
    yh(i,m)=biao3(i,3);
    hangh(i,k)=i;
    for j=(i+1):n0(1,1)
        %多个光伏组件串联后可以再进行并联，并联的光伏组件端电压相差不应超过 10%
        if abs(biao3(j,3)-biao3(i,3))/biao3(j,3)<=0.1||abs(biao3(j,3)-
        biao3(i,3))/biao3(i,3)<=0.1
            k=k+1;
            m=m+1;
            yh(i,m)=biao3(j,3);
            hangh(i,k)=j;
        end
    end
    m=m+1;
end
n1=size(hangh);
k=1;l=1;
for i=1:n1(1,1)
    for j=1:n1(1,2)
        if hangh(i,j)~=0
            jianhhangh(i,l)=hangh(i,j);
            l=l+1;
        end
    end
end
```

运行程序，整理结果如表 22-4 所示。

表 22-4　每行每一型号电池板按分组铺设的排列情况

方案	每行每一型号电池板按分组铺设（并联的光伏组件端电压相差不应超过 10%）					
第一种	1（A1）	3（A3）	22（C9）			
第二种	2（A2）	6（A6）	8（B2）	9（B3）	11（B5）	12（B6）
第三种	4（A4）	5（A5）	7（B1）	10（B4）	13（B7）	20（C7）
第四种	9（B3）	10（B4）				
第五种	15（C2）	23（C10）				
第六种	16（C3）	18（C5）				

③ 由于各类型太阳能电池板都是成行成行的铺设，故在长度方向上，满足题目要求，而高度方向上则需满足：

$$\sum_{i=1}^{6} w_{1i} \cdot x_{1i} + \sum_{j=1}^{7} w_{2j} \cdot x_{2j} + \sum_{k=1}^{11} w_{3k} \cdot x_{3k} \leqslant 3.2 \tag{22.5}$$

目标函数：小屋的全年太阳能光伏发电总量尽可能大，而单位发电量的费用尽可能小。

$$\max: \quad W = p_{qi}x_{1i} + p_{qj}x_{2j} + p_{qk}x_{3k} - f_{sk} \quad (k = 1 \cdots 18) \tag{22.6}$$

建立模型得：

$$\begin{cases} \max: \quad W = p_{qi}x_{1i} + p_{qj}x_{2j} + p_{qk}x_{3k} - f_{sk} \\ s.t. \\ \sum_{i=1}^{6} w_{1i} \cdot x_{1i} + \sum_{j=1}^{7} w_{2j} \cdot x_{2j} + \sum_{k=1}^{11} w_{3k} \cdot x_{3k} \leqslant 3.2 \\ x_{1i} \cdot p_s \leqslant p_b, \quad x_{2j} \cdot p_s \leqslant p_b, \quad x_{3k} \cdot p_s \leqslant p_b \\ x_{1i} \geqslant 0, \quad x_{2j} \geqslant 0, \quad x_{3k} \geqslant 0 \\ (i = 1 \cdots 6)(j = 1 \cdots 7)(k = 1 \cdots 11)(k = 1 \cdots 18) \end{cases} \tag{22.7}$$

2. 东南顶面

（1）东南顶面立体模型

利用附件 2（见程序文档）中所给的小屋图形，绘出东南顶面的立体图，如图 22-7 所示。

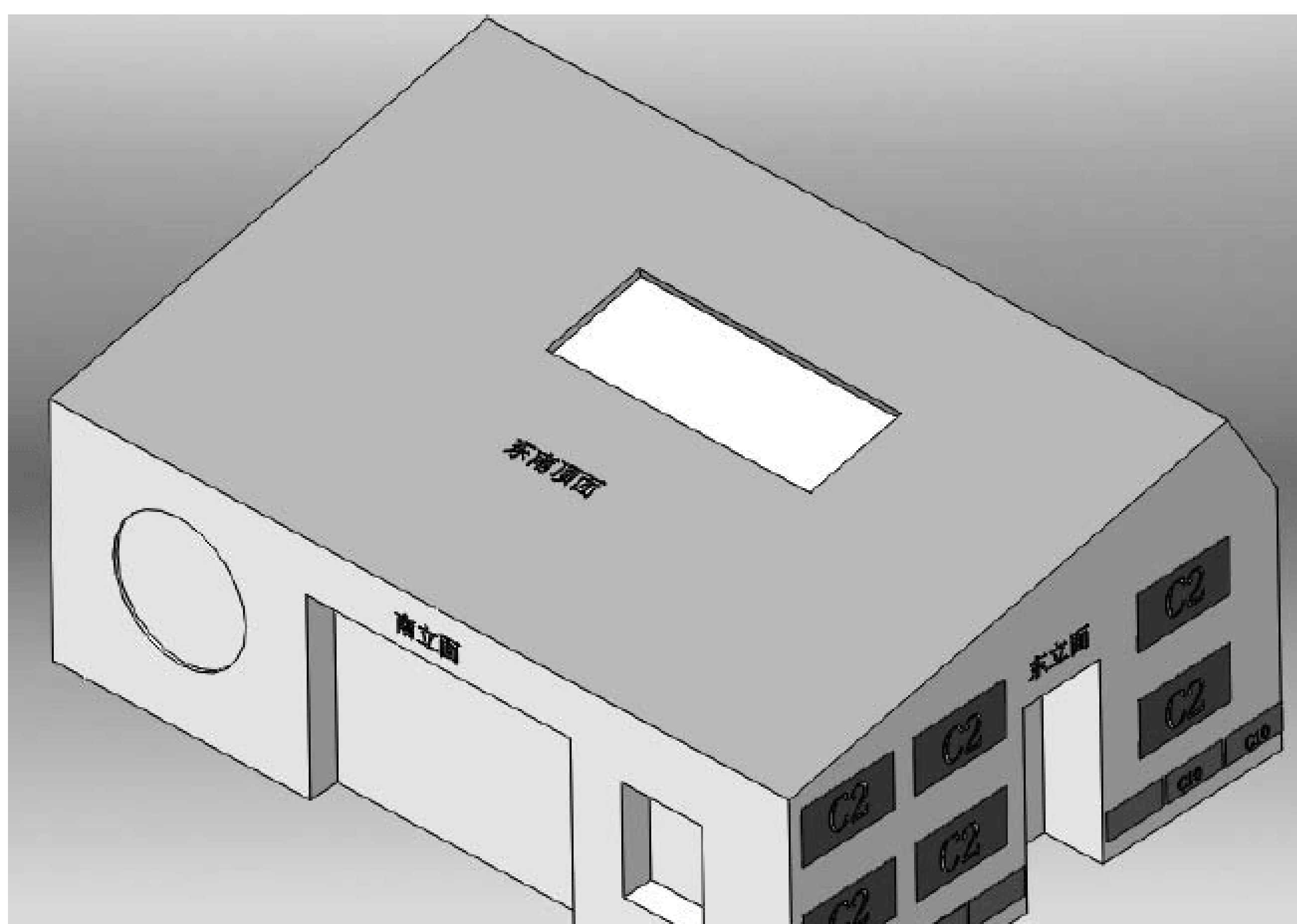


图 22-7　东南顶面的立体图

（2）倾斜面上的太阳直接辐射通量的计算

大地表面（即水平面）和太阳电池方阵面（即倾斜面）上所接收到的辐射量均符合直散分离原理，即总辐射等于直接辐射与散射辐射之和，图 22-8 所示为屋顶受太阳辐射简图。

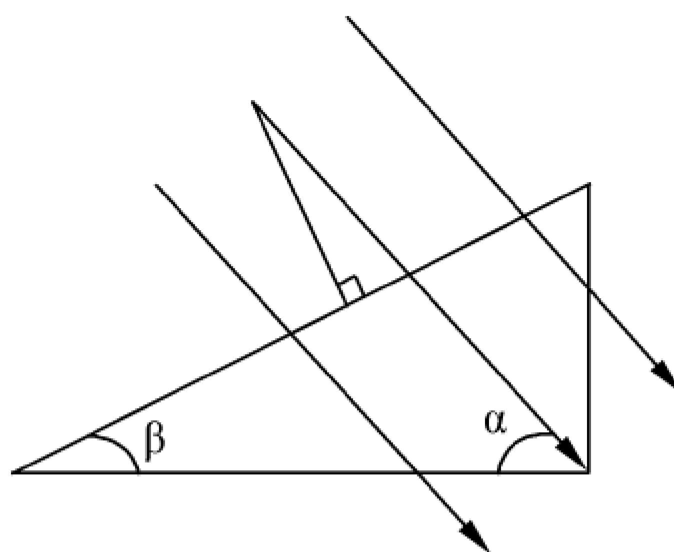


图 22-8　太阳光线入射图

假定散射辐射和地面反射都是各向同性的，水平面上太阳辐射量：

$$Q_p = S_p + D_p \tag{22.8}$$

式中：Q_p——水平面总的太阳辐射量，单位为 kWh/m^2。

S_p——水平面直射辐射量，单位为 kWh/m^2。

D_p——水平面散射辐射量，单位为 kWh/m^2。

倾斜面上的太阳辐射量：

$$Q_T = S_T + D_T + R_T$$

式中，Q_T——倾斜面总的太阳辐射量，单位为 kWh/m^2。

S_T——倾斜面直射辐射量，单位为 kWh/m^2。

D_T——水平面散射辐射量，单位为 kWh/m^2。

R_T——倾斜面反射辐射量，单位为 kWh/m^2。

① 倾斜面上的散射辐射量

太阳电池方阵接收到的散射辐射 D_T:

$$D_T = 2\int_{\omega_\alpha=0}^{0} D_T' d\omega = 2\int_{\omega_\alpha=0}^{0} D_p'(1+\cos Z')/2d\omega \tag{22.9}$$

将其简化为散射辐射各向同性：

$$D_T = \frac{1}{2}\left(Q_p\text{-}S_p\right)\left(1+\cos\beta\right) \tag{22.10}$$

② 倾斜面上的反射辐射：

$$R_T = 2\int_{\omega_\alpha=0}^{0} R_T' d\omega = 2\int_{\omega_\alpha=0}^{0} \rho Q_p'(1+\cos Z')/2d\omega \tag{22.11}$$

我们将其简化，其结果为：

$$R_T = \frac{1}{2}\rho_R Q_p\left(1\text{-}\cos\beta\right) \tag{22.12}$$

其中，ρ_R 为地面反射率，$\rho_R = 0.2$，Z' 为太阳电池方阵任一时刻的倾角。

小屋的全年太阳能光伏发电总量尽可能大，而单位发电量的费用尽可能小，有目标函数：

$$\max:\quad W = p_{qi}x_{1i} + p_{qj}x_{2j} + p_{qk}x_{3k}\text{-}f_s \tag{22.13}$$

建立模型得：

$$\begin{cases} \max:\quad W = \sum_{i=1}^{6} p_{qi}x_{1i} + \sum_{j=1}^{7} p_{qj}x_{2j} + \sum_{k=1}^{11} p_{qk}x_{3k}\text{-}f_s \\ \sum_{i=1}^{6} w_{1i}\cdot x_{1i} + \sum_{j=1}^{7} w_{2j}\cdot x_{2j} + \sum_{k=1}^{11} w_{3k}\cdot x_{3k} \leqslant 3.2 \\ 0.9\cdot x_{2j}\cdot u_{dj} \leqslant x_{1i}\cdot u_{di} \leqslant 1.1\cdot x_{2j}\cdot u_{dj} \\ 0.9\cdot x_{3k}\cdot u_{dk} \leqslant x_{1i}\cdot u_{di} \leqslant 1.1\cdot x_{3k}\cdot u_{dk} \\ 0.9\cdot x_{3k}\cdot u_{dk} \leqslant x_{2j}\cdot u_{dj} \leqslant 1.1\cdot x_{3k}\cdot u_{dk} \\ x_{1i}\cdot p_s \leqslant p_b,\quad x_{2j}\cdot p_s \leqslant p_b,\quad x_{3k}\cdot p_s \leqslant p_b \\ x_{1i} \geqslant 0,\quad x_{2j} \geqslant 0,\quad x_{3k} \geqslant 0 \\ (i=1\cdots6)(j=1\cdots7)(k=1\cdots11) \end{cases} \tag{22.14}$$

22.6.3　问题一模型的求解

1．东立面

用计算机模拟组合的结果，将不同型号的电池进行铺设，求得全年发电量和单位发电费用，如表 22-5 所示。

表 22-5　不同型号电池的发电量和单位发电费用

铺 设 型 号	全年发电量	发 电 量 费	逆变器价格
A5	3761.52	115326	35000
A6	2847	87910	22000
C3	1704.44	13440	15000
C5	1703.12	13440	15000
……	……	……	……
C11	1054.74	8640	10200
B1B1B7	3802.32	78375	22000
B6B6C7	3595.9	74671.6	22000
……	……	……	……
C3C5	851.89	6720	6900
C3C3C5	1704.11	13440	15000
C3C5C5	1703.45	13440	15000
C10C11	976.72	8524.8	10200
……	……	……	……
B3B4C7C7	1789.66	36207.6	15000

注：C3C5 表示该东面由 C3 和 C5 铺设而成，各在横向铺设一串后并联；
C3C5C5 表示 C5 在横向上铺设一串，剩下全由 C3 在横向来铺设完成。

根据表 22-5 优化求解得到铺设 C3 电池时盈利年限最早，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load pusheshuju.mat
n=size(youhuaiqujie);
a=youhuaiqujie;
for i=1:n(1,1)
    ns(i,1)=(a(i,2)+a(i,3))/(a(i,1)*0.5);
end
fast=min(ns);
k=1;
for i=1:n(1,1)
    if ns(i,1)==fast;
        b(k,1)=i;
        k=k+1;
    end
end
```

运行程序，整理输出结果，得到铺设 C3 电池时盈利年限最早，C3 的发电量及单位发电费如表 22-6 所示。

表 22-6　C3 电池的发电量和单位发电费用

单行电池	电池数 n	组件总功率 p_s(W)	开路总电压 u_d(Voc)	全年发电量 (W·h)	全年发电量 p_q(kWh)	全年发电量费用 f_s(元)
C3	3	300	297.00	148163.54	148.16	1440.00

根据 C3 在东立面的铺设，我们根据其额定电压及额定功率选配相应的逆变器，根据附件 5 得到逆变器的参数，如表 22-7 所示。

表 22-7　逆变器的参数

<table>
<tr><th colspan="9">逆变器参数及价格表</th></tr>
<tr><th rowspan="2">型号</th><th colspan="4">直流输入</th><th colspan="3">交流输出</th><th rowspan="2">参考价格（元/台）</th></tr>
<tr><th>额定电压（V）</th><th>额定电流（A）</th><th colspan="2">允许输入电压范围（V）</th><th>额定电压/频率（V/Hz）</th><th>额定电流（A）</th><th>额定功率（KW）</th></tr>
<tr><td>SN11</td><td>DC220</td><td>5</td><td>180</td><td>300</td><td>AC220/50</td><td>4.5</td><td>0.8</td><td>4500</td></tr>
</table>

则求得 C3 电池组件的全年发电量和发电费用以及 35 年寿命期内的发电总量、经济效益及回收年限，如表 22-8 和表 22-9 所示。

表 22-8　C3 电池板全年发电量及发电费用

铺设型号	全年发电量 p_q(kWh)	发电量费 f_s(元)	逆变器价格 p_{rb}(元)
C3	296.32	2880	4500

表 22-9　C3 电池板 35 年的发电总量、经济效益及回收年限

铺设年限	35 年发电总量(kWh)	35 年发电经济效益(元)	投资的回收年限(年)
C3	10371.2	5185.6	49.811

由表 22-9 中数据可以看到，东面墙 C3 电池板的回收年限大于电池板的寿命年限，因此不适宜在东面墙上安装电池板。

在东立面的铺设如图 22-9 所示。

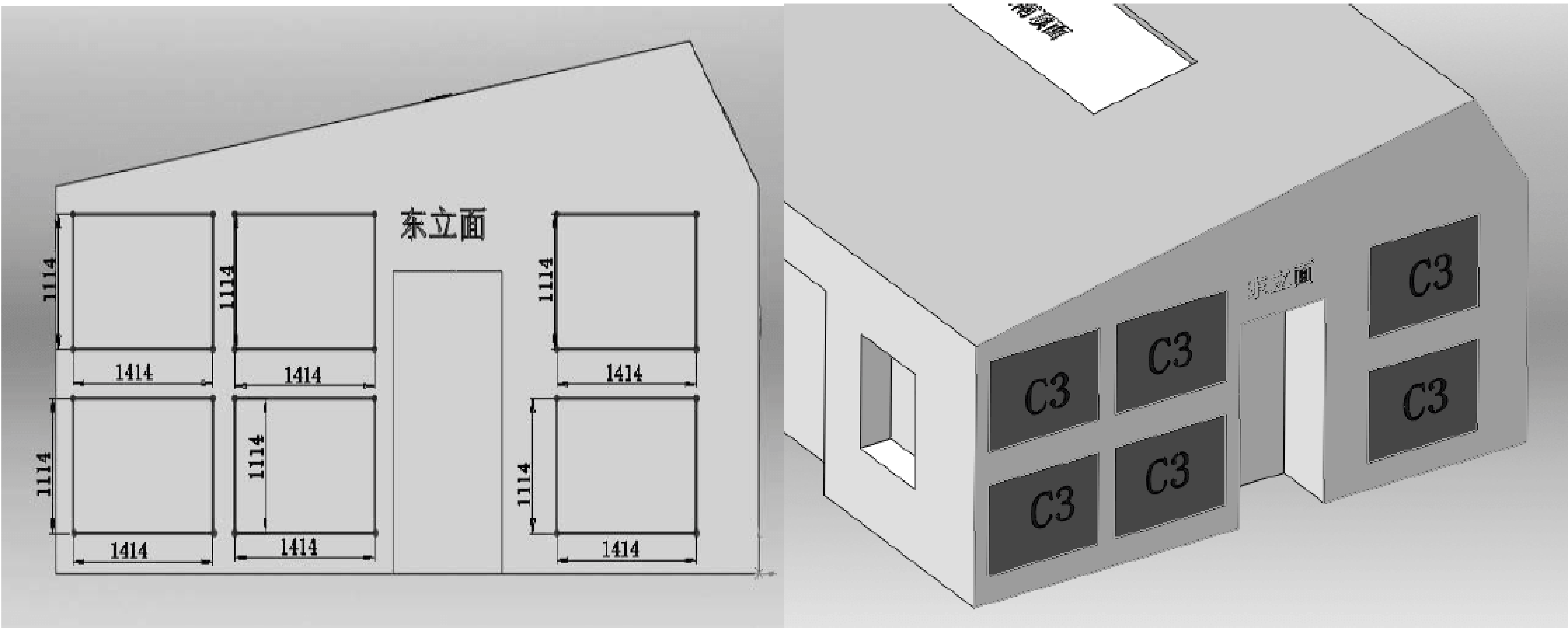


图 22-9　小屋东面电池组件铺设分组阵列图形

小屋电池组件连接方式如图 22-10 所示。

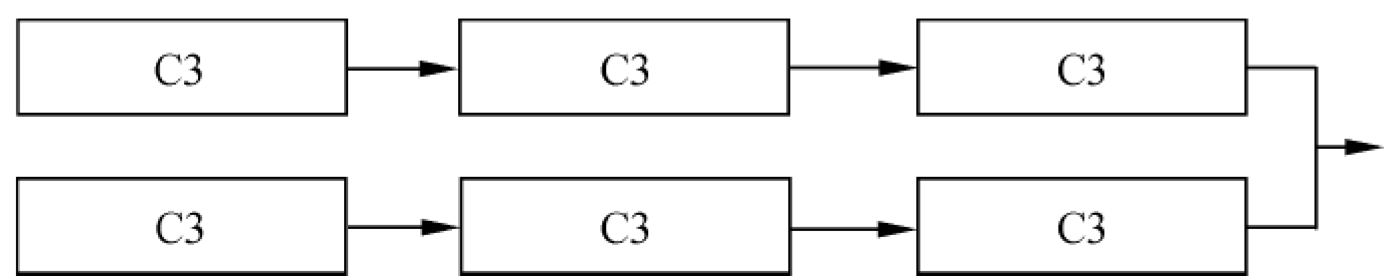


图 22-10　小屋东面电池组件连接方式（两串并联型）

2. 东南顶面

此时东南顶面的铺设平面图如图 22-11 所示。

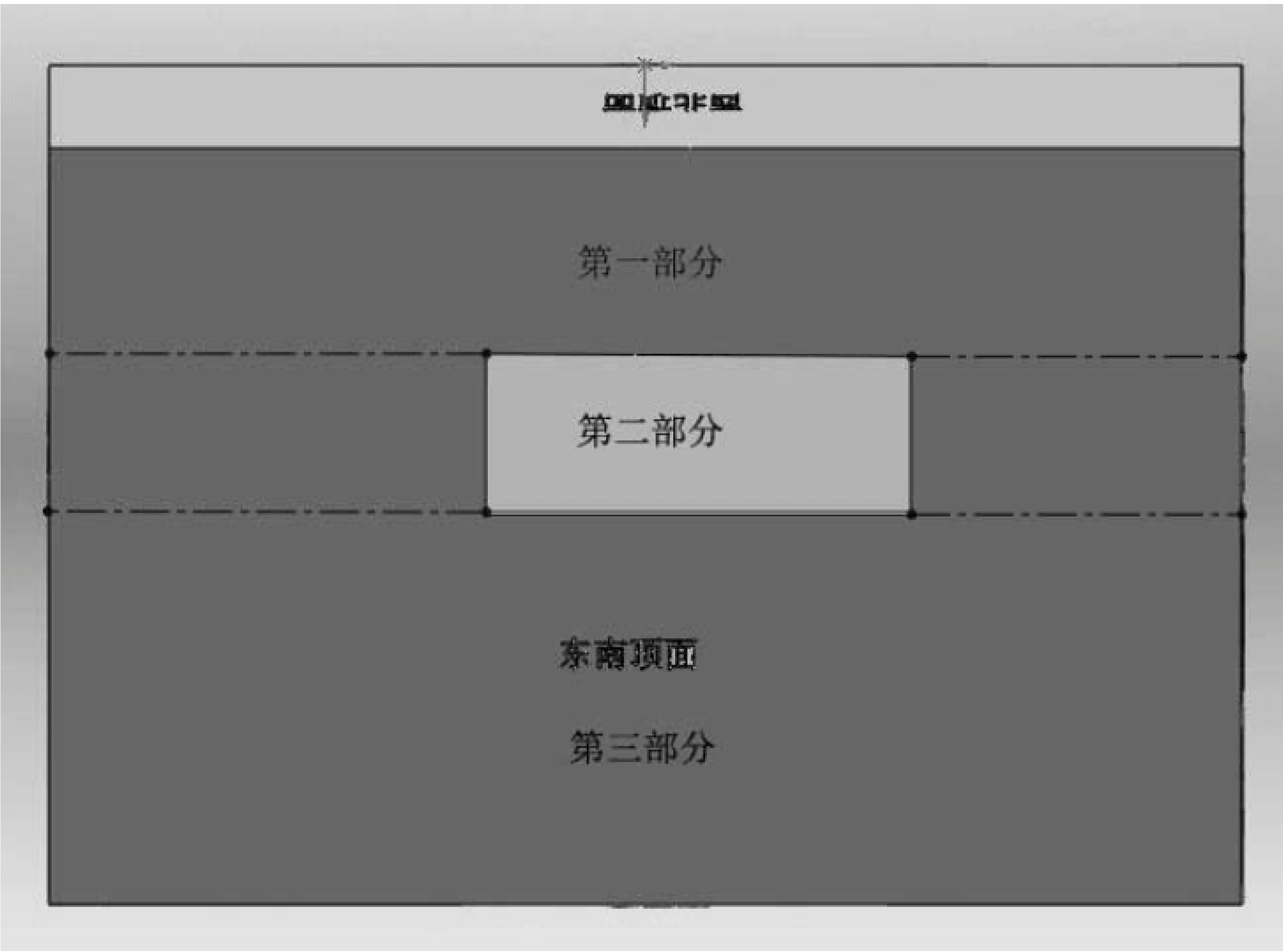


图 22-11　东南顶面的电池组件铺设

与铺设东立面的电池组件方法类似（采取整行同类型铺设），只是在辐射强度上发生了改变，利用 MATLAB 求解出不同型号的电池组件在东立面铺设时的全年发电量和单位发电费用（程序见程序文档），如表 22-10 所示。

表 22-10　不同型号的电池在东南顶面的铺设情况

单行电池	电池数 n	组件总功率 p_s(W)	开路总电压 u_d(Voc)	电池板表面积(W·h)	全年发电量 p_q(kWh)	全年发电量费用 f_s(元)
A1	7	1505	322.70	8.94	731.41	22425
A2	6	1950	281.46	11.63	940.59	29055
A3	7	1400	322.70	8.94	812.20	20860
A4	7	1890	266.70	11.46	919.38	28161
……	……	……	……	……	……	……
C9	12	144	320.40	3.92	68.13	691
C10	15	180	400.50	4.36	94.54	864
C11	7	350	385.00	8.20	207.80	1680

根据表 22-10 中每一种电池组件类型的发电量及单位发电费用，我们按照其约束条件在东南顶面铺设，其铺设方案如表 22-11 所示。

表 22-11　电池板分组铺设方案

方案	每行每一型号电池板按分组 II 铺设（并联的光伏组件端电压相差不应超过 10%）								
第一种	5 A(5)	6 A(6)	7 B(1)	8B(2)	10B(4)	11B(5)	12B(6)	13B(7)	20C(7)
第二种	9 B(3)	10 B(4)	20C(7)						
第三种	15 C(2)	21 C(8)							
第四种	16 C(3)	18 C(5)							
第五种	23C(10)	24C(11)							

根据表 22-11 中的方案所示，求解出不同方案的全年发电量和单位发电费用，如表 22-12 所示。

表 22-12　不同铺设方案全年发电量和单位发电费用

铺设型号	全年发电量 p_q(kWh)	发电量费 f_s(元)	逆变器价格 p_{rb}(元)
A5	3761.52	115326	35000
C8	737.1	7987.2	10200
C3	1704.44	13440	15000
C5	1703.12	13440	15000
……	……	……	……
C11	1054.74	8640	10200
A5A6	1426.04	43880.5	15000
C3C5	851.89	6720	6900
C3C3C5	1704.11	13440	15000
C3C5C5	1703.45	13440	15000
C10C11	976.72	8524.8	10200
A5B6C7C7	1669.67	42798.1	15000
……	……	……	……
A6B4B6	2479.46	58415	22000
A6A6B4B6	3191.21	80392.5	22000
……	……	……	……
B3B4C7C7	1789.66	36207.6	15000

注：C3C5 表示该东南顶面由 C3 和 C5 铺设而成，各在横向铺设一串后并联；
C3C3C5 表示，C3 在横向上铺设一串，剩下全由 C5 在横向来铺设完成。

从表 22-12 中得到，在东南顶面选取最优铺设为 C5 和 C3 电池板，整理如表 22-13 所示。

表 22-13　C5 和C3 的发电量和单位发电费用

单行电池	电池数 n	组件总功率 p_s(W)	开路总电压 u_d(Voc)	全年发电量 (W·h)	全年发电量费用 f_s(元)
C3	7	700	693.00	11.03	426.11
C5	7	700	700.00	425.78	3360

从表 22-13 中得到铺设 C5 和 C3 时的电池板数目，我们根据电池组件的额定电压、额定功率选配出逆变器，如表 22-14 所示。

表 22-14　逆变器的参数及价格

逆变器参数及价格表								
型号	直流输入				交流输出			
	额定电压（V）	额定电流（A）	允许输入电压范围（V）		额定电压/频率（V/Hz）	额定电流（A）	额定功率（kW）	参考价格（元/台）
SN12	DC220	10	180	300	AC220/50	9.1	1.6	10300

由此计算 C3 和 C5 的全年发电量和发电费用，如表 22-15 所示。

表 22-15　C3 和C5 全年的发电量和发电费用

铺设型号	全年发电量 p_q(kWh)	发电量费 f_s(元)	逆变器价格 p_{rb}(元)
C3C5	851.89	6720	6900

由表 22-15 中 C3 和 C5 的全年发电量和发电费用，并求出 35 年的发电总量和 35 年的经济效益及其回收年限，如表 22-16 所示。

表 22-16　C3 和C5 的 35 年的发电总量、经济效益及回收年限

铺设型号	35 年发电总量(kWh)	35 年发电经济效益(元)	投资的回收年限(年)
C3C5	29816.15	14908.08	31.98

东南顶面电池组件铺设分组如图 22-12 所示。

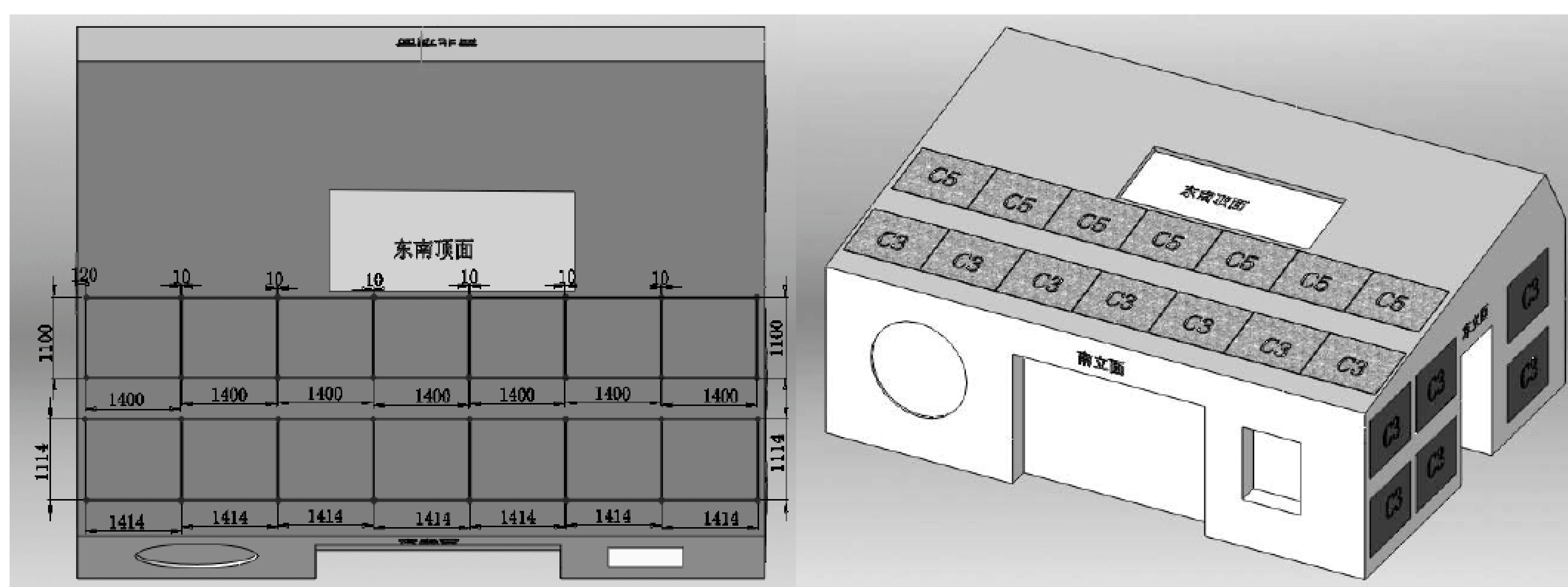


图 22-12　单独采用 B5 铺设时

其组件的连接方式如图 22-13 所示。

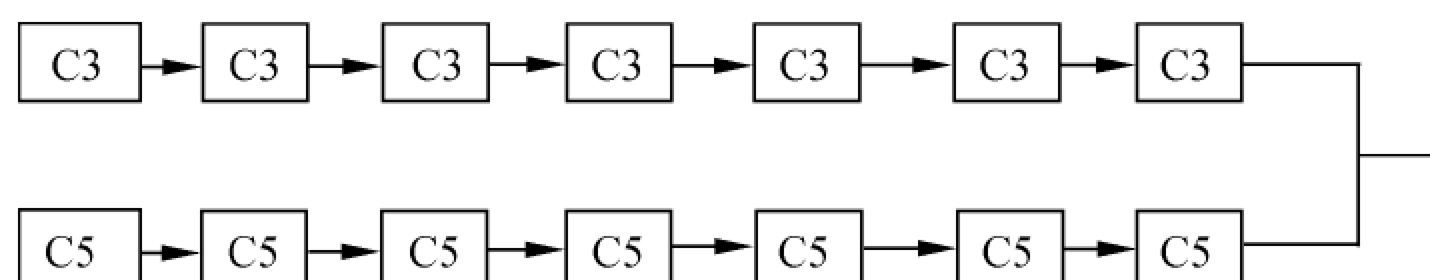


图 22-13　东南顶面电池组件的连接

其余的南立面、西立面、北立面的运算过程和东立面相同，其最后结果如表 22-17 所示。

表 22-17　各个面的计算参数

铺设方位	全年发电量 p_q(kWh)	发电费用 f_s(元)	逆变器型号	逆变器价格 p_{rb}(元)	35 年发电总量(kWh)	35 年发电效益(元)	投资回收年限
东面	296.32	2880	SN11	4500	10371.21	5185.6	49.8
南面	523.69	5090	SN3	4500	18329.15	9164.6	36.6
西面	439.45	4271	SN2	4500	15380.75	7690.4	39.9
北面	130.39	1267	SN2	4500	4563.65	2281.8	88.5
东南顶面	851.89	6720	SN12	6900	29816.15	14908.1	31

22.6.4　问题一结果的分析及验证

通过表 22-17 所示的结果分析，则只有东南顶面的电池组件投资回收年限在 35 年的寿命年限内，而其他面电池组件的投资回收年限都大于其使用寿命，则在东、南、西和北面的铺设都是不能盈利的，因此不可取，所以太阳能小屋的电池组件只能在其顶面铺设。

22.7　问　题　二

22.7.1　问题二的分析

问题二要求将电池组件采用架空的方式安装光伏电池，改变电池板的朝向与倾角，重新选定光伏电池组件，以达到小屋的全年太阳能光伏发电总量尽可能大，且单位发电量的费用尽可能小的目的。问题的解答分析如图 22-14 所示。

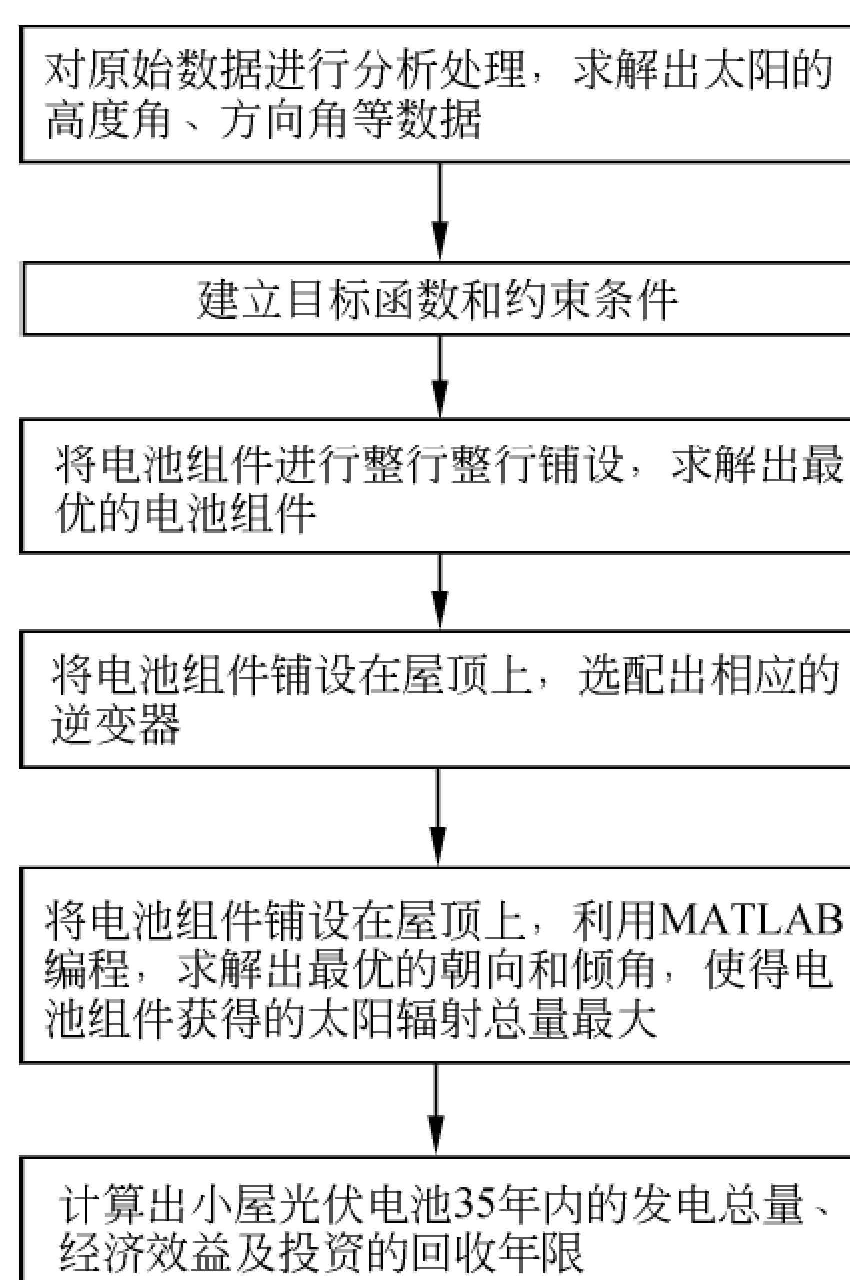


图 22-14　问题二的解答思路

22.7.2　问题二模型的建立

1．倾斜面上的太阳直接辐射通量的计算

改变电池板的朝向就是相对改变太阳的方位角$(A_1+\gamma)$，改变电池板的倾角就是改变房屋的屋顶倾角β'；通过改变β和γ保证电池板获得最大发电量。

1）由太阳光线入射图可知，β为屋顶倾角，α为太阳高度角，电池板倾角γ；由此可得：

$$S_T=f_p\cdot\sin(\alpha+\beta')\cdot\cos(A_1+\gamma) \tag{22.15}$$

f_p为法向直射辐射强度。

2）倾斜面上的散射辐射量

散射辐射各向同性：

$$D_T=\frac{1}{2}(Q_p\text{-}S_p)(1+\cos\beta')=\frac{1}{2}D_p(1+\cos\beta') \tag{22.16}$$

3）倾斜面上的反射辐射

$$R_T=\frac{1}{2}\rho_R Q_p(1\text{-}\cos\beta') \tag{22.17}$$

其中，ρ_R为地面反射率；$\rho_R=0.2$。

为使小屋的全年太阳能光伏发电总量尽可能大，而单位发电量的费用尽可能小，应有目标函数使得倾斜面上的太阳辐射量最大。

$$\begin{aligned}\max\quad Q_T&=S_T+D_T+R_T\\&=f_p\cdot\sin(\alpha+\beta')\cdot\cos(A_1+\gamma)+\frac{1}{2}D_p(1+\cos\beta')+\frac{1}{2}\rho_R Q_p(1\text{-}\cos\beta')\end{aligned} \tag{22.18}$$

2．建立模型

根据上述电池板的朝向和倾角约束，建立相应的优化模型可得：

$$\begin{cases}\max\quad Q_T=\sum\limits_{i=1}^{365}f_{pij}\cdot\sin(\alpha_{ij}+\beta')\cdot\cos(A_{1ij}+\gamma)+\frac{1}{2}D_{pij}(1+\cos\beta')+\frac{1}{2}\rho_R Q_{pij}(1\text{-}\cos\beta')\quad(j=1\cdots24)\\ s.t.\\ Q_p=S_p+D_p\\ f_p,\alpha,A_1,\rho_R,A_1\in const\end{cases} \tag{22.19}$$

22.7.3　问题二模型的求解

通过以上的约束条件和目标函数，利用 MATLAB 计算求得的电池板上最大的辐射量，如表 22-18 所示。

表 22-18　电池板上最大辐射量

电池板上得到最大辐射量									
β'	14	15	16	17	18	19	20	21	22
γ	13	15	10	12	14	16	11	13	15
……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
β'	32	33	34	35	36	37	38	39	40
γ	14	16	18	13	15	17	17	14	16
β'	41	42	43	44	45	46	47	48	49

并求得房屋倾角与电池板朝向角的关系图，MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
%倾角与朝向计算
load qingjiao.mat
plot(qingjiao(:,2),qingjiao(:,1),'b*--')
hold on
plot([15,15],[1,70])
plot([9,19],[40,40])
title('房屋倾角与电池板朝向角关系图')
xlabel('电池板朝向角')
ylabel('房屋倾角')
```

运行程序输出结果如图 22-15 所示。

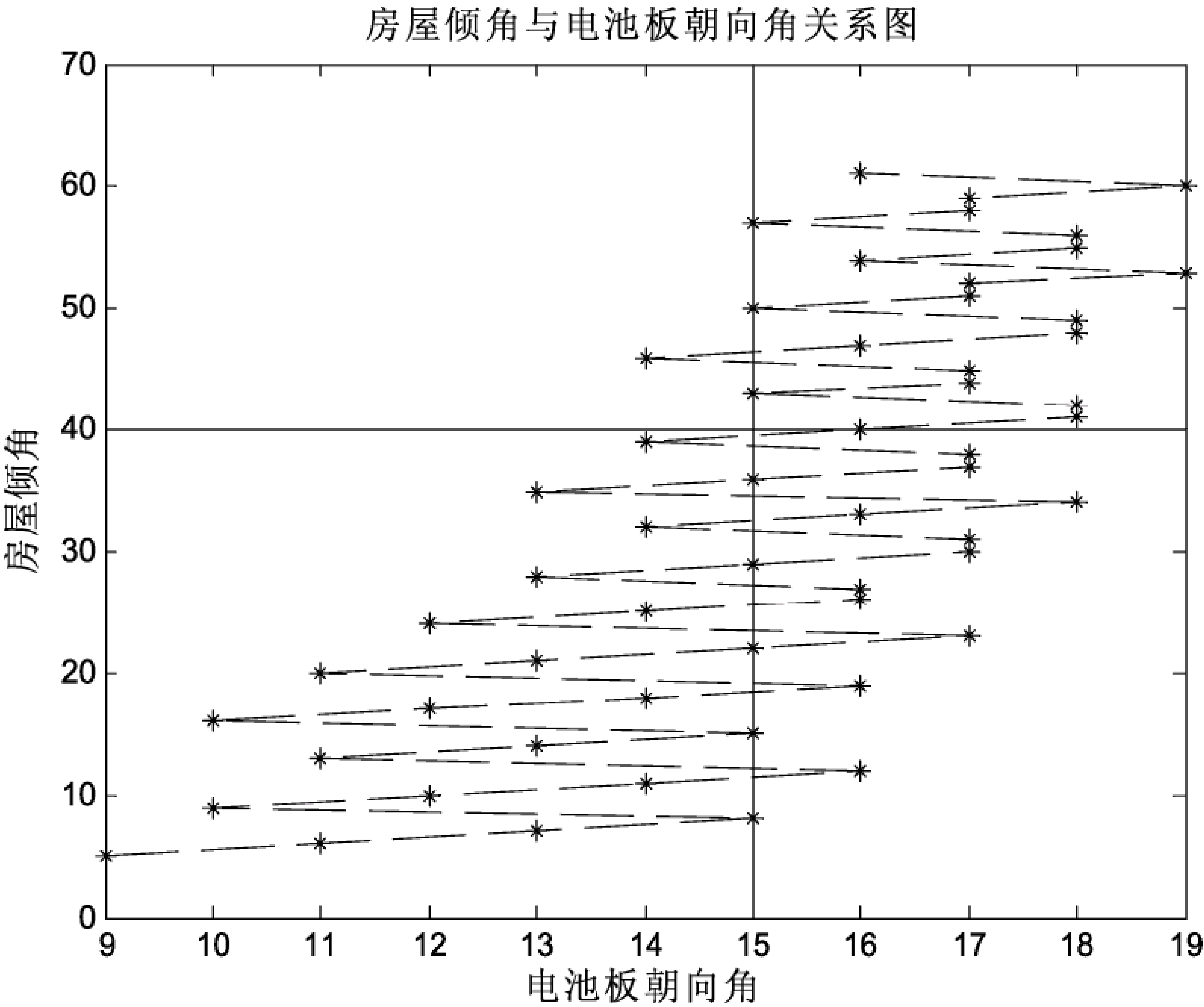


图 22-15　房屋倾角与电池板朝向角的关系

由图 22-15 可知，房屋倾角 β' 随着电池板朝向角 γ 的增大，改变很明显。又房屋正投影面积 S 一定，则倾斜面面积 $S_1=\dfrac{S}{\cos\beta'}$ 急剧增大，综合实际情况，选取 $\beta'=40°$，$\gamma=15°$。电池板倾角 β' 为 40°，电池板朝向角 γ 为南偏西15°，如图 22-16 所示。

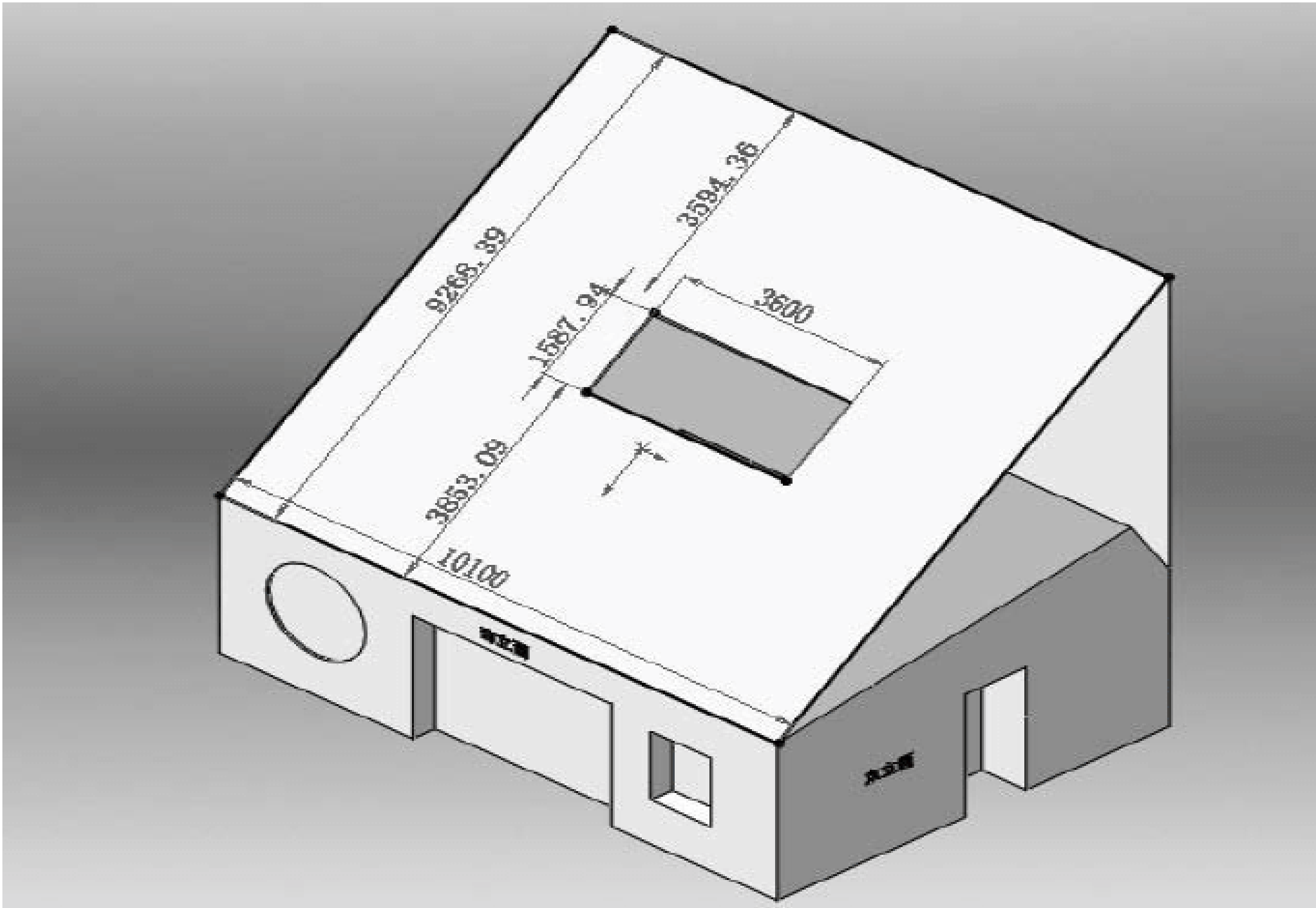


图 22-16　小屋电池倾角图

在此屋顶上，进行铺设电池组件，继续使用问题一的方法，将电池组件整行整行铺设，求得单行电池的发电量和发电费用，如表 22-19 所示。

表 22-19　单行电池的发电量和发电费用

单行电池	电池数 n	组件总功率 p_s(W)	开路总电压 u_d(Voc)	电池板表面积(m^2)	全年发电量 p_q(kWh)	全年发电量费用 f_s(元)
A1	6	1290	276.60	7.66	1434.23	19221.00
A2	5	1625	234.55	9.69	1793.17	24212.50
A3	6	1200	276.60	7.66	1592.64	17880.00
A4	6	1620	228.60	9.83	1802.81	24138.00
……	……	……	……	……	……	……
C7	16	64	201.60	1.77	47.47	307.20
C8	16	128	427.20	3.49	139.10	614.40
C9	10	120	267.00	3.27	128.33	576.00
C10	12	144	320.40	3.48	159.34	691.20
C11	6	300	330.00	7.03	347.42	1440.00

由计算机搜索所有各个组合，得到一列不同组合下的电池板的发电量和发电费用及逆变器价格的参数，具体如表 22-20 所示。

表 22-20　不同电池组件铺设的发电量和发电费用

铺 设 型 号	全年发电量 kWh	发电量费（元）	逆变器价格（元）
A5	11473.84	153768	54700
A6	9769.8	131865	43750
C2	4726.1	19488	22000
C8	2782	12288	15000
C3	4920	20160	22000
……	……	……	……
B4C7C7	10464.13	110150.4	43750
C2C8	3670.26	15379.2	15000

续表

铺 设 型 号	全年发电量 kWh	发电量费（元）	逆变器价格（元）
C2C2C8	3670.26	15379.2	15000
C2C8C8	3948.46	16608	15000
C3C5	3278.7	13440	15000
……	……	……	……
B3B4B4C7	6760.53	70057.2	22000
B3B4C7C7	3715.54	36207.6	15000

注：B4B7 表示该东立面由 B4 和 B7 铺设而成，各在横向铺设一串后并联；
B4B7B7 表示，B7 在横向上铺设一串，剩下全由 B4 在横向来铺设完成。

由此得到，单行电池铺设时，最优解为 C2 和 C8 电池组件，如表 22-21 所示。

表 22-21　C2 和C8 的发电参数

单行电池	电池数 n	组件总功率 p_s(W)	开路总电压 u_d(Voc)	全年发电量 p_q(kWh)	全年发电量费用 f_s(元)
C2	7	406	436.10	472.61	1948.80
C8	16	128	427.20	139.10	614.40

由表 22-21 可以得到，最优的电池组件铺设类型为 C2C8C8，根据其铺设及连接方式，选择相应的逆变器，逆变器的参数如表 22-22 所示。

表 22-22　逆变器的参数及价格

<table>
<tr><th colspan="9">逆变器参数及价格表</th></tr>
<tr><th rowspan="2">型号</th><th colspan="4">直流输入</th><th colspan="4">交流输出</th></tr>
<tr><th>额定
电压（V）</th><th>额定
电流（A）</th><th colspan="2">允许输入
电压范围
（V）</th><th>额定
电压/频率
（V/Hz）</th><th>额定
电流（A）</th><th>额定
功率（kW）</th><th>参考价格
（元/台）</th></tr>
<tr><td>SN6</td><td>DC48</td><td>115</td><td>42</td><td>64</td><td>AC220/50</td><td>22.7</td><td>4</td><td>15000</td></tr>
</table>

根据电池组件的铺设，求解出全年的发电量及 35 年的发电总量、经济效益和投资的回收年限，如表 22-23 所示。

表 22-23　C2C8C8 的发电量及经济效益和回收年限

铺设型号	全年发电量 p_q(kWh)	发电量费 f_s(元)	逆变器价格 p_{rb}(元)
C2C8C8	3948.46	16608	15000
铺设型号	35 年发电总量(kWh)	35 年发电经济效益(元)	投资的回收年限(年)
C2C8C8	138196.1	69098.05	16.0103

铺设电池组件的示意图如图 22-17 所示。

22.7.4　问题二结果的分析及验证

通过以上分析，当改变电池板的朝向和倾角时，即电池板朝向南面倾角为 40 度，朝向角为南偏西倾角为 15 度时，此时能够达到最大的辐射强度，与问题一中房屋的东南顶面

相比较，降低回收年限，符合题意。

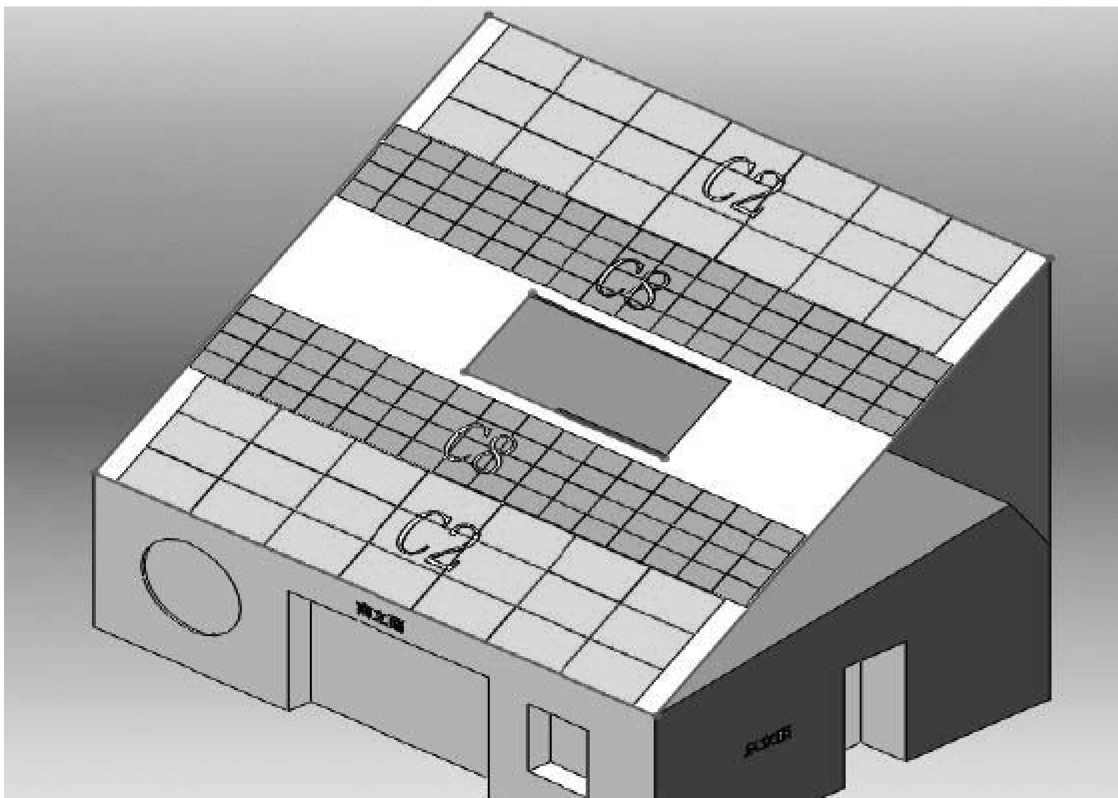


图 22-17　铺设电池组件示意图

22.8　问　题　三

22.8.1　问题三的分析

根据题意，要求根据小屋的建筑要求（附件 7，见程序文档），为大同市重新设计小屋，并在小屋的外表面铺设电池组件，使其全年太阳能光伏发电总量尽可能大，而单位发电量尽可能小，我们依然采用和问题一类似的解答思路，求解出铺设方案。其解答思路如图 22-18 所示。

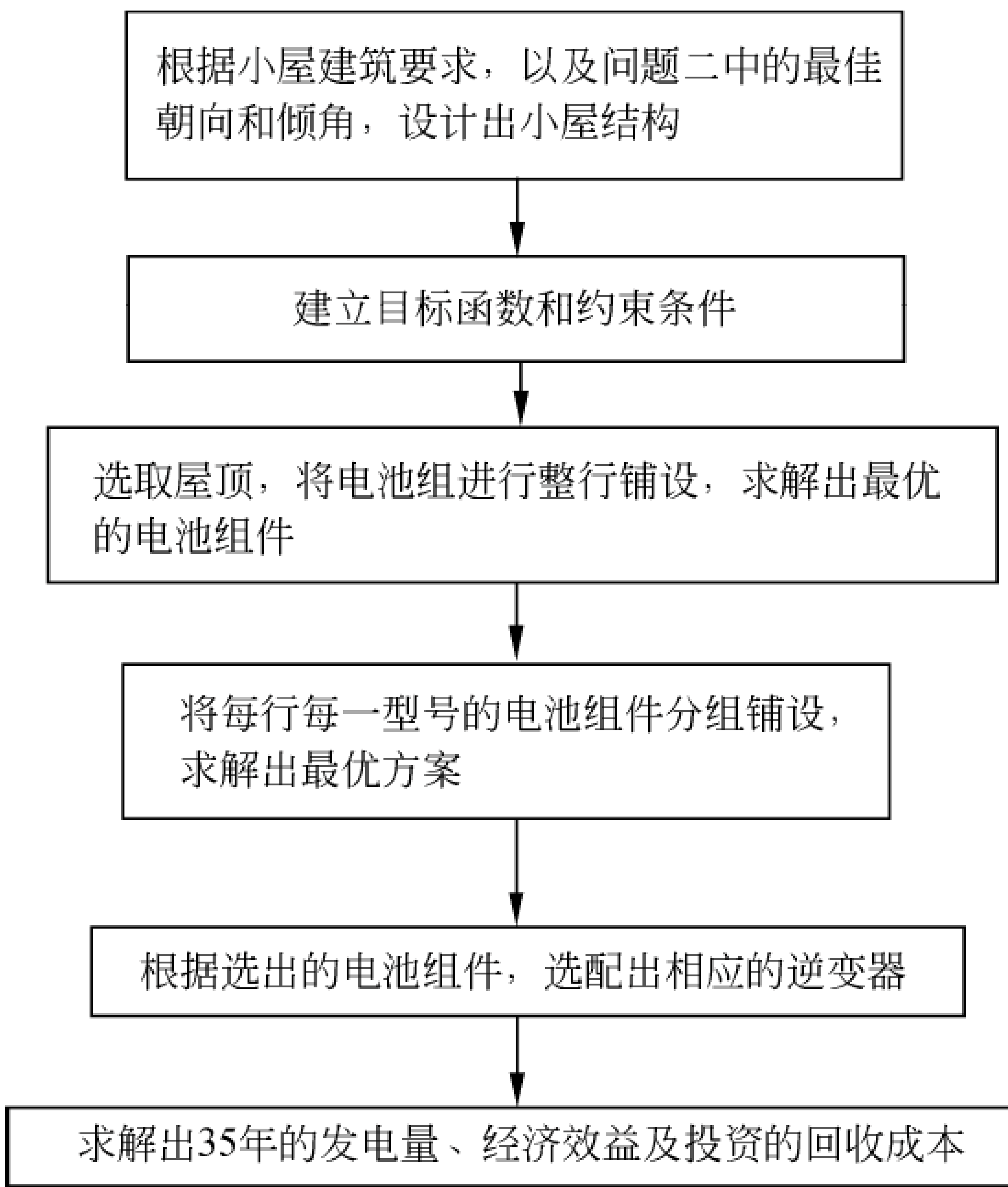


图 22-18　问题三的思路流程

22.8.2　问题三模型的建立

根据附件 7（见程序文档），小屋的建筑应满足如下约束。

建筑屋顶最高点距地面高度≤5.4m，即：

$$h_1 \leqslant 5.4\text{m} \tag{22.20}$$

室内使用空间最低净空高度距地面高度为≥2.8m，即：

$$h_2 \geqslant 2.8m \tag{22.21}$$

建筑平面体型长边应≤15m，即：

$$a \leqslant 15\text{m} \tag{22.22}$$

最短边应≥3m，即：

$$b \geqslant 3\text{m} \tag{22.23}$$

建筑总投影面积（包括挑檐和挑雨棚的投影面积）为≤74m^2，即：

$$S = a \cdot b \leqslant 74\text{m}^2 \tag{22.24}$$

建筑采光要求至少应满足窗地比（开窗面积与房间地板面积的比值，可不分朝向）≥0.2 的要求，即：

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{S_a + S_b + S_c + S_d} \geqslant 0.2 \tag{22.25}$$

其中，S_1, S_2, S_3, S_4 分别为东南西北面的开窗面积；S_a, S_b, S_c, S_d 分别为东南西北墙的面积；$S = S_a + S_b + S_c + S_d$。

屋顶接受太阳光辐射强度最大，本题中，即是屋顶表面积 S_d 最大：

$$\lim\max(S_d) = \frac{S}{\cos\beta'} \tag{22.26}$$

建筑采光要求如下。

东墙 $\dfrac{S_1}{S_a} \leqslant 0.35$：

$$S_1 \leqslant 0.35 \cdot S_a \leqslant \frac{7(h_1 + h_2)}{80} b \tag{22.27}$$

南墙 $\dfrac{S_2}{S_b} \leqslant 0.5$：

$$S_2 \leqslant 0.5 \cdot S_b \leqslant ah_2/2 \tag{22.28}$$

西墙 $\dfrac{S_3}{S_c} \leqslant 0.35$：

$$S_3 \leqslant 0.35 \cdot S_c = \frac{7(h_1 + h_2)}{40} b \tag{22.29}$$

北墙 $\dfrac{S_4}{S_d} \leqslant 0.3$：

$$S_4 \leqslant 0.3 \cdot S_d = 0.3 \cdot a \cdot h_1 \tag{22.30}$$

由上述条件和目标函数，建立数学模型得：

$$\begin{cases} \max \quad S_d = a \cdot \dfrac{h_1 - h_2}{\sin \beta'} \\ s.t. \\ S = a \cdot b \leqslant 74 \\ \dfrac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{S_a + S_b + S_c + S_d} \geqslant 0.2 \\ S = S_a + S_b + S_c + S_d \\ S_1 \leqslant \dfrac{7(h_1 + h_2)}{80} b \\ S_2 \leqslant 0.5 \cdot S_b \leqslant a h_2 / 2 \\ S_3 \leqslant \dfrac{7(h_1 + h_2)}{40} b \\ S_4 \leqslant 0.3 \cdot a \cdot h_1 \\ h_1 \leqslant 5.4, \quad h_2 \geqslant 2.8, \quad a \leqslant 15, \quad b \geqslant 3 \end{cases} \tag{22.31}$$

由于建筑设计朝向可以根据需要设计，允许偏离正南朝向，在此设计房屋模型坐落于南偏西 $\gamma = 15°$（问题二）的方向。从而不考虑对太阳方位角 $\cos(A_1)$ 的影响。

房屋屋顶面（东南顶面）的倾角为 $\beta' = 40°$（问题二），保证太阳能电池板接受年平均光辐射强度最大，有：

$$h_1 = h_2 + b \cdot \tan \beta' \leqslant 5.4$$

根据建筑要求绘制出房屋的结构框图，如图 22-19 所示。

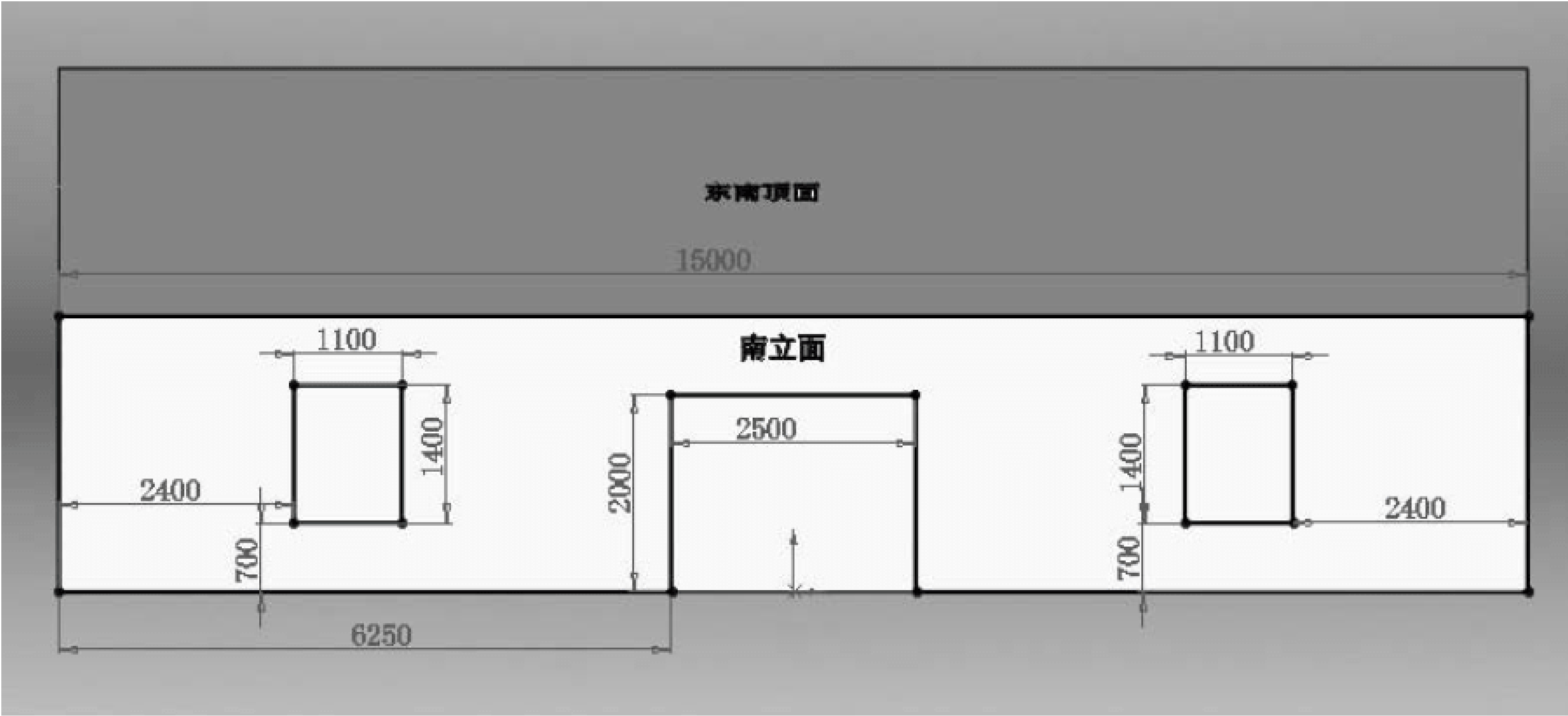


图 22-19　小屋的结构建筑图

在房屋的屋顶铺设单行电池组件，求解出其发电量及发电费用，如表 22-24 所示。

表 22-24　单行电池组件参数

单行电池	电池数 n	组件总功率 p_s(W)	开路总电压 u_d(Voc)	电池板表面积 (m^2)	全年发电量 p_q(kWh)	全年发电量费用 f_s(元)
A1	9	1935	414.9	11.48976	2156593	28831.5
A2	7	2275	328.37	13.56877	2516570	33897.5
……	……	……	……	……	……	……
A6	7	2065	321.44	13.56877	2285179	30768.5

续表

单行电池	电池数 n	组件总功率 p_s(W)	开路总电压 u_d(Voc)	电池板表面积 (m^2)	全年发电量 p_q(kWh)	全年发电量费用 f_s(元)
……	……	……	……	……	……	……
C5	10	1000	1000	15.4	1173806	4800
C6	48	192	1281.6	5.2824	218285	921.6
……	……	……	……	……	……	……
C10	18	216	480.6	5.22702	247662.9	1036.8
C11	9	450	495	10.54116	526016.3	2160

将每行每一型号的电池分组铺设，其方案如表 22-25 所示。

表 22-25　每行每一电池组件铺设方案

方案	每行每一型号电池板按分组 II 铺设（并联的光伏组件端电压相差不应超过 10%）								
第一种	5A(5)	6A(6)	7B(1)	8B(2)	10B(4)	11B(5)	12B(6)	13B(7)	20C(7)
第二种	1 A(1)	3 A(3)	22C(9)						
第三种	15 C(2)	21 C(8)							
第四种	16 C(3)	18 C(5)							
第五种	23C(10)	24C(11)							

22.8.3　问题三模型的求解

根据以上的铺设方案，利用 MATLAB 求解出它们的全年发电量和发电费用，如表 22-26 所示。

表 22-26　不同方案铺设的发电量和发电费用

铺 设 型 号	全年发电量 kWh	发电量费（元）	逆变器价格（元）
A5	8626.372584	115326	35000
A6	6855.536388	92305.5	35000
……	……	……	……
C10	2724.291379	11404.8	10200
C11	2630.081413	10800	10200
A5A6B2	7353	91623	35000.00
……	……	……	……
A5A6A6B2	7353	91623	35000.00
A6B7C7C7	5679	61189	4500.00
B1B2B4	4729	56229	4500.00
B1B1B2B4	7014	86998	4500.00
……	……	……	……
B1B2B4B4	5603	60377	4500.00
B1B2B5	7955	84813	4500.00
B2B5B6B6	6125	59608	4500.00
B2B2B7C7	7741	82273	4500.00
B3B3B4C7	7289	77086	4500.00
B3B4B4C7	7214	76273	4500.00
B3B4C7C7	5740	55421	4500.00

根据 C10 的参数和铺设情况，选出其对应的逆变器，如表 22-27 所示。

表 22-27 逆变器的参数及价格

<table>
<tr><th colspan="9">逆变器参数及价格表</th></tr>
<tr><th rowspan="2">型号</th><th colspan="4">直流输入</th><th colspan="4">交流输出</th></tr>
<tr><th>额定电压（V）</th><th>额定电流（A）</th><th colspan="2">允许输入电压范围（V）</th><th>额定电压/频率（V/Hz）</th><th>额定电流（A）</th><th>额定功率（kW）</th><th>参考价格（元/台）</th></tr>
<tr><td>SN5</td><td>DC48</td><td>73</td><td>42</td><td>64</td><td>AC220/50</td><td>13.6</td><td>2.4</td><td>10200</td></tr>
</table>

根据电池组件和相应的逆变器，求得其 35 年的发电总量、经济效益及回收年限，如表 22-28 所示。

表 22-28 C10 铺设投资效益

铺设型号	35 年发电总量(kWh)	35 年发电经济效益(元)	投资的回收年限(年)
C10	95350.2	47675.1	15.8609

其分组阵列图形如图 22-20 所示。

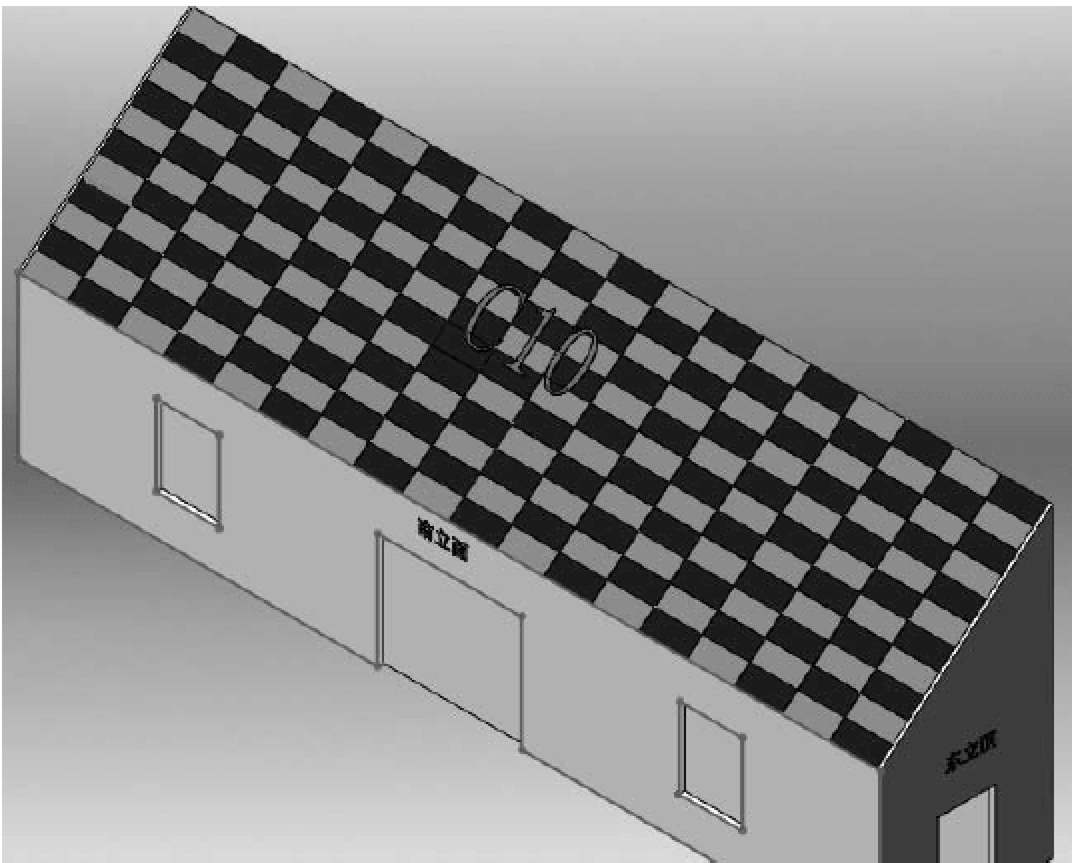


图 22-20 分组阵列图形

电池组件连接方式如图 22-21 所示。

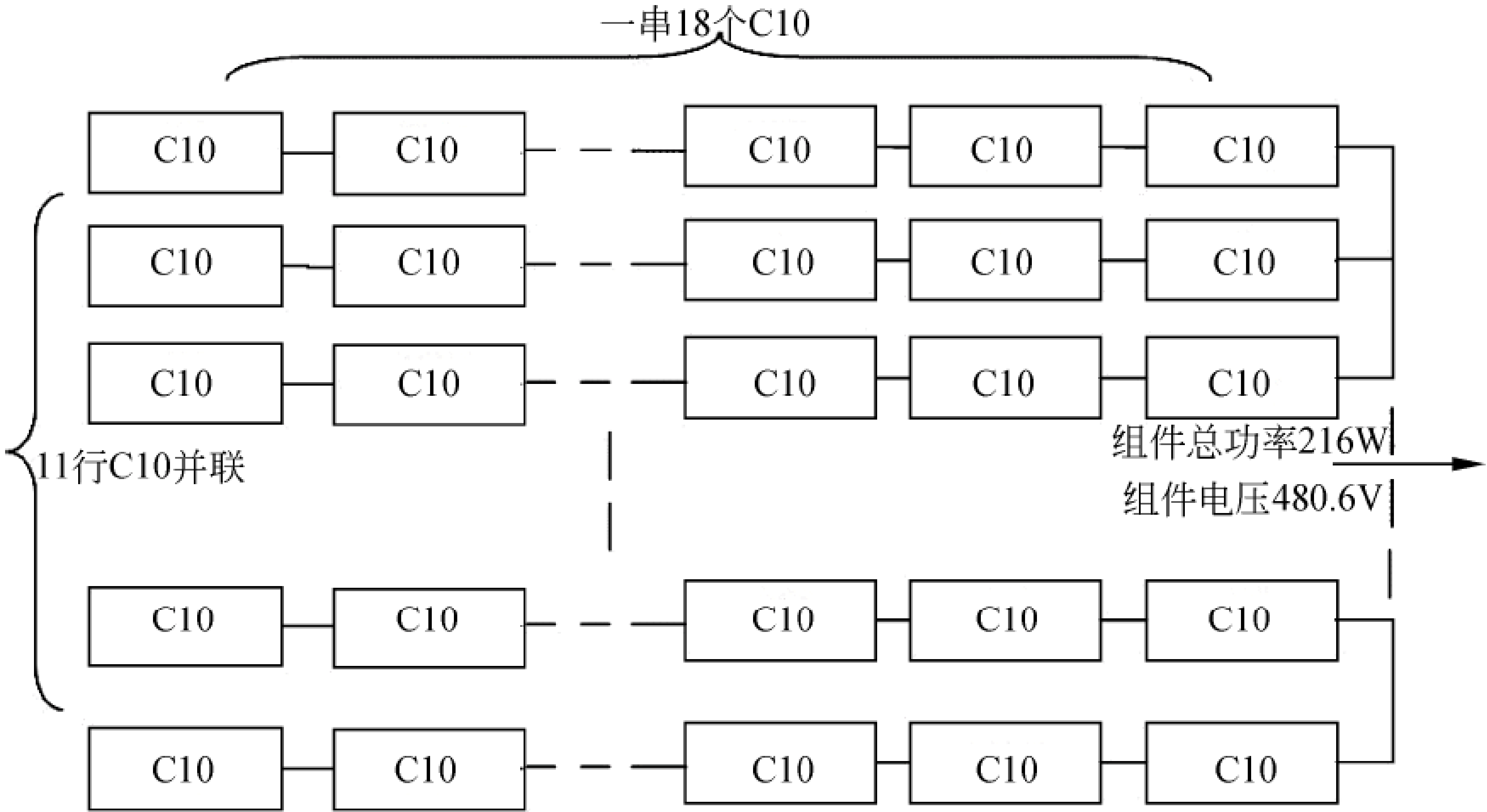


图 22-21 组件连接方式

22.8.4　问题三结果的分析及验证

根据以上的求解结果，将题源中的房屋模型做出了对比，其对比分析表如表 22-29 所示。

表 22-29　题源中房屋模型对比分析表

房屋类型	电池板类型	35 年发电总量(kWh)	35 年发电经济效益(元)	投资的回收年限	屋顶电池板设计效果图
题源房屋模型	C3C5	29816.15	14908.08	31.98	
改变朝向和倾角的源题房屋模型	C2C8C8	138196.1	69098.05	16.0103	
自行设计的优化房屋模型	C10	95350.2	47675.1	15.8609	

从表 22-29 中可看出，自行设计的优化房屋模型投资的回收年限为 15.8609 年，回收年限最小，达到优化的目的。

22.9　模型的评价与推广

22.9.1　模型的评价

本章中我们主要建立的是多目标优化和间接模拟的模型。多目标优化模型能将两个或者多个目标转换成一个目标，根据其约束条件，可以求解出最优解，此模型在社会生活中有很大的应用。间接模拟模型能将多种符合条件的情况一一列举出来，在有多种变量无法确定时，可以利用间接模型的方法列举其可能情况，但间接模拟的方法数据量太大，处理起来很困难。

22.9.2　模型的推广

多目标优化模型在当今的社会生活中有很广泛的应用。例如，在证券投资中，既要求有最小风险也要求获得最大收益，对此我们就可以运用多目标优化模型进行解答，此模型在军事和医学中也有很广泛的应用。间接模拟模型对于社会生活中出现多种情况变量时，我们可以利用此方法来一一列举出来，可以将此推广到医学和经济等领域。

第 23 章　高校硕士研究生指标分配问题

现在各高校研究生就读的越来越多。每年报考研究生时，各大高校均会给出出台政策，以此说明本校需要招收多少研究生（针对不同专业和不同背景的研究生）。然而研究生的比例有个约束，每一所学校老师的数量决定了学生的比例，不同的教师的级别对研究生的招收也存在差异，此外还有老师的学科方向、科研经费，发表中、英文论文数，专利数，获奖数，获得校、省优秀论文奖数量等因素也对招生有一定的影响，综合这些因素，合理的分配研究生名额，成为高校一个亟待解决的问题。

学习目标：

（1）学习和掌握高校硕士研究生指标分配问题等；

（2）掌握常用相关分析和回归分析等方法；

（3）掌握常用聚类分析等方法；

（4）掌握 MATLAB 常用残差检验等功能。

23.1　问 题 提 出

高等学校研究生招生指标分配问题，对研究生的培养质量、学科建设和科研成果的取得有直接影响。特别是 2011 年研究生招生改革方案中，将硕士研究生招生指标划分为学术型和专业型两类。这一改革方案的实施，给研究生教育的发展带来发展机遇的同时，也给研究生招生指标分配的优化配置提出了新的思考。

附件 1（见程序文档）的数据是某高校 2007～2011 年硕士研究生招生实际情况。研究生招生指标分配主要根据指导教师的数量及教师岗位进行分配。其中教师岗位分为七个岗位等级（一级岗位为教师的最高级，七级岗为具备硕士招生资格的最低级）。另外数据表还列出了各位教师的学科方向，2007～2011 年的招生数，科研经费，发表中、英文论文数，专利数，获奖数，获得校、省优秀论文奖数量等信息。

请你参考有关文献，利用附件 1 的数据建立数学模型，并解决下列问题。

（1）由于统计数据的缺失，第 18、103、110、123、150、168、274、324、335 和 352 位教师的数据不完整，请你用数学模型的方法将这些缺失的数据补充完整。

（2）以前的硕士研究生名额分配方案主要参考导师岗位级别进行分配。请你以岗位级别为指标，分析每个岗位的招生人数、科研经费、发表中英文论文数、申请专利数、获奖数和获得优秀论文数量的统计规律，并给出合理的解释。

（3）根据第二问的结论，提出更加合理的研究生名额分配方案，使得新方案既兼顾到岗位又能兼顾到其他因素。例如，研究生的招生类型等，并要求用此方案对 2012 年的名额进行预分配。

（4）如果在研究生招生指标分配当中，考虑到学科的特点和学科发展的需要，进行差异分配，请你设计调整方案，并用你的方案给出 2012 年的调整方案。

（5）如果想把分配方案做得更加合理，你认为还需要哪些指标数据，用什么方法可以完成你的方案？请阐述你的思想。

23.2 摘　要

本章针对高校硕士研究生指标分配问题，采用聚类分析、相关分析和回归分析等方法，建立了系统聚类模型和多元线性回归方程模型，采用最小二乘估计算法计算得到了各个导师研究生指标的分配名额，并对 2012 年的招生指标进行了预分配，结果较准确。

问题一中，要求将部分导师所缺失的数据补充完整。首先，采用聚类分析的方法，建立两种模型。第一种模型，将缺失数据的导师在其相同学科间进行系统聚类，建立聚类模型；第二种模型，将缺失数据的导师的各项指标与所有的导师的各项指标进行聚类，建立聚类模型。然后，对两种聚类模型均采用最小欧氏距离平方的方法进行求解。最后，得出每位缺失数据导师的完整信息，十位导师的岗位级别依次为：四级岗、七级岗、七级岗、七级岗、四级岗、三级岗、七级岗、六级岗、四级岗和七级岗。

问题二中，要求以岗位级别为指标，分析每个岗位的招生人数、科研经费、发表中英文论文数、申请专利数、获奖数和获得优秀论文数量的统计规律，并给出合理的解释。首先，做出招生人数、科研经费和发表中英文论文数等指标数据关于各个岗位的直方图，分析其分布情况。然后，运用相关性分析，对硕士招生总人数与各指标进行相关性分析，得出硕士招生人数与申请专利数、获奖数等质变具有较强的相关性的结论。

问题三中，要求根据二问结论，既考虑岗位因素又兼顾其他因素，建立更加合理的研究生名额分配方案，并对 2012 年名额进行预分配。首先，运用相关性分析和回归分析的方法，建立多元线性回归方程模型，采用最小二乘估计方法对回归系数进行估计，并对回归方程进行残差检验。最后，根据 2011 年的数据，得出了 2012 年各导师的招生名额分配方案。其中，前八位导师的名额分别为：1、7、7、7、2、7、5 和 7 个。

问题四中，增加学科特点及发展需要的影响对研究生招生指标进行差异分配，设计调整方案，并给出 2012 年的分配方案。在问题三的基础上，增加学科变量的影响。首先，对学科变量利用线性加权方法进行量化处理，建立多元线性回归方程模型。然后，采用最小二乘法对回归系数进行估计，并对建立的回归方程进行残差检验。在剔除异常值后，重新建立回归方程，逐步回归，最终得到较合理的回归方程模型。最后，代入各指标数据，得出 2012 年的分配方案，其中前八位导师的名额分别为：1、2、1、1、2、1、2 和 1 个。

问题五中，为了更加合理地建立分配方案，要求增加一些指标数据，建立分配方案模型。为使分配方案更加合理，可增加就业率、学生报考人数和企业反馈信息等指标数据。

关键词：相关分析、回归分析、线性加权、聚类分析、多元线性回归方程和残差检验。

23.3 基 本 假 设

（1）2007 年～2011 年期间教师岗位等级没有变化；

（2）研究生招生政策没有较大变动；

（3）2007 年～2011 年期间导师人数没有较大变化；

（4）研究生招生名额不因为其他主客观原因而变化。

23.4　符 号 说 明

符　　号	意　　义	备　　注
x_{ij}	第 i 类样品中的第 j 项指标	$i=1,2...354; j=1,2...40$
x'_{ij}	x_{ij} 标准化后的值	$i=1,2...354; j=1,2...40$
σ_j	第 j 项指标数据的方差	$j=1,2...40$
$\overline{x}_j$	第 j 项指标各数据平均值	$j=1,2...40$
d	样品间欧氏距离	
D	欧氏距离平方	
β	回归系数矩阵	
$\hat{\beta}$	回归系数矩阵估计值	
X	回归变量矩阵	

23.5　问 题 分 析

对于问题一，通过数据分析，可发现缺失的数据均是岗位的等级，而其他的数据如所招收研究生数量和论文发表等等都具体存在，因此，可考虑采用聚类分析的方法，通过已知完整的数据，对数据进行分析和求解。

我们针对第一问拿出了两个聚类的模型。

第一种模型，将所求的样本和相同学科类样本进行聚类分析，然后在得出的结果中，将所求的样本和它一类的几个样本进行比较，若全部是一个级别，那所求样本属于该级别。若同一类中等级有差异，则所求样本和该类中距离较近的样本属于同一岗位级别。

第二种模型，将所求样本和所有的样本进行比较，计算欧氏距离，得到一个最小值，则所求样本和最近欧氏距离样本属于同一岗位级别。问题思路如图 23-1 所示。

对于问题二，题目要求以岗位级别为指标，分别分析每个岗位的招生人数等的统计规律。因此，首先以岗位级别为横坐标，招生人数、科研经费、发表中英文论文数、申请专利数、获奖数和获得优秀论文数量分别作为纵坐标。根据已有的信息绘制出七个直方图，然后根据绘制的图形，结合实际，分析统计规律。

对于问题三，在第二问的基础之上，由于要对 2012 年的名额进行一个预测分配，因此考虑用回归分析的方法，将招生人数定为因变量、将岗位级别、中英文期刊发表的数目、专利申请数量和获奖个数等五项指标定为回归变量，构造多元回归方程，根据已有数据，拟合出 2012 年招生名额分配。

对于问题四，由于和问题三有着同样的目的，采用同样的多元回归模型，但是考虑到

学科的特点和学科发展的需要，因此引入新的回归变量学科分类。

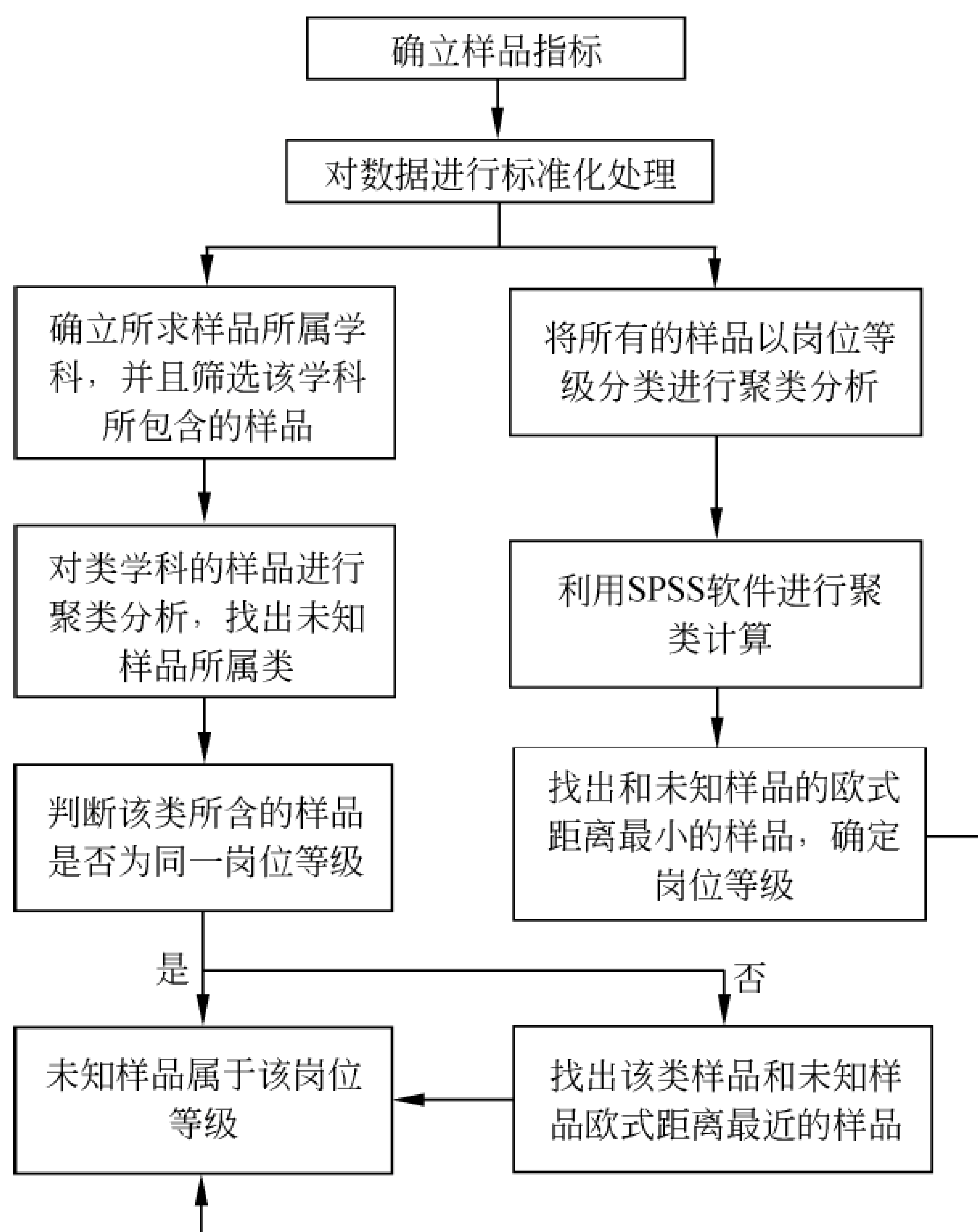


图 23-1　模型建立分析流程图

对于问题五，要求增加一些指标数据，采用相应的方法建立更加合理的招生分配方案。因此，可查找相关文献及根据目前实际情况找出影响研究生招生人数的指标，再进行分析。

23.6　问　题　一

23.6.1　问题一分析

针对问题一，我们可以看到有 A～K 类不同的学科，并且有 1～7 个不同岗位等级，以及每位导师的论文、专利数量等。因此，我们首先将信息缺失的导师和他所在的学科中的其余导师作为样品进行聚类分析。

首先确定出影响聚类的指标，由题目所给数据，我们将指标确定为每年硕士招生总人数、纵横向科研项目，以及其到账经费、每年发表中英文论文篇数、专利申请数量、获得奖励个数等。然后进行数据的标准化，无量纲处理。

我们针对第一问拿出了两个聚类的模型。

第一种模型，是将所求的样本和同学科类样本进行聚类分析，然后在得出的结果中，将所求的样本和它一类的几个样本进行比较，若全部是一个级别，那所求样本属于该级别。若同一类中等级有差异，则所求样本和该类中距离较近的样本属于同一岗位级别。

第二种模型，是将所求样本和七种岗位等级样本进行比较，计算欧氏距离，得到一个最小值，则所求样本和最近欧氏距离样本属于同一岗位级别。

23.6.2　问题一模型的建立

1．聚类分析的简介

聚类分析是根据事物本身的特性来定量研究分类问题的一种多元统计分析方法。其基本思想是同一类中个体有较大的相似性，不同类中的个体差异较大，于是根据一批样本的多个观测指标，找出能够度量样品（或变量）之间相似度的统计量，并以此为依据，采用某种聚类法，将所有的样品（或变量）分别聚合到不同的类中。

2．数据的标准化处理

利用如下公式对数据进行标准化处理：

$$x_{ij}^{'} = \frac{x_{ij} - \overline{x_j}}{\sigma_j}, i = 1, 2 \cdots 354;\ j = 1, 2 \cdots 40$$

其中：

$$\overline{x}_j = \frac{1}{354}\sum_{i=1}^{354} x_{ij}, j = 1, 2 \cdots 40$$

$$\sigma_j = \frac{1}{354}\sum_{i=1}^{354}\left(x_{ij} - \overline{x}_j\right)^2, j = 1, 2 \cdots 40$$

为了方便，我们把归一化后的矩阵仍然记作：

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1,40} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{354,1} & \cdots & x_{354,40} \end{pmatrix}$$

3．样品距离计算

设 $d(x_i, x_j)$ 是样品 x_i, x_j 之间的距离，一般要求它满足以下条件：

（1） $d(x_i, x_j) \geqslant 0$， 且 $d(x_i, x_j) = 0 \Leftrightarrow x_i = x_j; i, j = 1, 2 \ldots 354$；

（2） $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i); i, j = 1, 2 \ldots 354$；

（3） $d(x_i, x_j) \leqslant d(x_i, x_k) + d(x_k, x_j); k \leqslant 354$ 。

欧氏距离：

$$d(x_i, x_j) = \left[\sum_{k=1}^{40}(x_{ik} - x_{jk})^2\right]^{\frac{1}{2}}; i = 1, 2 \ldots 354; j = 1, 2 \ldots 354$$

欧氏距离平方：

$$D\left(x_i, x_j\right) = \left[d\left(x_i, x_j\right)\right]^2 = \sum_{k=1}^{j}\left(x_{ik} - x_{jk}\right)^2$$

从而得到聚类分析的模型：

$$\begin{cases} x_{ij}^{'} = \dfrac{x_{ij} - \overline{x_j}}{\sigma_j}, i = 1,2\cdots354;\ \ j = 1,2\cdots40; \\ \overline{x}_j = \dfrac{1}{354}\sum_{i=1}^{354} x_{ij}, j = 1,2\cdots4 \\ \sigma_j = \dfrac{1}{354}\sum_{i=1}^{354}\left(x_{ij} - \overline{x}_j\right)^2, j = 1,2\cdots4 \\ d(x_i, x_j) = \left[\sum_{k=1}^{40}(x_{ik} - x_{jk})^2\right]^{\frac{1}{2}}; i = 1,2...354; j = 1,2...354 \end{cases}$$

23.6.3　问题一模型的求解

1．模型一的求解

Step1：对样品和指标进行确定。设题目给出的 354 位导师为 354 个样品，所对应的指标分别为五年的硕士招生人数，纵向、横向科研项目数量及其到账经费合计，五年发表的中英文论文篇数，五年申请专利数，五年获得奖励个数，获得省优秀、校优秀硕士论文篇数等。

Step2：将未知样品所属的学科筛选出来，如第 18 个样品属于学科 A，那么将学科 A 的所有样品筛选出来。

Step3：对数据进行标准化处理。利用 MATLAB 软件，将题目所给的数据按式 $x_{ij}' = \dfrac{x_{ij} - \overline{x_j}}{\sigma_j}$ 进行标准化处理。

Step4：计算位置样本点与其学科间其他样本点的欧氏距离平方。利用 SPSS 软件，对我们所确立的样品指标进行聚类分析。

2．模型二的求解

Step1：同模型一的求解，确立样品和指标。

Step2：对数据进行标准化处理。

Step3：计算所有样品之间的欧氏距离，利用 SPSS 软件将未知样品和所有的样品进行聚类分析。

23.6.4　问题一结果分析

1．模型一结果分析

根据 23.6.3 小节中求解步骤可得聚类分析结果，如表 23-1 所示。

表 23-1　聚类分析结果

缺失数据导师号	18	103	110	123	150
最小距离	5.96	1.17	1.44	5.54	6.06

续表

导师编号	41	99	99	127	134
归属级岗	四级岗	七级岗	七级岗	七级岗	四级岗
缺失数据导师号	168	274	324	335	352
最小距离	9.80	5.57	5.14	3.29	8.48
导师编号	175	273	308	345	348
归属级岗	三级岗	七级岗	六级岗	四级岗	七级岗

由表 23-1 聚类分析结果可得到导师缺失数据值，如表 23-2 所示。

表 23-2　导师缺失数据值

缺失数据	18	103	110	123	150
归属级岗	四级岗	七级岗	七级岗	七级岗	四级岗
缺失数据	168	274	324	335	352
归属级岗	三级岗	七级岗	六级岗	四级岗	七级岗

其中，学科 A 的聚类树状图如图 23-2 所示。

根据 23.6.3 小节中的 Step4 可得出学科 A 缺失数据导师与其他导师之间的欧氏距离，部分结果如表 23-3 所示。

表 23-3　学科A缺失数据导师与其他部导师之间的欧氏距离表

	1	2	3	4	5	…	48	49	50	51	18
1	0.00	17.94	10.60	10.02	10.67	…	9.29	10.90	11.08	11.65	10.63
2	17.94	0.00	14.12	15.13	15.35	…	17.22	15.65	15.28	15.63	13.98
3	10.60	14.12	0.00	4.80	7.90	…	8.78	3.77	5.26	4.72	7.50
4	10.02	15.13	4.80	0.00	8.82	…	7.16	3.73	3.56	4.70	7.44
5	10.67	15.35	7.90	8.82	0.00	…	10.98	9.62	9.92	10.28	9.32
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
48	9.29	17.22	8.78	7.16	10.98	…	0.00	8.12	8.02	8.86	10.45
49	10.90	15.65	3.77	3.73	9.62	…	8.12	0.00	2.95	2.60	7.96
50	11.08	15.28	5.26	3.56	9.92	…	8.02	2.95	0.00	3.73	7.02
51	11.65	15.63	4.72	4.70	10.28	…	8.86	2.60	3.73	0.00	8.70
18	10.63	13.98	7.50	7.44	9.32	…	10.45	7.96	7.02	8.70	0.00

2．模型二结果分析

由 23.6.3 小节中模型二 Step3 可得任意两导师间的欧氏距离，如表 23-4 所示。

表 23-4　模型二所得最小欧氏距离与岗位级别

最小距离	一级岗	二级岗	三级岗	四级岗	五级岗	六级岗	七级岗
第 18 位	5.62	5.27	5.16	7.98	7.39	8.26	11.18
第 103 位	4.29	3.01	3.14	1.11	3.10	1.48	1.41
第 110 位	4.40	3.64	3.39	1.55	2.55	2.16	1.14
第 123 位	7.01	7.42	6.44	6.63	5.35	5.96	4.33
第 150 位	6.49	5.37	5.49	7.07	8.55	7.89	15.48
第 168 位	7.82	7.40	8.63	9.75	9.26	10.64	9.21

续表

最小距离	一级岗	二级岗	三级岗	四级岗	五级岗	六级岗	七级岗
第 274 位	5.87	7.69	6.55	8.53	7.47	7.01	9.30
第 324 位	4.82	3.96	2.16	5.37	5.59	4.04	6.81
第 335 位	4.41	4.10	3.68	2.77	3.19	2.81	2.52
第 352 位	8.63	8.67	7.07	9.82	8.26	10.64	6.67

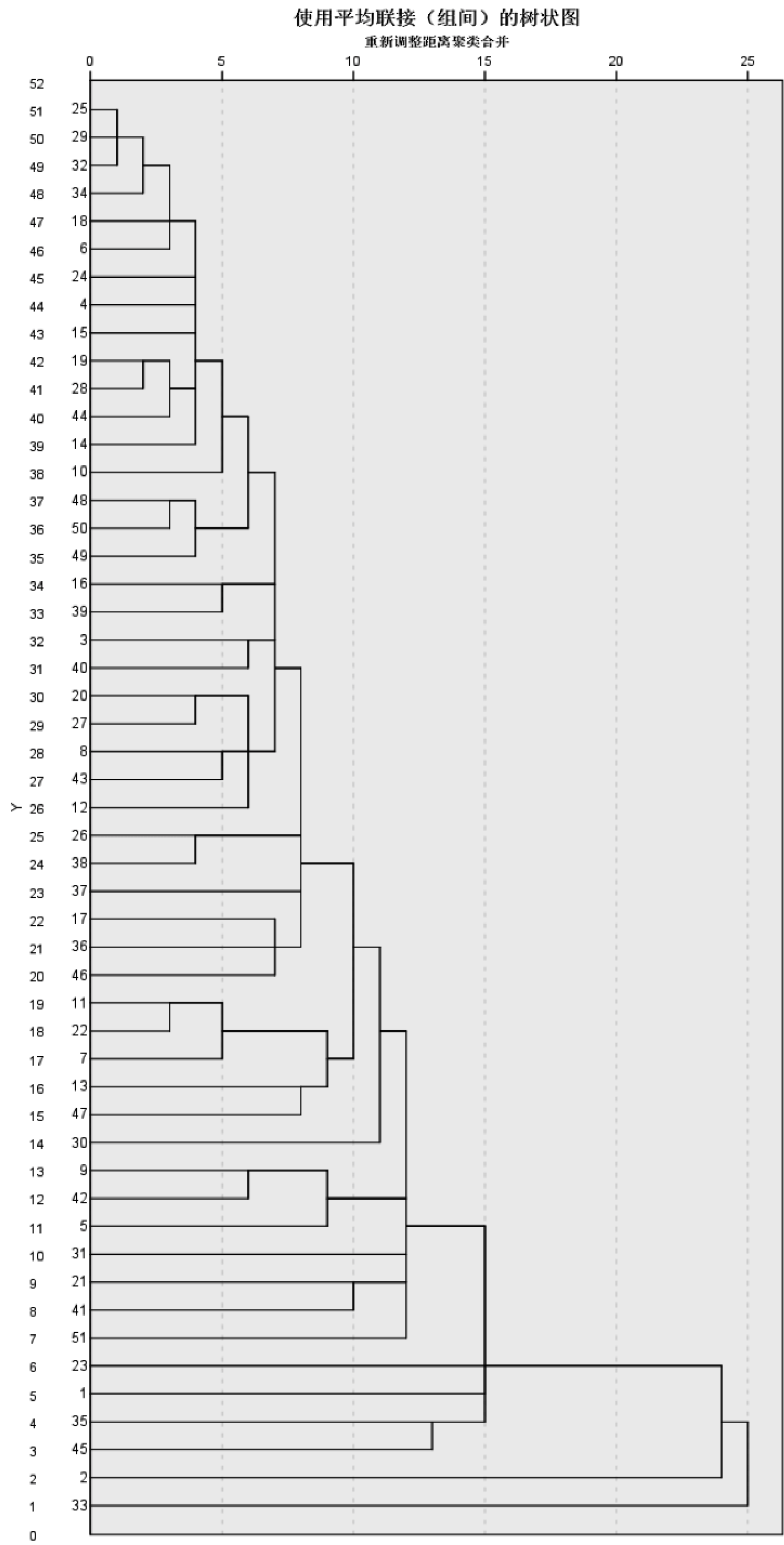


图 23-2　学科 A 的聚类树状图

由表 23-4 最小欧氏距离值，从而可得导师的岗位级别缺失数据，如表 23-5 所示。

表 23-5　模型二所得缺失数据导师的岗位级别

导师编号	18	103	110	123	150
归属级岗	三级岗	四级岗	四级岗	七级岗	二级岗
导师编号	168	274	324	335	352
归属级岗	二级岗	一级岗	三级岗	七级岗	七级岗

23.7　问　题　二

23.7.1　问题二的分析

题目要求以岗位级别为指标，分别分析每个岗位的招生人数等的统计规律。因此，首先以岗位级别为横坐标，招生人数、科研经费、发表中英文论文数、申请专利数、获奖数和获得优秀论文数量分别作为纵坐标。根据已有的信息绘制出七个直方图，然后根据绘制的图形，结合实际，分析统计规律。

23.7.2　问题二模型的建立

首先进行数据处理，每个岗位等级所对应的各个因素的平均值。

然后以岗位级别为横坐标，招生人数、科研经费、发表中英文论文数、申请专利数、获奖数和获得优秀论文数量分别作为纵坐标。利用 MATLB 软件绘制出他们的直方图，MATLAB 程序如下：

```
%级岗合并
clc,clear;
load xsum.mat  % 加载原始数据
load gw1.mat  % 加载原始数据
load gw2.mat  % 加载原始数据
load gw3.mat  % 加载原始数据
load gw4.mat  % 加载原始数据
load gw5.mat  % 加载原始数据
load gw6.mat  % 加载原始数据
load gw7.mat  % 加载原始数据
n0=size(xsum);
n1=size(gw1);n2=size(gw2);n3=size(gw3);  % 矩阵维数
n4=size(gw4);n5=size(gw5);n6=size(gw6);
n7=size(gw7);
renshu1=[0,0,0,0,0,0,0];keyan1=[0,0,0,0,0,0,0];zhongyw1=[0,0,0,0,0,0,0];
% 初始化
zhuanli1=[0,0,0,0,0,0,0];huoj1=[0,0,0,0,0,0,0];youxlw1=[0,0,0,0,0,0,0];
for i=1:n1(1,1)
    renshu1(1,1)=renshu1(1,1)+gw1(i,9);  % 累加求和
    keyan1(1,1)=keyan1(1,1)+gw1(i,14);
    zhongyw1(1,1)=zhongyw1(1,1)+gw1(i,20)+gw1(i,29);
    zhuanli1(1,1)=zhuanli1(1,1)+gw1(i,35);
    huoj1(1,1)=huoj1(1,1)+gw1(i,41);
```

```
    youxlw1(1,1)=youxlw1(1,1)+gw1(i,42)+gw1(i,43);
end

for i=1:n2(1,1)
    renshu1(1,2)=renshu1(1,2)+gw2(i,9);  % 累加求和
    keyan1(1,2)=keyan1(1,2)+gw2(i,14);
    zhongyw1(1,2)=zhongyw1(1,2)+gw2(i,20)+gw2(i,29);
    zhuanli1(1,2)=zhuanli1(1,2)+gw2(i,35);
    huoj1(1,2)=huoj1(1,2)+gw2(i,41);
    youxlw1(1,2)=youxlw1(1,2)+gw2(i,42)+gw2(i,43);
end

for i=1:n3(1,1)
    renshu1(1,3)=renshu1(1,3)+gw3(i,9); % 累加求和
    keyan1(1,3)=keyan1(1,3)+gw3(i,14);
    zhongyw1(1,3)=zhongyw1(1,3)+gw3(i,20)+gw3(i,29);
    zhuanli1(1,3)=zhuanli1(1,3)+gw3(i,35);
    huoj1(1,3)=huoj1(1,3)+gw3(i,41);
    youxlw1(1,3)=youxlw1(1,3)+gw3(i,42)+gw3(i,43);
end

for i=1:n4(1,1)   % 累加求和
    renshu1(1,4)=renshu1(1,4)+gw4(i,9);
    keyan1(1,4)=keyan1(1,4)+gw4(i,14);
    zhongyw1(1,4)=zhongyw1(1,4)+gw4(i,20)+gw4(i,29);
    zhuanli1(1,4)=zhuanli1(1,4)+gw4(i,35);
    huoj1(1,4)=huoj1(1,4)+gw4(i,41);
    youxlw1(1,4)=youxlw1(1,4)+gw4(i,42)+gw4(i,43);
end

for i=1:n5(1,1)
    renshu1(1,5)=renshu1(1,5)+gw5(i,9);  % 累加求和
    keyan1(1,5)=keyan1(1,5)+gw5(i,14);
    zhongyw1(1,5)=zhongyw1(1,5)+gw5(i,20)+gw5(i,29);
    zhuanli1(1,5)=zhuanli1(1,5)+gw5(i,35);
    huoj1(1,5)=huoj1(1,5)+gw5(i,41);
    youxlw1(1,5)=youxlw1(1,5)+gw5(i,42)+gw5(i,43);
end

for i=1:n6(1,1)
    renshu1(1,6)=renshu1(1,6)+gw6(i,9);  % 累加求和
    keyan1(1,6)=keyan1(1,6)+gw6(i,14);
    zhongyw1(1,6)=zhongyw1(1,6)+gw6(i,20)+gw6(i,29);
    zhuanli1(1,6)=zhuanli1(1,6)+gw6(i,35);
    huoj1(1,6)=huoj1(1,6)+gw6(i,41);
    youxlw1(1,6)=youxlw1(1,6)+gw6(i,42)+gw6(i,43);
end

for i=1:n1(1,1)
    renshu1(1,7)=renshu1(1,7)+gw7(i,9);  % 累加求和
    keyan1(1,7)=keyan1(1,7)+gw7(i,14);
    zhongyw1(1,7)=zhongyw1(1,7)+gw7(i,20)+gw7(i,29);
    zhuanli1(1,7)=zhuanli1(1,7)+gw7(i,35);
    huoj1(1,7)=huoj1(1,7)+gw7(i,41);
    youxlw1(1,7)=youxlw1(1,7)+gw7(i,42)+gw7(i,43);
end

subplot(2,3,1)  % 新建窗口画图
bar(1:7,renshu1)
gtext('级岗')
```

```
gtext('招生人数')
subplot(2,3,2)
bar(1:7,keyan1)
gtext('级岗')
gtext('科研经费')
subplot(2,3,3)
bar(1:7,zhongyw1)
gtext('级岗')
gtext('中英文论文数')
subplot(2,3,4)
bar(1:7,zhuanli1)
gtext('级岗')
gtext('专利数')
subplot(2,3,5)
bar(1:7,huoj1)
gtext('级岗')
gtext('获奖数')
subplot(2,3,6)
bar(1:7,youxlw1)
gtext('级岗')
gtext('优秀论文数')
```

运行效果如图 23-3 所示。

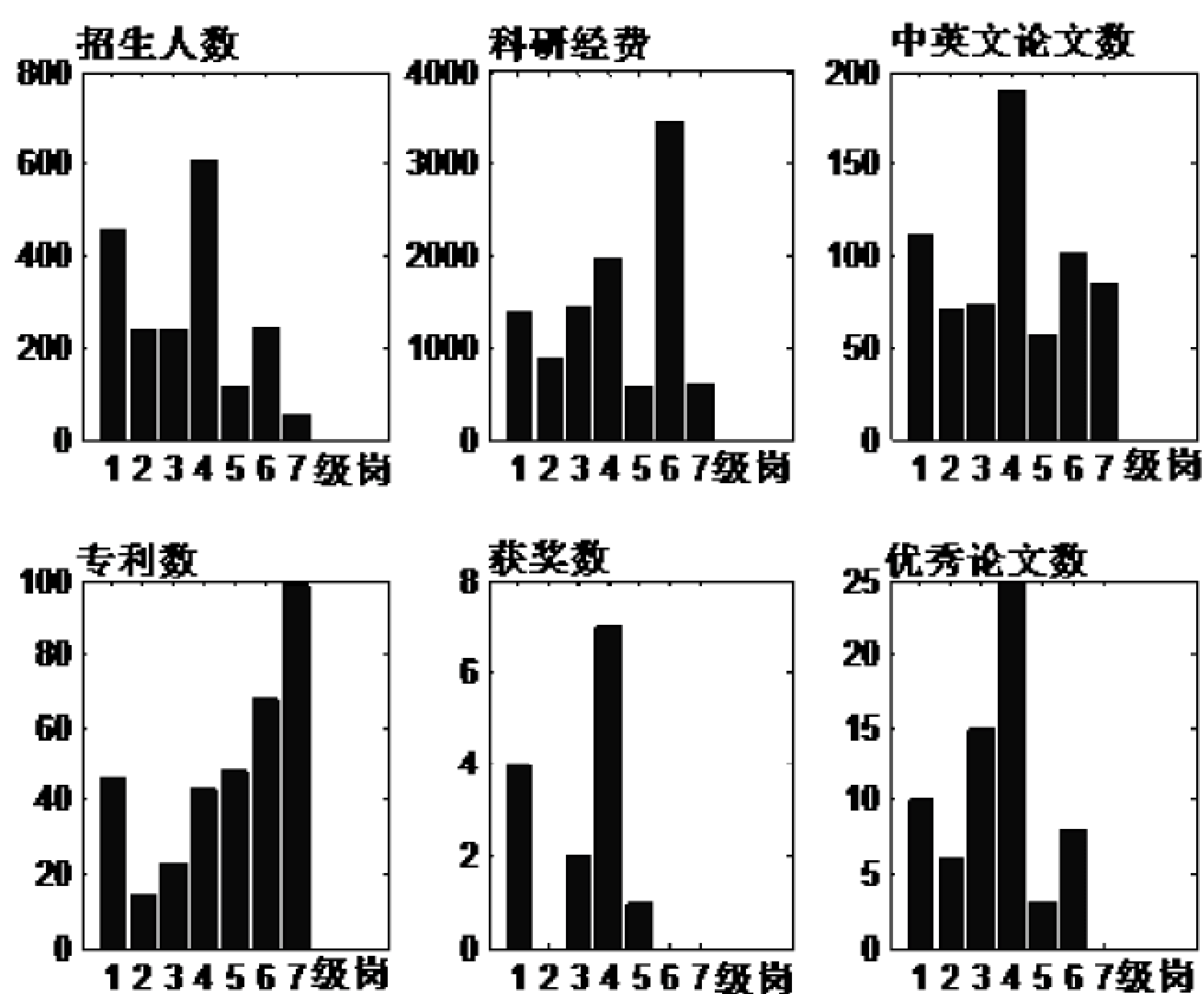


图 23-3　每个岗位招生人数和科研经费等指标与岗位的统计直方图

从图 23-3 中观察，我们发现直接这样画出的柱状图不能够很明确地反映出统计的规律。因此，我们将招生人数、科研经费、发表中英文论文数、申请专利、获奖数和获得优秀论文数量等都求了一个平均值：

$$x_{ij}=\frac{\sum_{j=1}^{k}x_{ij}}{k},\qquad (i=1,2...7)$$

再利用 MATLB 软件编程如下：

```
%求平均值
    renshu1(1,1)=renshu1(1,1)/n1(1,1);
```

```
    keyan1(1,1)=keyan1(1,1)/n1(1,1);
    zhongyw1(1,1)=zhongyw1(1,1)/n1(1,1);
    zhuanli1(1,1)=zhuanli1(1,1)/n1(1,1);
    huoj1(1,1)=huoj1(1,1)/n1(1,1);
    youxlw1(1,1)=youxlw1(1,1)/n1(1,1);
%求平均值
    renshu1(1,2)=renshu1(1,2)/n2(1,1);
    keyan1(1,2)=keyan1(1,2)/n2(1,1);
    zhongyw1(1,2)=zhongyw1(1,2)/n2(1,1);
    zhuanli1(1,2)=zhuanli1(1,2)/n2(1,1);
    huoj1(1,2)=huoj1(1,2)/n2(1,1);
    youxlw1(1,2)=youxlw1(1,2)/n2(1,1);
%求平均值
    renshu1(1,3)=renshu1(1,3)/n3(1,1);
    keyan1(1,3)=keyan1(1,3)/n3(1,1);
    zhongyw1(1,3)=zhongyw1(1,3)/n3(1,1);
    zhuanli1(1,3)=zhuanli1(1,3)/n3(1,1);
    huoj1(1,3)=huoj1(1,3)/n3(1,1);
    youxlw1(1,3)=youxlw1(1,3)/n3(1,1);
%求平均值
    renshu1(1,4)=renshu1(1,4)/n4(1,1);
    keyan1(1,4)=keyan1(1,4)/n4(1,1);
    zhongyw1(1,4)=zhongyw1(1,4)/n4(1,1);
    zhuanli1(1,4)=zhuanli1(1,4)/n4(1,1);
    huoj1(1,4)=huoj1(1,4)/n4(1,1);
    youxlw1(1,4)=youxlw1(1,4)/n4(1,1);
%求平均值
    renshu1(1,5)=renshu1(1,5)/n5(1,1);
    keyan1(1,5)=keyan1(1,5)/n5(1,1);
    zhongyw1(1,5)=zhongyw1(1,5)/n5(1,1);
    zhuanli1(1,5)=zhuanli1(1,5)/n5(1,1);
    huoj1(1,5)=huoj1(1,5)/n5(1,1);
    youxlw1(1,5)=youxlw1(1,5)/n5(1,1);
%求平均值
    renshu1(1,6)=renshu1(1,6)/n6(1,1);
    keyan1(1,6)=keyan1(1,6)/n6(1,1);
    zhongyw1(1,6)=zhongyw1(1,6)/n6(1,1);
    zhuanli1(1,6)=zhuanli1(1,6)/n6(1,1);
    huoj1(1,6)=huoj1(1,6)/n6(1,1);
    youxlw1(1,6)=youxlw1(1,6)/n6(1,1);
%求平均值
    renshu1(1,7)=renshu1(1,7)/n7(1,1);
    keyan1(1,7)=keyan1(1,7)/n7(1,1);
    zhongyw1(1,7)=zhongyw1(1,7)/n7(1,1);
    zhuanli1(1,7)=zhuanli1(1,7)/n7(1,1);
    huoj1(1,7)=huoj1(1,7)/n7(1,1);
    youxlw1(1,7)=youxlw1(1,7)/n7(1,1);
figure(2),
subplot(2,3,1)
bar(1:7,renshu1)
gtext('级岗')
gtext('平均招生人数')
subplot(2,3,2)
bar(1:7,keyan1)
gtext('级岗')
gtext('平均科研经费')
subplot(2,3,3)
bar(1:7,zhongyw1)
gtext('级岗')
```

```
gtext('平均中英文论文数')
subplot(2,3,4)
bar(1:7,zhuanli1)
gtext('级岗')
gtext('平均专利数')
subplot(2,3,5)
bar(1:7,huoj1)
gtext('级岗')
gtext('平均获奖数')
subplot(2,3,6)
bar(1:7,youxlw1)
gtext('级岗')
gtext('平均优秀论文数')
```

运行程序输出结果如图 23-4 所示。

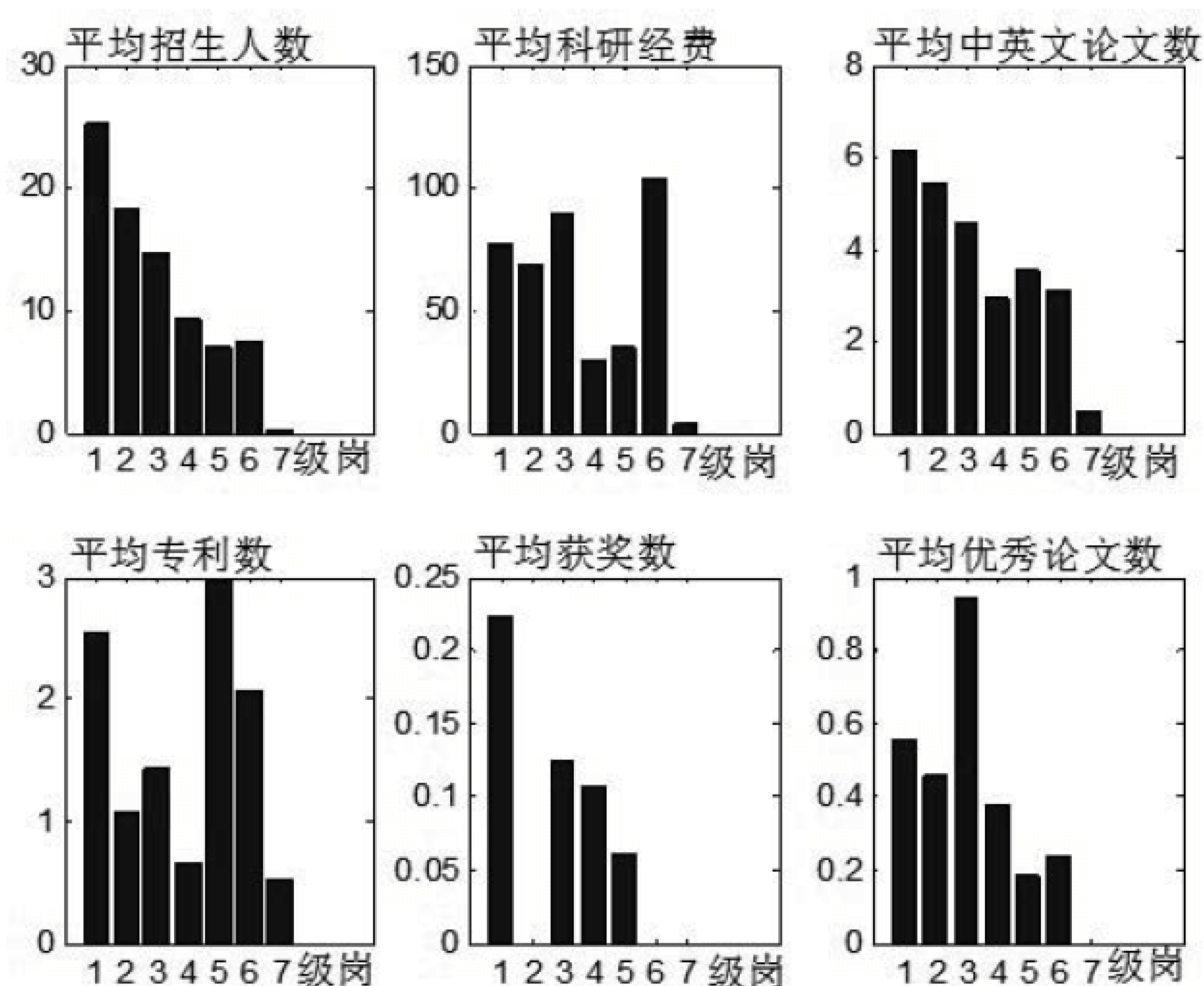


图 23-4　处理后的各项指标与岗位级别间的统计直方图

23.7.3　问题二的模型分析

对于每个岗位的招生人数来说，由图可以分析，岗位级别为一的招生人数越多，为七的招生人数越少。因此，岗位级别越高招生人数越多，岗位级别越低，招生人数越低。

对于科研经费来说，大致的分布情况也是岗位级别越高，经费越多，但是第六级岗位出现了一个峰值。

对于发表中英文论文数来说，级别越高，发表论文数也就越多，也就是说发表论文数和级别成正比。中间第四级别略有下降。

对于申请专利数来说，一级、六级和五级的专利申请数较多，二、三级申请稍少，四、七级申请专利数更少。

对于获奖数来说，也大致呈现一个获奖数和级别高低成正比。只有第二级别出现了一个大幅度的下降。

对于获得优秀论文数量来说，整体趋势呈现出优秀论文数和级别高低成正比，其中，第三级别出现了一个峰值。

23.8 问　题　三

23.8.1　问题三的分析

在问题二的基础之上，由于要对 2012 年的名额进行一个预测分配，而 2012 年的名额分配是根据 2011 年导师的岗位级别、中英文论文发表数等指标来确定的，同理，2011 年的名额分配是根据 2010 年导师的各项指标确定的，依次类推。因此考虑用回归分析的方法，将招生人数定为因变量，将岗位级别、中英文期刊发表的数目、专利申请数量和获奖个数等五项指标定为回归变量，建立多元线性回归方程，根据已有数据，拟合出 2012 年招生名额分配模型。

首先，设招生人数为因变量 y，将回归变量岗位级别、中文期刊发表数目、英文期刊发表数目、专利申请数和获奖个数分别设为 β_1、β_2、β_3、β_4、β_5。建立多元线性回归模型。最后根据所给数据，利用最小二乘估计，求出 β_i 的值，得到回归方程，从而建立对 2012 年名额分配的模型。

23.8.2　问题三模型的建立

1. 建立多元线性回归的一般模型

$$y=\beta_1x_1(u)+\beta_2x_2(u)+\beta_3x_3(u)+\beta_4x_4(u)+\beta_5x_5(u)+\varepsilon$$

其中，ε 为随机误差，且服从于 $N(0,\sigma^2)$。

如题目中所给数据，有 n 组数据，即：

$$\begin{bmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & y_n \end{bmatrix}$$

带入多元线性回归方程可得：

$$\begin{cases} y=\beta_1x_1(u_i)+\beta_2x_2(u_i)+\beta_3x_3(u_i)+\beta_4x_4(u_i)+\beta_5x_5(u_i)+\varepsilon \\ i=1,2,\ldots 354 \end{cases}$$

其中，ε_i 为第 i 次试验的随机误差，且相互独立服从于 $N(0,\sigma^2)$。

2. 回归系数β的最小二乘估计

引入矩阵记号：

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1(u_1) & x_2(u_2) & \ldots & x_m(u_m) \\ x_2(u_1) & x_2(u_2) & \ldots & x_2(u_m) \\ \cdots & & & \\ x_n(u_1) & x_n(u_2) & \ldots & x_n(u_m) \end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

选取 $\boldsymbol{\beta}$ 的一个估计值 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$，使得随机误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的平方和达到最小，即：

$$\min \boldsymbol{\varepsilon}^t = \min(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})^T(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})$$

写成分量形式：

$$Q(\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_m) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \beta_1 x_1(u_i) - \beta_2 x_2(u_i) - \dots - \beta_m x_m(u_i)]^2$$

则：

$$Q(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 \dots \hat{\beta}_m) = \min Q(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$$

注意到 $Q(\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_m)$ 是非负二次式，可微。由多元函数取得极值的必要条件可得 $\dfrac{\partial Q}{\partial \beta_j} = 0\ (j = 1, 2, \dots, m)$，即：

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - \hat{\beta}_1 x_1(u_i) - \hat{\beta}_2 x_2(u_i) - \dots - \hat{\beta}_m x_m(u_i)] x_j(u_i) = 0 (j = 1, 2, \dots m)$$

整理得到：

$$\begin{cases} [\sum_{i=1}^{n} x_1^2(u_i)]\hat{\beta}_1 + [\sum_{i=1}^{n} x_1(u_i)x_2(u_i)]\hat{\beta}_2 + \dots + [\sum_{i=1}^{n} x_1(u_i)x_m(u_i)]\hat{\beta}_m \\ = \sum_{i=1}^{n} x_1(u_i) y_i \\ \dots \\ [\sum_{i=1}^{n} x_1(u_i)x_m(u_i)]\hat{\beta}_1 + [\sum_{i=1}^{n} x_2(u_i)x_m(u_i)]\hat{\beta}_2 + \dots + [\sum_{i=1}^{n} x_m^2(u_i)]\hat{\beta}_m \\ = \sum_{i=1}^{n} x_m(u_i) y_i \end{cases}$$

将 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 带入模型中，得模型的估计：$\hat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{X}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}$。

23.8.3　问题三模型的求解

Step1：根据题目所给的数据，提取出回归变量和因变量，并用相应的字母表示。

Step2：运用最小二乘估计法，计算回归系数（以 2008 年为例），MATLAB 编程程序如下：

```
%级岗合并
clc,clear;
load xsum.mat
n0=size(xsum);
j=1;
for i=1:n0(1,1)
    if xsum(i,3)~=0
        zq(j,:)=xsum(i,:);
        j=j+1;
    end
end
n1=size(zq);
%08 招生人数
for i=1:n1(1,1)
    fpfa08(i,1)=zq(i,3);  %赋值
    fpfa08(i,2)=zq(i,15);
```

```
    fpfa08(i,3)=zq(i,24);
    fpfa08(i,4)=zq(i,30);
    fpfa08(i,5)=zq(i,36);
    fpfa08(i,6)=zq(i,5);
end
for i=1:n1(1,1)
    if fpfa08(i,1)==1
        fpfa08(i,1)=7;    %相对最大权重
    end
    if fpfa08(i,1)==2
        fpfa08(i,1)=6;
    end
    if fpfa08(i,1)==3
        fpfa08(i,1)=5;
    end
    if fpfa08(i,1)==4
        fpfa08(i,1)=4;
    end
    if fpfa08(i,1)==5
        fpfa08(i,1)=3;
    end
    if fpfa08(i,1)==6
        fpfa08(i,1)=2;
    end
    if fpfa08(i,1)==7
        fpfa08(i,1)=1;   %相对最小权重
    end
end
n2=size(fpfa08);                                  %矩阵维数
% Bfpfa08=zscore(fpfa08(:,1:n2(1,2)-1));          %标准化数据矩阵
% Bfpfa08(:,n2(1,2))=fpfa08(:,n2(1,2));

% figure(1),
% subplot(2,3,1)
% plot(fpfa08(:,1),fpfa08(:,6));                  %级岗
% subplot(2,3,2)
% plot(fpfa08(:,2),fpfa08(:,6));                  %英文论文
% subplot(2,3,3)
% plot(fpfa08(:,2),fpfa08(:,6));                  %中文论文
% subplot(2,2,3)
% plot(fpfa08(:,4),fpfa08(:,6));                  %专利数
% subplot(2,2,4)
% plot(fpfa08(:,5),fpfa08(:,6));                  %获奖个数

figure(1),
X=fpfa08(:,1:5);
X=[ones(n2(1,1),1),X];
Y=fpfa08(:,n2(1,2));
[b,bint,r,rint,s]=regress(Y,X);                   %回归分析
rcoplot(r,rint)                                   %残差检验图

%删除一些点
j=1;
for i=1:n1(1,1)
    if i~=1&&i~=115&&i~=21&&i~=33&&i~=41&&i~=78&&i~=91&&i~=105&&i~=131&&i
    ~=162&&i~=173&&i~=214&&i~=215&&i~=220&&i~=234&&i~=242&&i~=244&&i~=
    255&&i~=261&&i~=264&&i~=269&&i~=279
        Cfpfa08(j,:)=fpfa08(i,:);                 %异常点
        j=j+1;
```

```
    end
end
figure(2),
n3=size(Cfpfa08);
X=Cfpfa08(:,1:5);
X=[ones(n3(1,1),1),X];
Y=Cfpfa08(:,n2(1,2));
[b,bint,r,rint,s]=regress(Y,X);       %回归分析
rcoplot(r,rint)                        %残差检验图

%删除一些点
j=1;
for i=1:n3(1,1)
    if i~=64&&i~=69&&i~=87&&i~=92&&i~=106&&i~=128&&i~=122&&i~=134&&i~=136
    &&i~=157&&i~=163&&i~=164&&i~=201&&i~=194&&i~=205&&i~=220&&i~=223&&i~=
    234&&i~=261&&i~=235&&i~=239&&i~=279&&i~=316
        CCfpfa08(j,:)=Cfpfa08(i,:);  %异常点
        j=j+1;
    end
end
figure(3),
n3=size(CCfpfa08);
X=CCfpfa08(:,1:5);
X=[ones(n3(1,1),1),X];
Y=CCfpfa08(:,n2(1,2));
[b,bint,r,rint,s]=regress(Y,X);       %回归分析
rcoplot(r,rint)                        %残差检验图
```

运行程序输出结果如表 23-6 所示。

表 23-6　2008 年研究生招生人数回归方程系数估计结果

回 归 系 数	回归系数估计值	回归系数置信区间
β_0	-0.0177	[-0.2465 0.211]
β_1	0.4256	[0.3298 0.5215]
β_2	0.3687	[-0.387 1.1243]
β_3	-0.0032	[-0.1181 0.1118]
β_4	-0.06	[-0.1605 0.0406]
β_5	4.4631	[2.9597 5.9665]
$R^2=0.2741$、$F=23.861$、$p<0.0001$、$s^2=1.1137$		

其中，R 表示相关系数，F 表示统计量值，p 表示统计量所对应的概率。由表 23-6 中的结果可知，R^2 很小，再分析其残差，残差图如图 23-5 所示。

从残差图 23-5 中可以看出，异常值较多，因此可将异常点剔除。具体的异常点如表 23-7 所示。

表 23-7　2008 年研究生招生人数回归方程检验所得异常点

1	21	33	41	78	91	105	115	131	162	173
214	215	220	234	242	244	255	261	264	269	279

将表 23-7 中的 24 个异常点数据剔除后，再次进行回归分析，利用 MATLAB 软件编程，可得回归分析结果如表 23-8 所示。

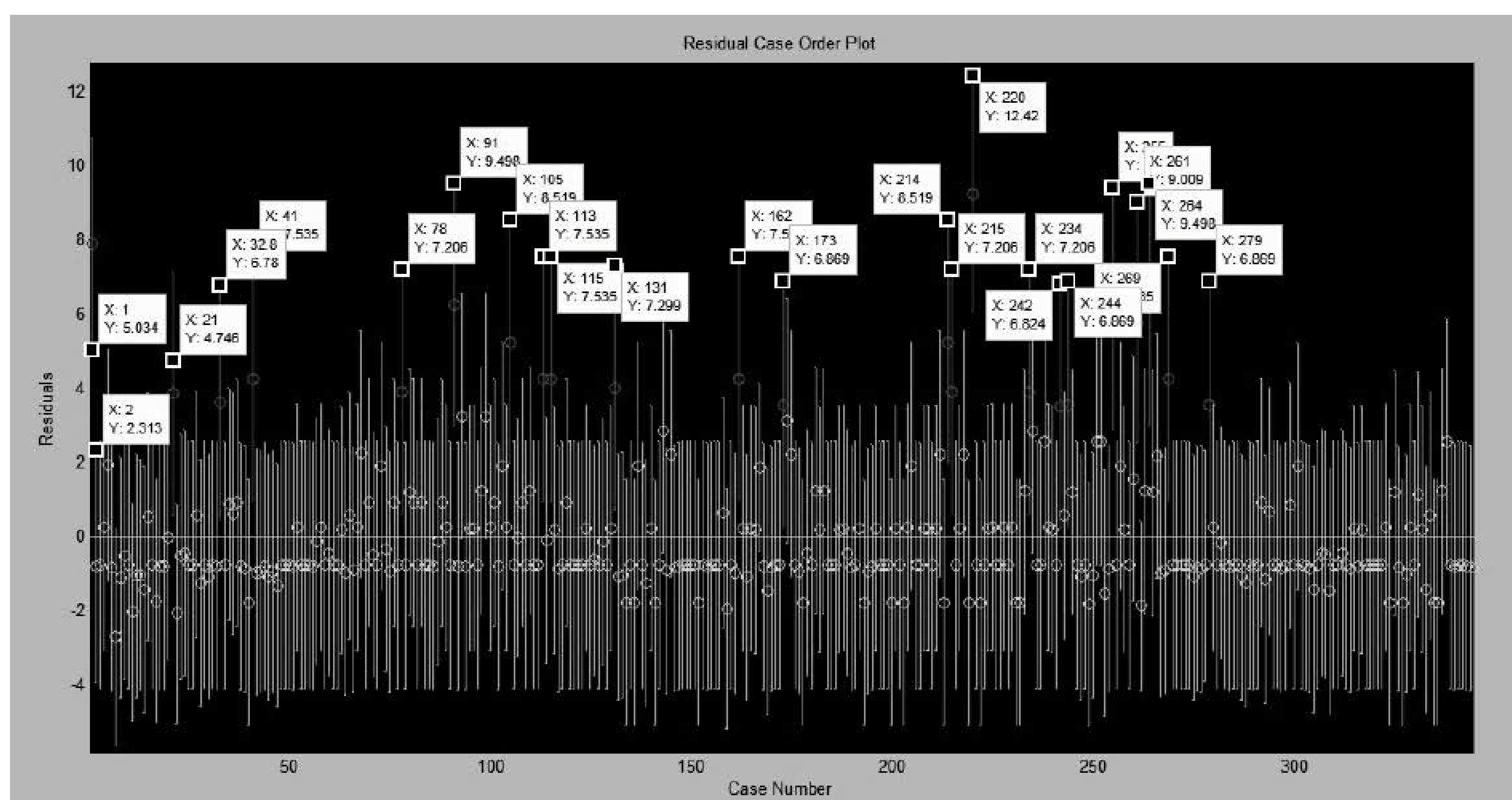


图 23-5　2008 年研究生招生人数回归方程的残差检验图

表 23-8　第一次剔除异常点后回归方程系数估计结果表

回 归 系 数	回归系数估计值	回归系数置信区间
β_0	-0.0177	$[-0.2465\ \ 0.211]$
β_1	0.4256	$[0.3298\ \ 0.5215]$
β_2	0.3687	$[-0.387\ \ 1.1243]$
β_3	-0.0032	$[-0.1181\ \ 0.1118]$
β_4	-0.06	$[-0.1605\ \ 0.0406]$
β_5	4.4631	$[2.9597\ \ 5.9665]$
$R^2=0.2741$、$F=23.861$、$p<0.0001$、$s^2=1.1137$		

相应的残差图如图 23-6 所示。

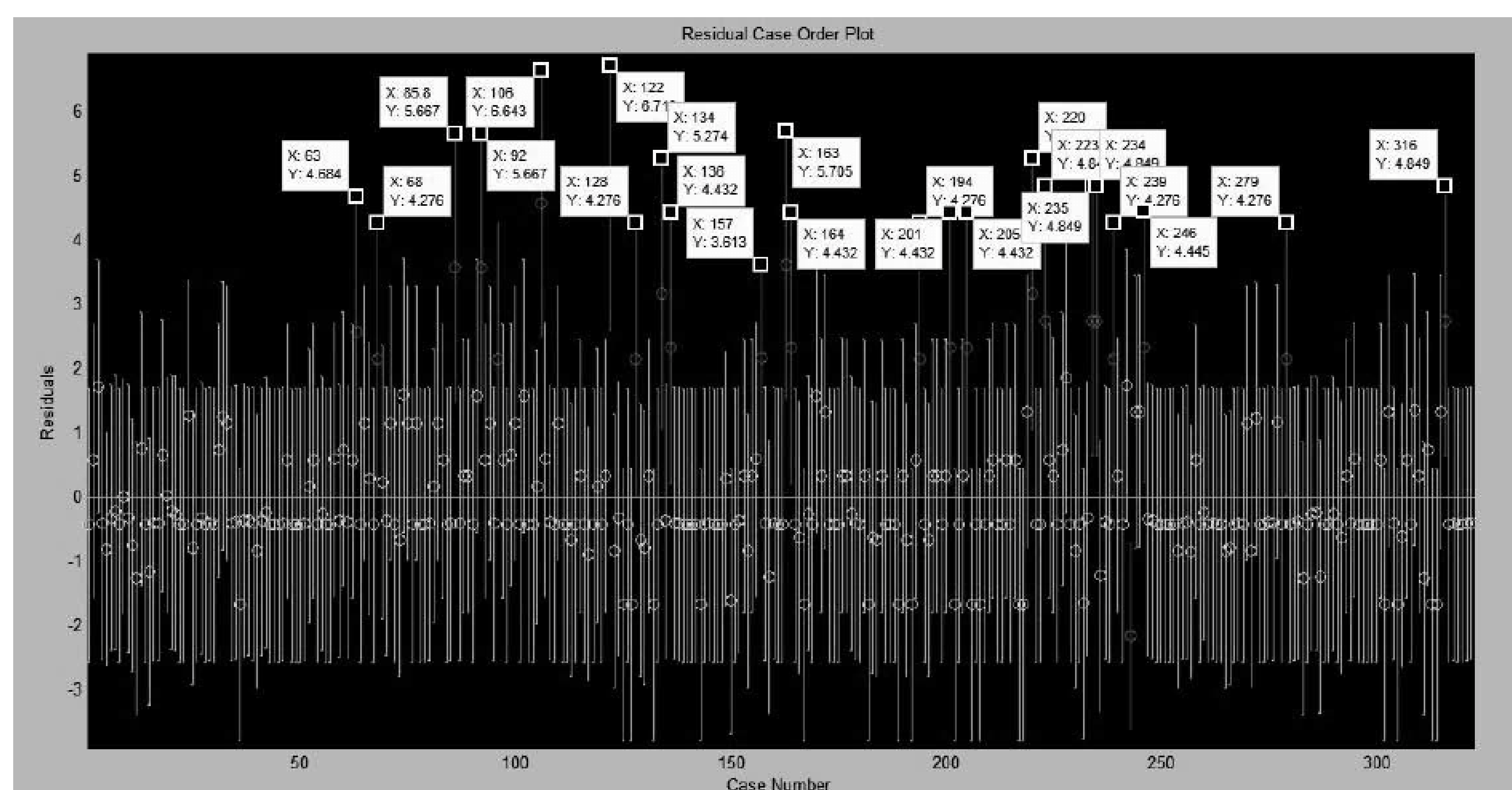


图 23-6　第一次剔除异常点后回归方程的残差检验图

由回归分析结果及残差图 23-6 可看出，回归效果仍然不理想，还是有很多异常点，异常点如表 23-9 所示。

表 23-9　第一次剔除异常点后的异常点

63	68	86	92	106	128	122	134	136	157	163	
164	194	201	205	220	223	234	235	239	246	279	316

再次将这 23 个异常点删除后，进行回归分析，然后再删除，如此循环多次，最终得到回归系数估计值、置信区间、检验统计量及残差图，如表 23-10 所示（2008 年）。

表 23-10　2008 年研究生招生人数最终回归方程系数

回 归 系 数	回归系数估计值	回归系数置信区间
β_0	-0.1884	[-0.3128 -0.0639]
β_1	0.3112	[0.2571 0.3652]
β_2	0.43	[0.0147 0.8452]
β_3	0.0049	[-0.0594 0.0692]
β_4	-0.0336	[-0.086 0.0189]
β_5	2.9437	[1.8669 4.0205]
$R^2 = 0.405$、$F = 35.8018$、$p < 0.0001$、$s^2 = 0.2941$		

得到的残差检验图如图 23-7 所示。

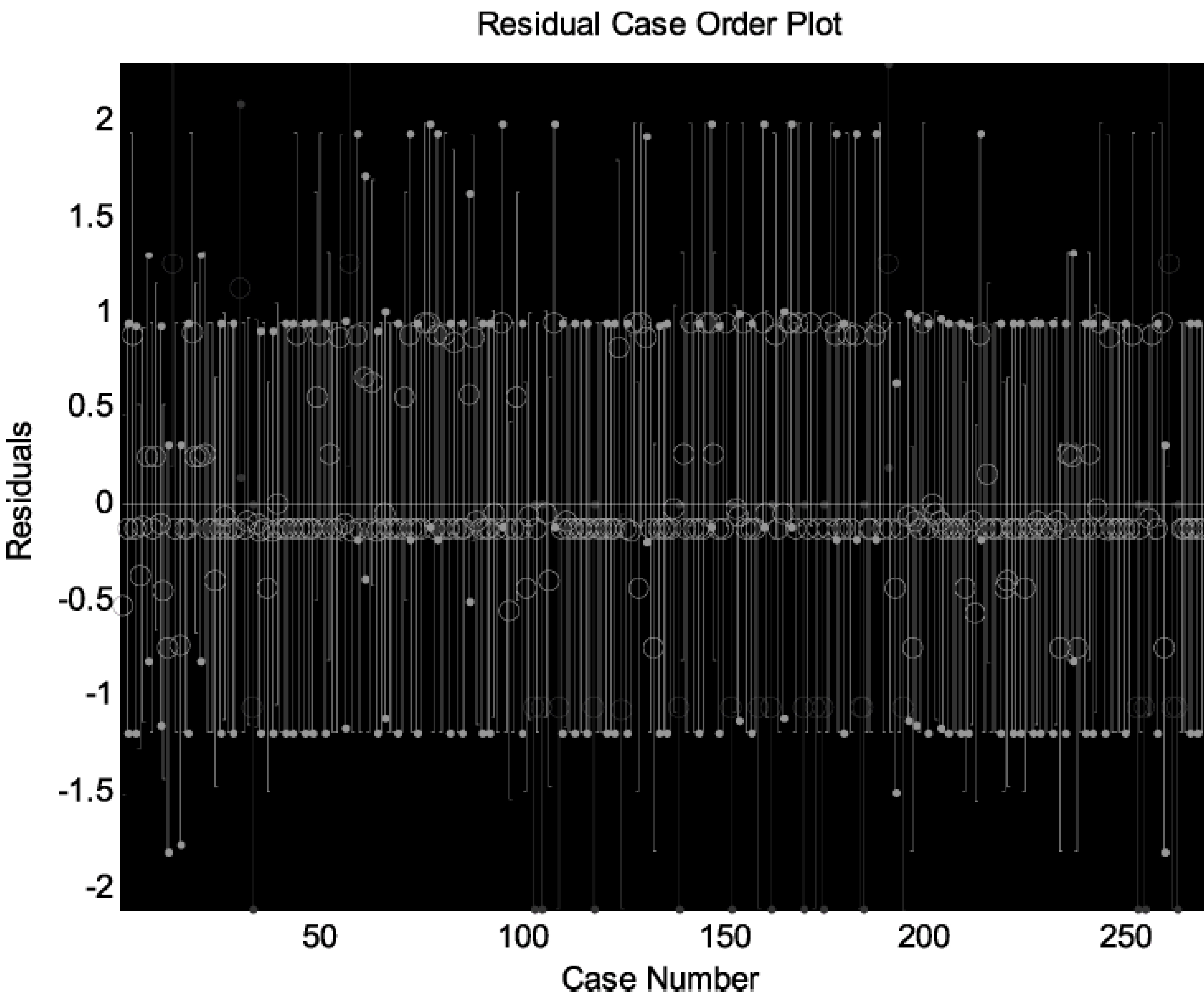


图 23-7　2008 年研究生招生人数回归方程最终残差检验图

23.8.4　问题三结果分析与验证

1．问题三结果分析

将 23.8.3 小节中求出的回归系数估计值代入多元回归方程可得 2008 年～2012 年的回归方程，如表 23-11 所示。

表 23-11　2008 年～2012 年研究生招生名额与各项指标的回归方程

年份	研究生名额与岗位级、英中论文数、专利数、获奖数关系式
2008	$\hat{y}_{rs} = -0.1884 + 0.3112x_1 - 0.43x_2 + 0.0049x_3 - 0.0336x_4 + 2.9437x_5$
2009	$\hat{y}_{rs} = -0.3131 + 0.5455x_1 + 0.3073x_2 + 0.1009x_3 + 0.0034x_4 + 0.1311x_5$
2010	$\hat{y}_{rs} = 0.0344 + 0.5442x_1 + 0.2518x_2 + 0.1768x_3 + 0.0417x_4 + 0.3944x_5$
2011	$\hat{y}_{rs} = 0.0753 + 0.5448x_1 + 0.0472x_2 + 0.0328x_3 + 0.1366x_4 + 0.045x_5$
2012	$\hat{y}_{rs} = -0.09795 + 0.4864x_1 + 0.0441x_2 + 0.0789x_3 + 0.037x_4 + 0.8786x_5$

将各指标数据带入2012年的回归方程可得2012年预分配方案，部分结果如表23-12所示。

表 23-12　2012 年各岗位的导师分配名额

导师编号	岗位级别	2012 年分配名额	导师编号	岗位级别	2012 年分配名额
1	1	4	289	7	1
2	7	1	290	7	1
3	7	1	291	7	1
4	7	1	292	6	1
5	2	3	293	6	1
6	7	1	294	6	1
7	5	2	295	7	1
8	7	1	296	7	1
…	…	…	…	…	…
281	7	1	337	4	2
282	6	1	338	3	3
283	7	1	339	7	1
284	7	3	340	7	1
285	7	1	341	7	1
286	7	1	342	7	1
287	2	1	343	7	1
288	2	1	344	7	1

2. 问题三结果验证

将各指标数据代入招生回归方程中，得出预测值，然后与实际招生值进行比较验证，2010 年和 2011 年的预测对比图分别如图 23-8 和图 23-9 所示。

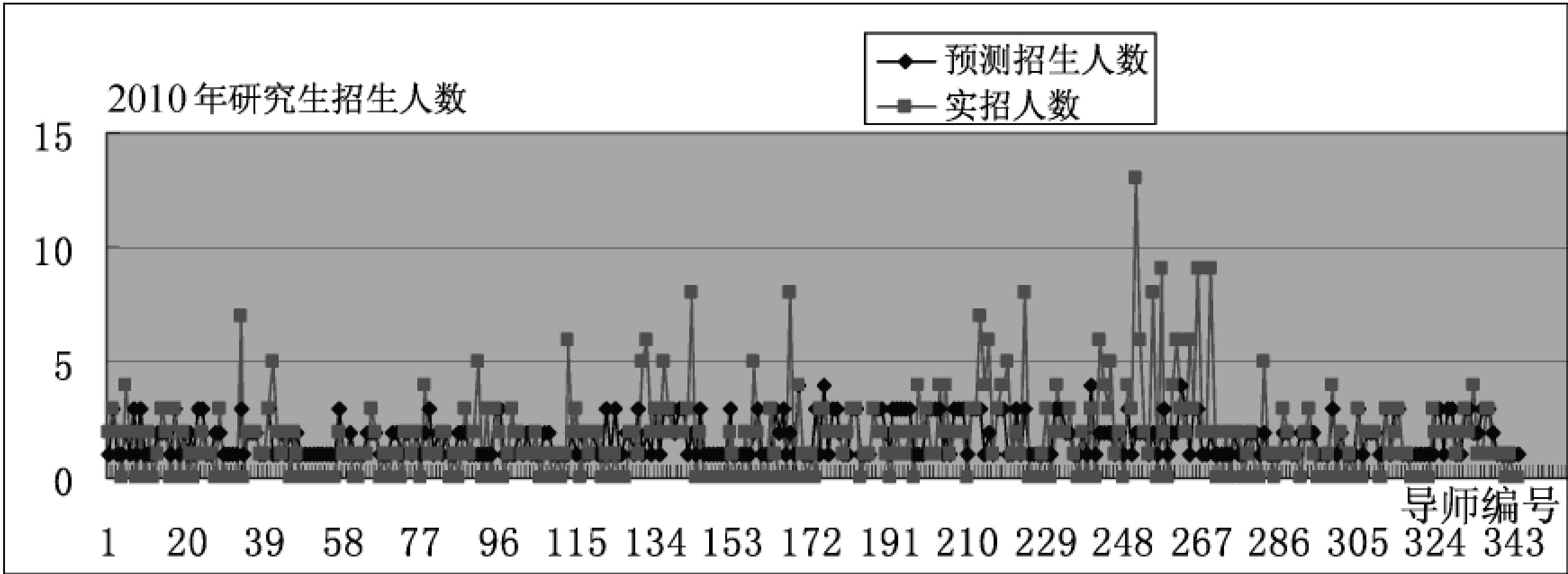


图 23-8　2010 年预测值和实际值比较图

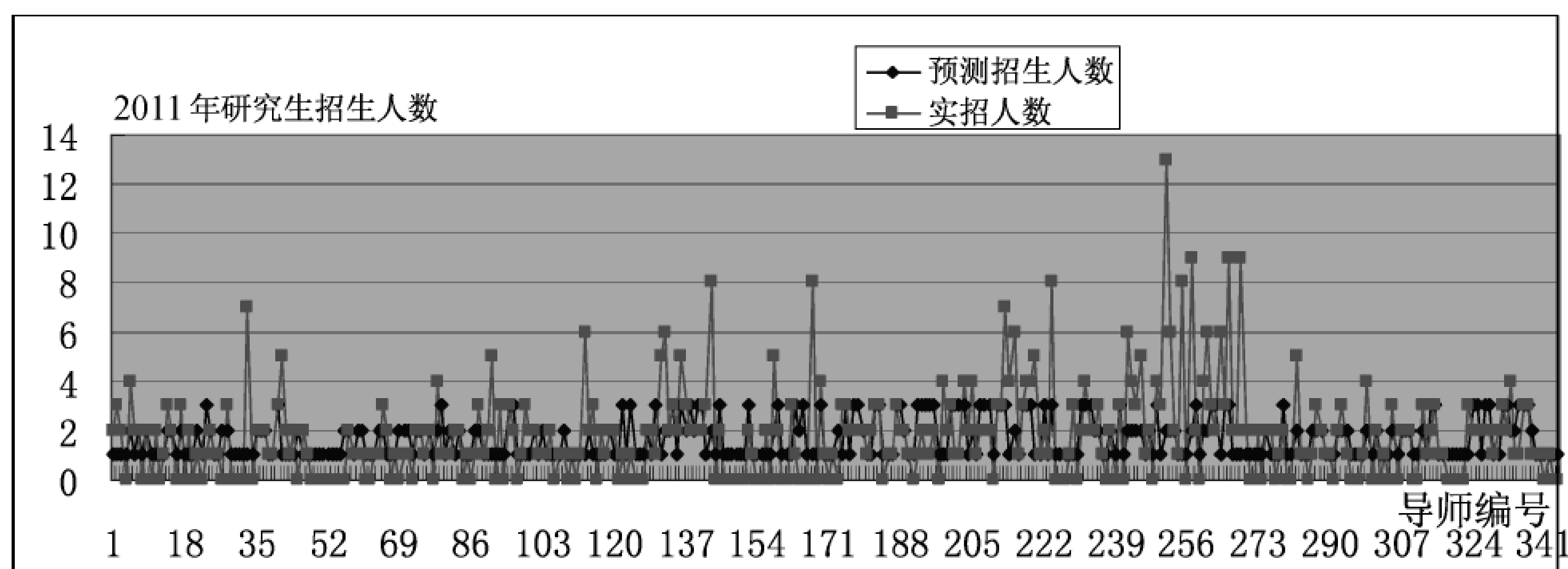


图 23-9　2011 年研究生招生预测值和实际值比较图

23.9　问　题　四

23.9.1　问题四的分析

要求考虑学科特点及学科发展的需要对研究生招生指标进行差异分配。在问题三中，我们已根据第二问的结论建立了招生人数与岗位级别、中英文期刊发表数、专利申请数和获奖个数等五个指标变量间的多元线性回归模型，并拟合出了 2012 年的招生名额分配。因此，问题四可在问题三的基础上考虑学科因素，将学科变量添加到回归方程中，建立体现学科差异的招生指标分配模型。

首先，进行回归分析，建立多元线性回归方程。再进行参数估计，计算出回归系数估计值。最后，可建立研究生招生指标的名额分配模型，并对 2012 年的名额分配进行调整。

23.9.2　问题四模型的建立

1．数据预处理（学科变量的定量化）

由于学科有 A～K 个，是一分类变量，应先对其进行量化处理，学科间的差异与研究生总人数、科研总经费、发表英文论文合计数、发表中文论文合计数、申请专利总数及获奖总数有关，因此可对这几项指标进行赋权重。利用研究生总人数和科研总经费等指标的数据间接地计算出各个学科的量化值，对各指标进行简单的线性加权即得学科指标值，线性加权函数为：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{6}w_i x_i \quad (i=1,2\ldots6)$$

研究生总人数对各个学科的影响最大，因此，其占得比重也最大，可对其赋权重 0.35。其余各指标的权重如表 23-13 所示。

表 23-13　计算学科量化值各指标的权重

研究生总人数	科研总经费	英文论文合计	中文论文合计	专利总数	获奖总数
0.35	0.2	0.1	0.1	0.2	0.05

2．多元线性回归方程

根据问题四的分析，只需在问题三的基础上增加学科变量。建立六元线性回归方程：

$$y=\beta_1x_1(u)+\beta_2x_2(u)+\beta_3x_3(u)+\beta_4x_4(u)+\beta_5x_5(u)+\beta_6x_6(u)+\varepsilon$$

其中，x_1、$x_2 \ldots x_5$的含义同问题三中的含义，x_6为增加的学科变量；ε为随机误差，且服从于$N(0,\sigma^2)$。

如题目中所给出的n组数据，即：

$$\begin{bmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & y_n \end{bmatrix}$$

将其带入六元线性回归方程可得：

$$\begin{cases} y_i=\beta_1x_1(u_i)+\beta_2x_2(u_i)+\beta_3x_3(u_i)+\beta_4x_4(u_i)+\beta_5x_5(u_i)+\beta_6x_6(u_i)+\varepsilon_i \\ i=1,2,\ldots 354 \end{cases}$$

其中，ε_i为第i次试验的随机误差，且相互独立服从于$N(0,\sigma^2)$。

3．回归$\boldsymbol{\beta}$系数的最小二乘估计

引入矩阵记号：

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1(u_1) & x_2(u_2) & \ldots & x_m(u_m) \\ x_2(u_1) & x_2(u_2) & \ldots & x_2(u_m) \\ \cdots & & & \\ x_n(u_1) & x_n(u_2) & \ldots & x_n(u_m) \end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

选取$\boldsymbol{\beta}$的一个估计值$\hat{\boldsymbol{\beta}}$，使得随机误差$\boldsymbol{\varepsilon}$的平方和达到最小，即：

$$\min \boldsymbol{\varepsilon}^t=\min(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})^T(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})$$

写成分量形式：

$$Q(\beta_1,\beta_3,\ldots,\beta_m)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\beta_1x_1(u_i)-\beta_2x_2(u_i)-\ldots-\beta_mx_m(u_i)]^2$$

则：

$$Q(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2\ldots\hat{\beta}_m)=\min Q(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m)$$

注意到$Q(\beta_1,\beta_3,\ldots,\beta_m)$是非负二次式，可微，由多元函数取得极值的必要条件可得$\dfrac{\partial Q}{\partial \beta_j}=0\ (j=1,2,\ldots,m)$，即：

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-\hat{\beta}_1x_1(u_i)-\hat{\beta}_2x_2(u_i)-\ldots-\hat{\beta}_mx_m(u_i)]x_j(u_i)=0(j=1,2,\ldots m)$$

整理得到：

$$\begin{cases}[\sum_{i=1}^{n} x_1^2(u_i)]\hat{\beta}_1 + [\sum_{i=1}^{n} x_1(u_i)x_2(u_i)]\hat{\beta}_2 + \dots + [\sum_{i=1}^{n} x_1(u_i)x_m(u_i)]\hat{\beta}_m \\ = \sum_{i=1}^{n} x_1(u_i)y_i \\ \cdots \\ [\sum_{i=1}^{n} x_1(u_i)x_m(u_i)]\hat{\beta}_1 + [\sum_{i=1}^{n} x_2(u_i)x_m(u_i)]\hat{\beta}_2 + \dots + [\sum_{i=1}^{n} x_m^2(u_i)]\hat{\beta}_m \\ = \sum_{i=1}^{n} x_m(u_i)y_i \end{cases}$$

将 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 代入该式，得模型的估计：$\hat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{X}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}$ 。

23.9.3　问题四模型的求解

Step1：将学科指标进行量化处理，利用线性加权法即六元线性回归方程，通过 MATLB 编程可求得学科指标的量化值，如表 23-14 所示。

表 23-14　学科量化值及各指标值

学科	学科量化值	研究生总人数	科研总经费	英文论文合计	中文论文合计	专利总数	获奖总数
A	867.89	289	3474.71	47	203	234	0
B	126.73	89	366.40	8	39	87	4
C	329.29	260	1144.20	2	92	0	1
D	76.89	90	191.95	32	8	15	0
E	401.37	176	1632.84	28	27	38	2
F	189.26	123	656.55	12	110	13	2
G	283.52	167	1073.09	15	52	18	3
H	241.01	362	567.81	0	4	1	3
I	570.97	452	1958.58	32	94	41	5
J	980.00	211	4402.25	26	127	51	4
K	270.17	145	1019.60	17	99	19	2

Step2：利用最小二乘估计法通过 MATLAB 编程，求回归系数（以 2008 年为例），如表 23-15 所示。

表 23-15　回归系数估计值及检验表

回 归 系 数	回归系数估计值	回归系数置信区间
β_0	0.0	$[-0.1014\ \ 0.1014]$
β_1	0.2167	$[0.1139\ \ 0.3196]$
β_2	-0.0017	$[-0.1051\ \ 0.1017]$
β_3	0.0406	$[-0.0661\ \ 0.1472]$
β_4	0.1003	$[-0.0042\ \ 0.2048]$
β_5	0.01728	$[0.0693\ \ 0.2764]$
β_6	-0.0978	$[-0.204\ \ 0.0084]$
$R^2 = 0.1012$ 、 $F = 6.3263$ 、 $p < 0.0001$ 、 $s^2 = 0.9148$		

其中，R 表示相关系数，F 表示统计量值，P 表示统计量所对应的概率。

再分析残差，残差图如图 23-10 所示。

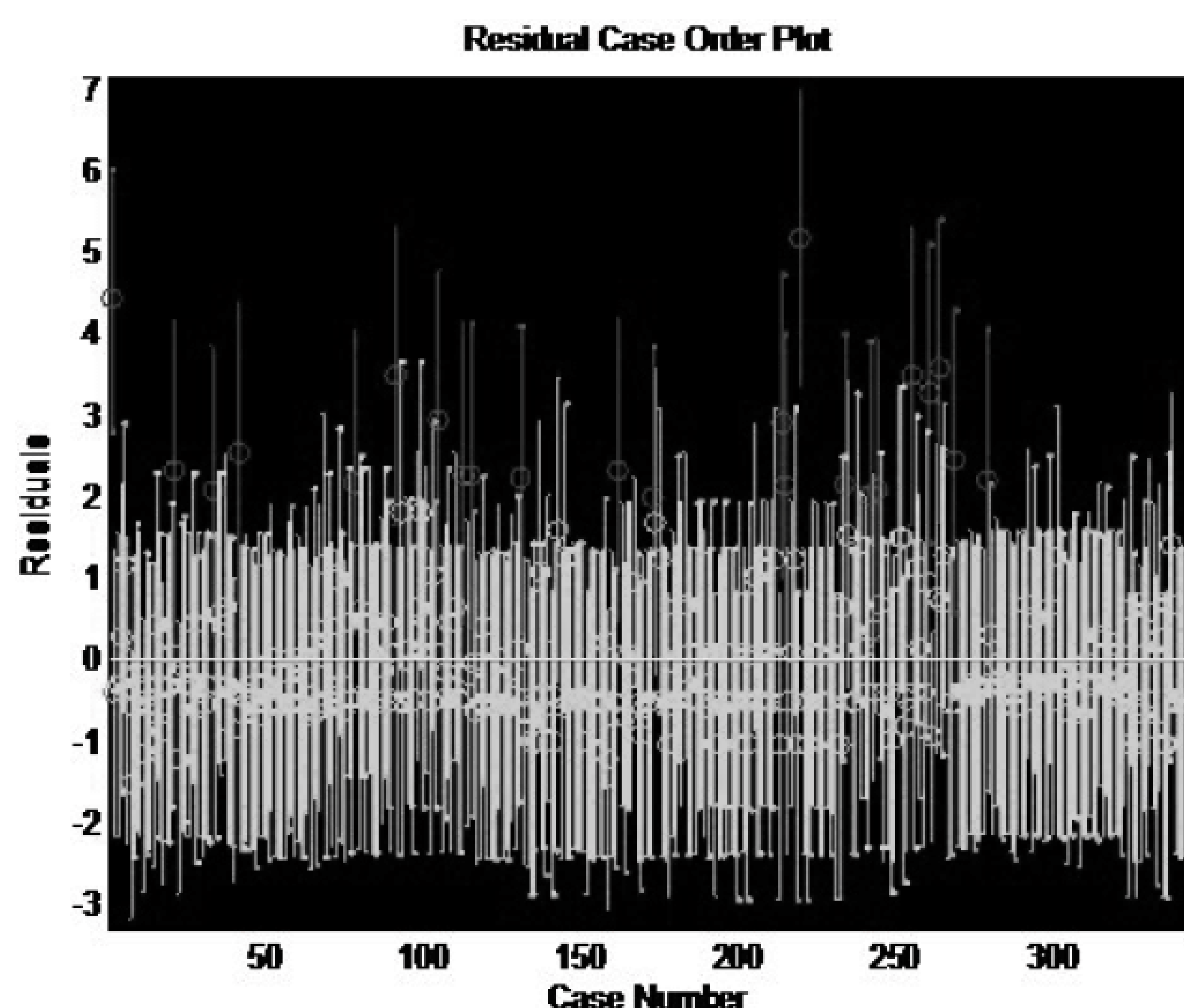


图 23-10　2008 年研究生招生回归方程残差检验图

从回归分析结果表 23-15 及残差图 23-10 可看出，回归效果较差，存在较多异常点，如表 23-16 所示。

表 23-16　2008 年招生回归方程残差检验的异常点数据

1	21	33	41	78	91	105	113	115	131	162	
173	214	215	220	234	242	244	255	261	264	269	279

将表 23-16 中的 23 个异常点剔除后，不断地进行回归分析后，可得最终的回归分析结果及残差图，如图 23-11 和表 23-17 所示。

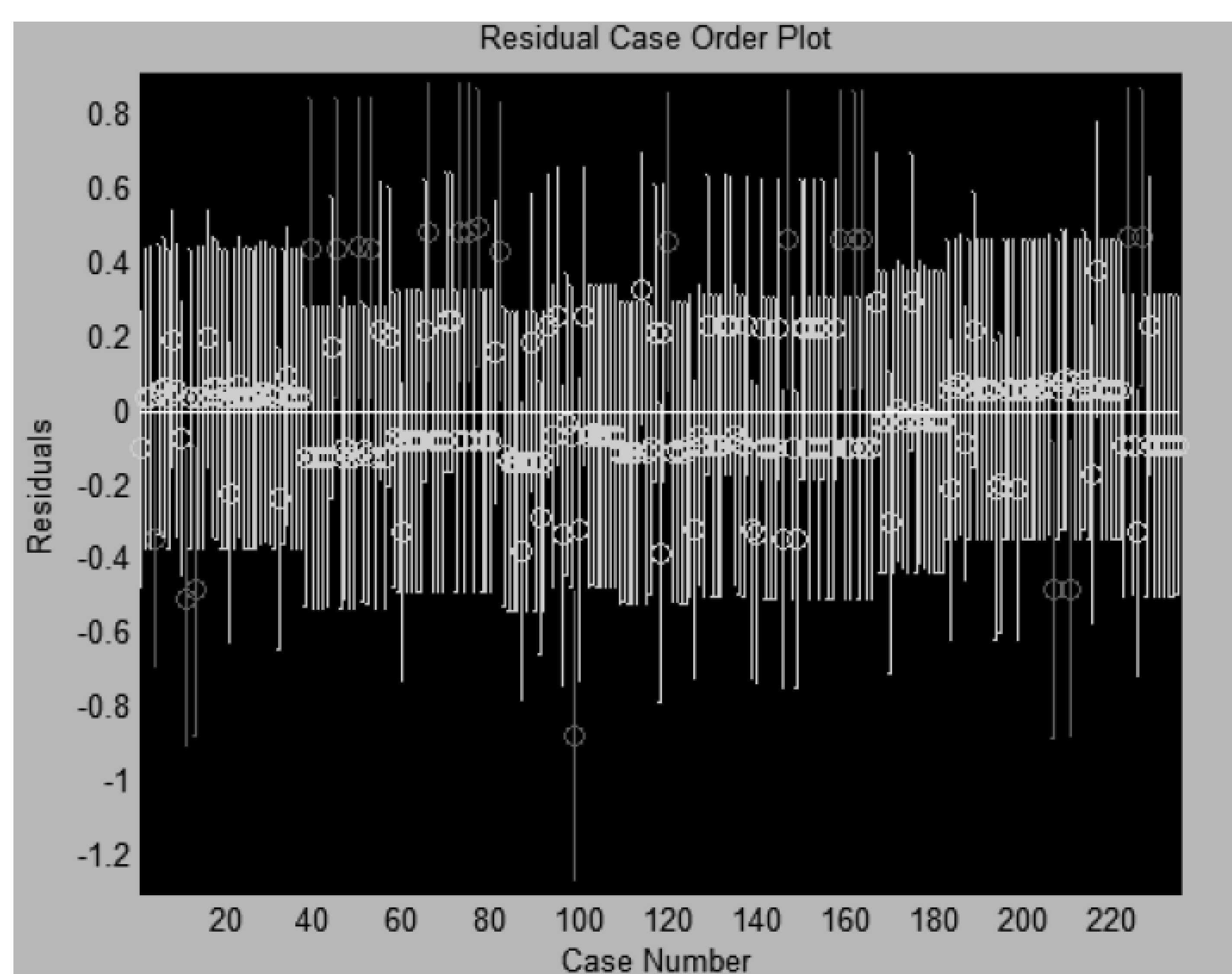


图 23-11　多次回归后最终残差图

表 23-17　2008 年招生名额最终回归方程系数

回 归 系 数	回归系数估计值	回归系数置信区间
β_0	-0.3578	$[-0.3854\ \ -0.3303]$
β_1	0.3221	$[0.2926\ \ 0.3515]$
β_2	0.023	$[-0.0029\ \ 0.0687]$
β_3	-0.0019	$[-0.0302\ \ 0.0264]$
β_4	-0.0187	$[-0.0448\ \ 0.0075]$
β_5	0	$[0\ \ 0]$
β_6	-0.0658	$[-0.0918\ \ -0.0398]$
$R^2=0.6942$、$F=103.986$、$p<0.0001$、$s^2=0.0432$		

Step3：2012 年研究生招生名额的确定。将各指标数据代入 2012 年研究生招生的回归方程中，预测出各导师的名额分配，即分配方案。

23.9.4　问题四结果分析与验证

1. 问题四结果分析

将 23.9.3 小节中求出的回归系数估计值可得 2008 年～2012 年的回归方程，如表 23-18 所示。

表 23-18　2008 年～2012 年研究生招生名额与各项指标的回归方程

年份	研究生名额与岗级、英/中论文数、专利数、获奖数、学科关系式
2008	$y_{rs}=-0.3578+0.3221x_1+0.023x_2-0.0019x_3-0.0187x_4+0x_5-0.0658x_6$
2009	$y_{rs}=-0.3322+0.39x_1+0.0219x_2+0.0754x_3-0.0026x_4+0.0084x_5+0.0172x_6$
2010	$y_{rs}=-0.3392+0.3812x_1+0.0889x_2+0.1293x_3+0.0378x_4+0.0257x_5+0.0337x_6$
2011	$y_{rs}=-0.3038+0.3505x_1+0.0118x_2+0.017x_3+0.0555x_4+0.0087x_5+0.0237x_6$
2012	$y_{rs}=-0.3332+0.3609x_1+0.0364x_2+0.0549x_3+0.018x_4+0.0107x_5+0.0022x_6$

将各指标带入 2012 年的回归方程可得 2012 年预分配方案，部分结果如表 23-19 所示。

表 23-19　2012 年各导师的名额分配方案

导师编号	学科名称	岗位级别	2012 年分配名额	导师编号	学科名称	岗位级别	2012 年分配名额
1	A	1	1	289	J	7	1
2	A	7	2	290	J	7	1
3	A	7	1	291	J	7	1
4	A	7	1	292	J	6	2
5	A	2	2	293	J	6	2
6	A	7	1	294	J	6	2
7	A	5	2	295	J	7	1
8	A	7	1	296	J	7	1
…		…		…		…	
281	J	7	1	337	K	4	3
282	J	6	2	338	K	3	2

续表

导师编号	学科名称	岗位级别	2012 年分配名额	导师编号	学科名称	岗位级别	2012 年分配名额
283	J	7	1	339	K	7	1
284	J	7	1	340	K	7	1
285	J	7	1	341	K	7	1
286	J	7	1	342	K	7	1
287	J	2	2	343	K	7	1
288	J	2	2	344	K	7	1

2．问题四结果验证

将各指标数据代入招生回归方程中，得出预测值，然后与实际招生值进行比较验证，2010 年和 2011 年的预测对比图分别如图 23-12 和图 23-13 所示。

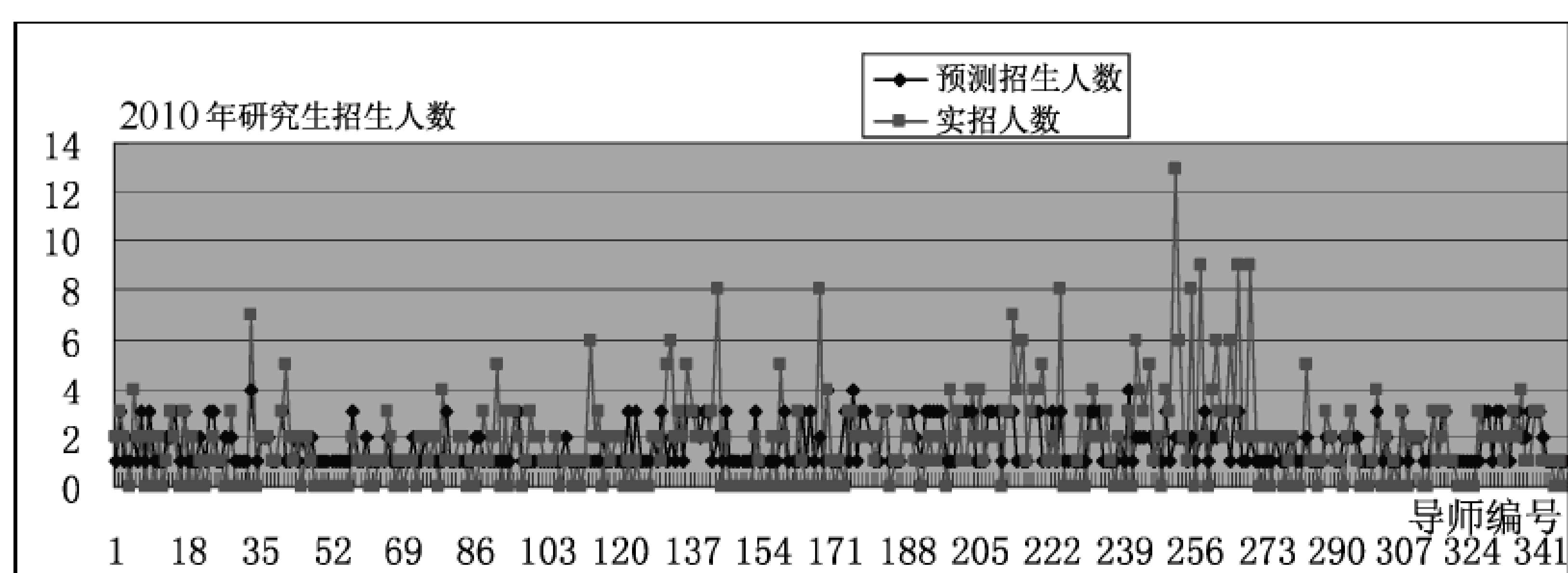


图 23-12　2010 年研究生招收人数预测值与实际值比较图

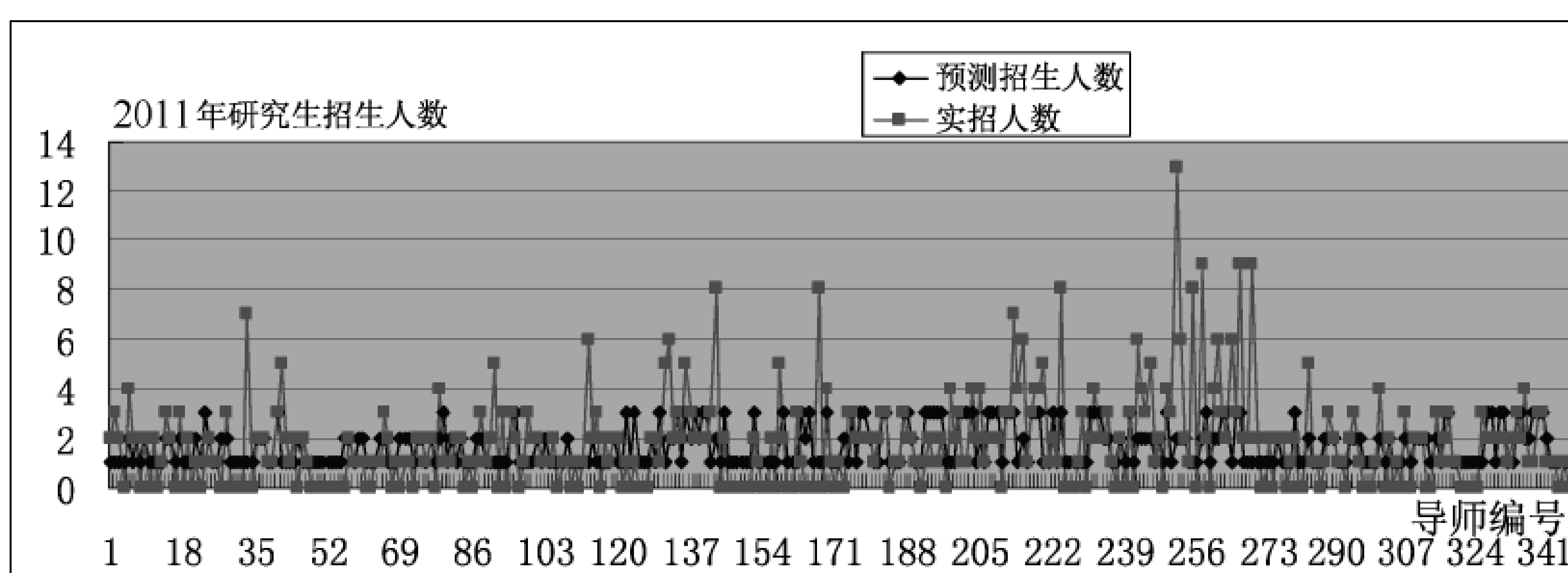


图 23-13　2011 年研究生招收人数预测值与实测值比较图

从图 23-12 和图 23-13 对比图可看出，回归分析的预测结果还是较合理的。

23.10　问　题　五

由前面的问题分析可以得到，名额的分配和招生人数、科研经费、发表中英文论文数、申请专利、获奖数与获得优秀论文数量有着一定的联系。这些都是导师在带领研究生学习期间的相关指标，对于名额分配的影响显然还不够。

因此，我们可以考虑加入研究生毕业后的就业情况，从一定程度上也可以反映导师带领研究生的能力和质量，从而影响名额的分配。

就业情况包括了研究生的就业效果和企业的反馈效果。就业率可以直接将当年研究生的就业单位进行一个层次的划分，根据实际情况分别量化，得到一个新的资本。而企业反馈效果则是根据研究生工作一段时间后，所在企业对其进行的评价，进行量化，得到第二个指标。

同时，导师带领研究生的名额情况还应该考虑一个资源优化的问题，避免有的导师的研究生名额不满，而有些研究生由于名额竞争太激烈而落榜。因此，将每年研究生的报名人数作为第三个指标。

根据三个新的指标，首先将企业反馈这个指标，如“满意”、“比较满意”和“不满意”；以及研究生就业效果，如“好工作”、“较好工作”和“一般工作”进行量化，然后对这三个量化的指标进行标准化处理。将标准化处理后的数据，连同第三问中的七个指标一起进行线性回归模型的建立。将这七个指标作为回归变量，研究生招收名额作为因变量，根据已有的数据建立一个多元线性回归模型。

通过建立的多元线性回归模型，带入 2011 年的各指标数据，可以对 2012 年的研究生招生人数进行预测。并且，结果相对于问题三，其模型更加的完善，结果更加的合理。

23.11　模型的评价与推广

23.11.1　模型的评价

对于问题一，我们的巧妙在于进行聚类的时候用了两种方法。第一种是将所求的样本和同类学科进行比较，若全部是一个级别，那所求样本属于该级别。若同一类中等级有差异，则所求样本和该类中距离较近的样本属于同一岗位级别。第二种是将所求样本和所有的样本进行比较，计算欧氏距离，得到一个最小值，则所求样本和最近欧氏距离样本属于同一岗位级别。优点在于比较性地进行建模，可以得到更加合理的结果。

对于问题二，我们主要是通过绘制岗位等级和其他几种指标的一个关系图来对其进行规律统计。缺点在于并没有建立完善的模型，通过关系图进行规律的统计和分析显得有些不准确，不具体。

对于问题三，以招生人数为因变量，其余七个指标为回归变量建立回归模型，对 2012 年的人数进行预测。优点在于全面地利用了各个数据，缺点在于由于年份太少，或许会导致预测结果不太合理。

对于问题四，考虑到学科的发展，在进行学科这个指标的量化过程中，比较巧妙地一点是通过对其余的指标进行权重赋予，线型加权求得每个学科的量化值。

对于问题五，结合实际，确立还需要的一些指标数据，采用和之前问题类似的办法，建立更为合理的分配方案。

23.11.2　模型的推广

本章模型针对研究生名额分配问题，主要采取的思路是利用线性回归模型进行预测。在拥有更多的指标数据的前提下，模型的预测会更加的合理。同时，在拥有更多年份的招生配额和指标数据的情况下，建立的模型方程也会更加的准确，预测的结果也更加地具有参考意义。

第 24 章　碳排放约束下的江苏省煤炭消费量预测

本章主要讨论江苏省煤炭消费量预测的问题，进而可以起到一个参考作用，应用到全国各省市煤炭消费量预测问题。

学习目标：

（1）学习和掌握 MATLAB 双立方插值的基本功能；

（2）掌握 MATLAB 多元线性回归等方法；

（3）掌握 MATLAB 常用 DW 检验等方法；

（4）学习和提高数据挖掘等能力。

24.1　问题的提出

江苏省的国土面积仅占全国 1.1%，却承载着占全国 5.6%的人口，并且创造了全国 10%的经济总量。但是，江苏省经济快速发展已经给环境质量造成巨大的压力，并且付出了沉重的资源和环境代价，发展受到环境强烈的约束正在日益体现出来。江苏省的资源严重短缺，从煤炭储量来看，2010 年基础储量 14.23 亿吨，查明资源储量 36.01 亿吨，仅占全国的 2.7%。2010 年江苏省煤炭产量为 2090 万吨，消费量为 23100 万吨。由于我国煤炭生产基地逐步西移，使得江苏未来煤炭组织能力进一步降低，从煤炭的产量和需求量来看，江苏的经济增长与煤炭资源紧缺的矛盾突出。从环境污染的情况来看，江苏单位经济产值的主要污染物排放量均超过全国平均水平，江苏省面临的能源瓶颈和环境承载力等环境资源约束日益增多。江苏省煤炭资源匮乏而煤炭消费总量逐年增长，煤炭消耗问题成为影响江苏经济发展的重要因素。因此，解决好未来江苏巨大的煤炭供需缺口，分析预测江苏未来的煤炭消费，可以为江苏战略性能源开发供应提供依据，从而保证全省经济社会的绿色发展。

基于此，请根据附录 1（见程序文档）中的数据，结合你们收集到的相关资料，建立数学模型，完成以下问题：

（1）影响江苏省煤炭消费总量以及第一、二和三产业煤炭消费量的指标有哪些？各指标对江苏省煤炭消费总量以及第一、二和三产业煤炭消费量的影响情况怎样？江苏省煤炭消费总量及其占能源消费量的比重，第一、二和三产业煤炭消费量的变动对节能、减排和经济增长等指标产生怎样的影响？

（2）在整个碳排放约束下，考虑节能目标和江苏省经济发展目标，建立数学模型，对“十二五”期间及未来十年江苏省主要能源（煤炭、石油和天然气等）消费的结构进行预测

和优化。

（3）在整个碳排放约束下，考虑节能目标和江苏省经济发展目标，建立数学模型，对“十二五”期间及未来十年江苏省煤炭消费总量以及第一、二和三产业煤炭消费量进行预测和优化。请对预测模型和预测结果的合理性进行检验和说明。

（4）根据分析的结果和结论，对江苏省节能、减排目标的实现路径及能源结构调整、煤炭消费政策等方面提出意见和建议。

24.2 摘　要

本章针对江苏省煤炭消费量的预测问题，采用了相关性分析、主成成分分析建立多元线性回归模型及优化模型，对在碳排放约束下的江苏省煤炭消费量进行预测。

针对问题一，找出现有数据中和第一、二、三产业及煤炭消耗总量有关的因子，进行相关性分析和主成成分分析，找出影响煤炭消耗的指标。得到影响煤炭消耗总量的指标有地区生产总值和地区 GDP 增长率。影响第一、二、三产业耗煤量的指标有 GDP 及各自产业所对应的生产总值指数。然后针对第二小问，分别以第一、二、三产业及总共的煤炭消费量为因变量，以相应的影响指标为回归变量，建立多元线性回归模型，求出回归方程，通过偏相关系数，反映各指标影响情况。对于第三小问，CO_2 排放强度是由 CO_2 排放量和 GDP 增长共同构成的，因此可以同时反应节能、减排和经济增长。由此，再以 CO_2 排放强度为因变量，第一、二、三产业及总煤炭消耗总量为回归变量，建立线性回归模型，得到产生的影响。

针对问题二，CO_2 排放强度同时反映节能和经济发展，已知 1985 年～2005 年的数据，根据碳排放约束指标，可计算出 2015 年和 2020 年 CO_2 排放强度的数据，插值拟合出未来十年的 CO_2 排放强度。然后以 CO_2 排放强度为因变量，三大能源消耗为回归变量，建立多元线性回归模型。同时，为了考虑节能目标和经济发展目标，以碳排放量最小为目标函数，线性回归方程等作为约束条件，用 LINGO 软件进行优化计算，得到未来十年主要能源消费结构的优化预测。

针对问题三，采取和问题二同样的思想，建立 CO_2 排放强度与三大产业煤炭消耗量的线性回归模型，并进行 DW 检验法再优化。同时，以煤炭消耗总量作为因变量，三大产业煤炭消耗作为回归变量，亦建立相应的线性回归方程。并且，最后以最小碳排放量为目标函数，建立优化模型，利用 LINGO 编程求解，得到三大产业煤炭消耗量的预测值。然后根据煤炭消耗总量回归方程，得到煤炭消耗总量预测值；最后利用 DW 检验法，对建立的预测模型和结果进行预测，发现煤炭消耗总量预测模型和结果合理，三大产业煤炭消耗预测模型有误差，进行模型改进。

针对问题四，根据前三问所得到的结果和结论，并且结合实际正常和发展路线，提出了大力发展天然气等清洁能源的使用，降低煤炭在能源结构中的比重的意见和建议。

关键字：相关性分析、主成成分分析、双立方插值、多元线性回归模型、优化模型和 DW 检验。

24.3　基 本 假 设

（1）国家政策在未来一段时间不会发生变化；
（2）未来一段时间不会有特别大的自然灾害或者人为战争等；
（3）未来一定时间江苏省经济发展保持平稳的速率；
（4）江苏省在“十二五时期”及未来十年基本实现预期目标。

24.4　符 号 说 明

符　　号	意　　义	备　　注
x_{ij}	第 i 个指标的第 j 个数据	$i=1,2...7;\ j=1,2...n$ （n 的大小根据指标个数确定）
x'_{ij}	x_{ij} 标准化后数据	$i=1,2...7;\ j=1,2...n$ （n 的大小根据指标个数确定）
r	相关性分析相关系数	
β_i	线性回归方程系数	$i=1,2..n$ （n 的大小根据系数个数确定）
ε	随机误差	
$\overline{w}_m$	煤炭碳排放相关系数	
$\overline{w}_s$	石油碳排放相关系数	
$\overline{w}_t$	天然气碳排放相关系数	
Q_{CO_2}	CO_2 排放强度	
Q_{CO_2}	标准化后的 CO_2 排放强度	
xm_{ij}	第 i 种产业在 第 j 的煤炭消耗量	$i=1,2,3;\ j=1,2...n$ （n 的大小根据系数个数确定）

24.5　问　题　一

24.5.1　问题一的分析

对于问题一，根据表中数据，我们可以得到一些和江苏省煤炭消费总量及第一、二、三产业煤炭消费量有关的指标，主要有地区生产总值、江苏省主要年份地区生产总值指数和 GDP 增长率三种能源消耗量等。由于指标数量较多，在此利用主成成分分析找出主要的影响因子，以此确立影响指标。

而第二小问和第三小问都是寻找几个指标对因变量的影响关系，因此采用多元线性回归分析的方法，建立回归模型，得出影响情况。

第二小问中，由于要刻画各指标对煤炭消费的影响情况，采用多元线性回归模型，刻画出具体的影响关系。

第三小问中，根据题中附录 1 的表 10（见程序文档）中 CO_2 的排放强度数据，可知 CO_2/GDP 本身包含的 CO_2 反应了减排的量，GDP 反应了经济的变化，同时根据化学式及相对分子质量 $C/12=CO_2/44$，可以得到 CO_2 同时也反应了 C 的消耗量，也一定程度上反应了能源利用情况。因此，CO_2 排放量一项指标就可以反应节能、减排和经济增长指标。以 CO_2 排放强度为因变量，煤炭消费总量及其占能源消费量的比重、第一、二、三产业煤炭消费量的变动为回归变量，建立多元线性回归方程，可以得到它们之间的影响关系。

综上得出问题一的建模流程图，如图 24-1 所示。

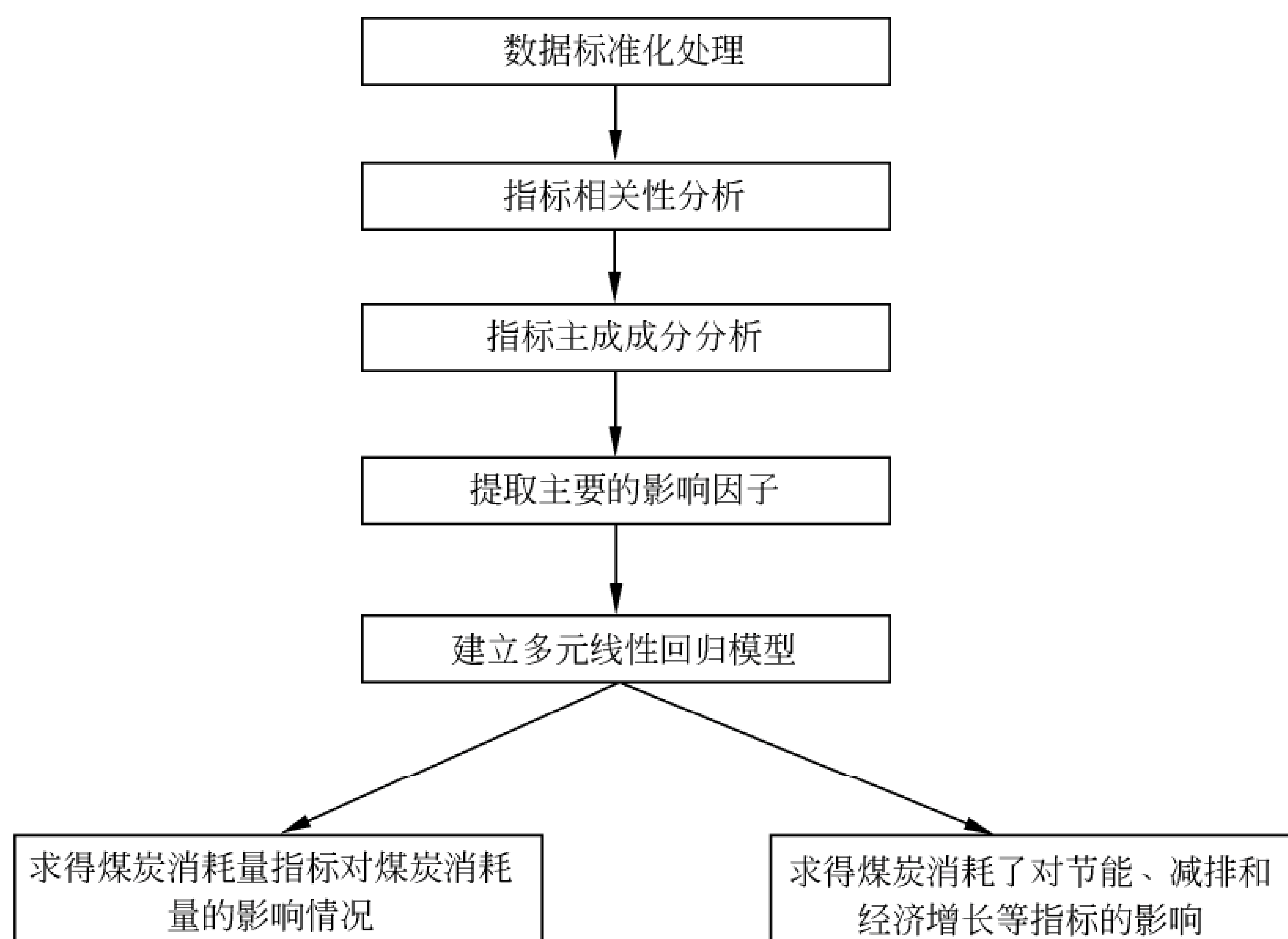


图 24-1　问题一流程框图

24.5.2　数据的预处理

在进行模型建立前，对数据进行预处理，消除量纲影响，防止大数吃小数问题，并且把数据标准化：

$$x'_{ij}=\frac{x_{\max}-x_{ij}}{x_{\max}-x_{\min}}$$

24.5.3　相关性检验

为了检验能否使用主成成分分析，我们首先对表格中的变量进行相关性分析：

$$r=\mathrm{Cov}(x^*,y^*)=\frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

$$X^*=\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},Y^*=\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}$$

其中，r 为相关系数。利用 SPSS 软件进行相关性分析，可以得到相关性显著，可以

进行主成成分分析。

24.5.4　主成成分分析

设有 p 个指标（此问中 $p=7$），要寻找能够概括 p 个指标综合信息的综合指标 $z_1, z_2, \cdots$，z_p，根据相关性系数可以得到协方差矩阵：

$$r=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{bmatrix}$$

求出所有的特征值和特征向量，得到特征方程：

$$|r-\lambda I|=0$$

求 p 个非负特征值 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_p \geqslant 0$：

$$Z_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{ip}X_p = \alpha_i' X$$

对应 p 单位特征向量 $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ip})$，可求出 p 个主成成分：

$$\begin{cases} Z_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1p}X_p \\ Z_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2p}X_p \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ Z_p = a_{p1}X_1 + a_{p2}X_2 + \ldots + a_{pp}X_p \end{cases}$$

$$Var(Z_i) = Max\{Var(\alpha' X), \alpha'\alpha = 1, \alpha'\alpha_j = 0\}$$

主成成分的选取，根据第 i 个主成分的贡献率：

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} = \frac{\lambda_i}{p}$$

以及前 k 个成分的累积贡献率：

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{p} = (k \leqslant p)$$

确定出影响江苏省煤炭消费总量的指标。

同理，对于第一产业的煤炭消费量，以第一产业的地区生产总值、第一产业的地区生产总指数、第一产业的贡献率和拉动率三种能源消耗量进行相关性分析并且确定主成成分，得出影响第一产业煤炭消费量的指标。第二、三产业方法同第一产业。

24.5.5　模型的建立

由多元线性回归模型得：

$$y = \beta_1 x_1(u) + \beta_2 x_2(u) + \ldots + \beta_n x_n(u)\varepsilon$$

其中，ε 为随机误差，且服从于 $N(0, \sigma^2)$。

对回归系数的最小二乘估计有：

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x_1(u_1) & x_2(u_2) & \dots & x_m(u_m) \\ x_2(u_1) & x_2(u_2) & \dots & x_2(u_m) \\ \dots & & & \\ x_n(u_1) & x_n(u_2) & \dots & x_n(u_m) \end{bmatrix}, \beta=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

选取 $\boldsymbol{\beta}$ 的一个估计值 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$，使得随机误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的平方和达到最小，即：

$$\min \boldsymbol{\varepsilon}^t = \min(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^T(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

将 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 带入，模型中得模型的估计：$\hat{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{X}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}$。

24.5.6　问题一第一小问模型的求解

Step1：利用 MATLAB 对题目中所给的数据进行数据的标准化处理，结果如表 24-1 所示。

表 24-1　各指标标准化数据

煤炭总消费量	地区生产总值	GDP增长率	…	第三产业煤炭消费	第三产业生产总值	GDP	第三产业生产指数
-0.81803	-0.98642	1.510115	…	-0.171468	-1.09977	-0.97058	0.915456
-0.83671	-0.91179	-0.2838	…	0.3412924	-1.01049	-0.89229	0.563921
-0.88168	-0.85235	-0.39592	…	2.5544885	-0.92173	-0.83008	0.446742
-0.88422	-0.80668	-0.95652	…	-0.9428	-0.81748	-0.77038	-0.25633
…	…	…	…	…	…	…	…
-0.84813	-0.68768	-1.18076	…	-0.394979	-0.62684	-0.65167	-1.25234
1.321888	1.283894	-0.22774	…	0.5604207	1.192579	1.22867	0.036618
1.370122	1.589393	-0.17168	…	0.3193795	1.63414	1.599776	0.153797
1.750379	2.201934	-0.0035	…	-0.526456	2.205796	2.346529	-0.02197

Step2：利用 SPSS 对数据进行相关性分析，得到协方差矩阵，由此得出各指标之间存在较强的相关性，再对各指标进行主成分分析，筛选出影响煤炭总消费量的公共因子，如表 24-2 所示。

表 24-2　影响煤炭消耗总量的贡献率

成份	初始特征值		
	合计	方差（%）	累积（%）
1	5.221	74.580	74.580
2	1.668	23.823	98.403
3	0.092	1.308	99.711
4	0.016	0.234	99.945
5	0.002	0.032	99.977
6	0.001	0.015	99.991
7	0.001	0.009	100.00

由表 24-2 影响煤炭消耗总量的贡献率可得出，前两个指标的累积贡献率达到 98%以

上，因此，对于煤炭消耗总量而言，可选取两个有代表性的指标：地区生产总值和 GDP 增长率。

Step3：利用 SPSS，运用相同的分析方法，计算出影响第一、二、三产业煤炭消费量的指标，最后得出影响第一、第二、第三产业的因素，如表 24-3 所示。

表 24-3　各类煤炭消耗量及其影响指标

江苏省煤炭消费总量	影响指标		
	地区生产总值		地区 GDP 增长率
第一产业煤炭消费量	第一产业生产总值	GDP	第一产业生产总值指数
第二产业煤炭消费量	第二产业生产总值	GDP	第二产业生产总值指数
第三产业煤炭消费量	第三产业生产总值	GDP	第三产业生产总值指数

24.5.7　问题一第二小问模型的求解

Step4：利用 SPSS 进行回归分析，求出各指标对江苏省煤炭消费总量及第一、二、三产业煤炭消费量的影响情况，如表 24-4 所示。

表 24-4　各指标对三大产业煤炭消耗的影响

	煤炭消费总量	第一产业	第二产业	第三产业
复相关系数 R	0.986	0.826	0.883	0.603
样本决定系数 R^2	0.973	0.681	0.78	0.364
F	234.872	8.588	23.11	2.285
P	0.000	0.003	0.000	0.131
D-W 统计量	0.945	1.994	2.283	2.49
煤炭消费总量回归方程	$\hat{y}_1 = -5.24\times10^{-16} + 0.923x_1 + 0.184x_2$			
第一产业煤炭消费量回归方程	$\hat{y}_2 = -1.251\times10^{-15} - 4.626x_3 + 4.166x_4 + 0.12x_5$			
第二产业煤炭消费量回归方程	$\hat{y}_3 = -5.755\times10^{-16} + 0.893x_3 - 0.064x_5$			
第三产业煤炭消费量回归方程	$\hat{y}_4 = 1.768\times10^{-15} - 1.833x_3 + 1.758x_4 + 0.573x_5$			

（注：x_1, x_2 分别表示地区生产总值，地区 GDP 增长率指标。x_3, x_4, x_5 分别为第一、第二、第三产业各自对应的煤炭消费量指标、GDP、产业生产总值。）

从煤炭消费总量回归方程可以看出，x_1 即地区生产总值的系数最大，说明指标地区生产总值对煤炭消费总量影响较大，而地区 GDP 增长率影响则相对较小。从第一产业消费总量回归方程看出，第一产业生产总值、GDP 对该产业消费总量影响均较大，产业生产总值指数影响较小，且 GDP 对第一产业煤炭消费量具有负影响。第二、三产业的消费量也由各自的影响因素决定。在此建立一个偏相关系数表来反应各指标的影响，如表 24-5 所示。

表 24-5　各指标对各类煤炭消耗量的偏相关系数

煤炭消费总量	地区生产总值	地区 GDP 增长率	
	0.983	0.734	
第一产业煤耗量	GDP	第一产业生产总值	第一产业生产总指数
	-0.627	0.595	0.154
第二产业煤耗量	GDP	第二产业生产总指数	
	0.882	-0.134	
第三产业煤耗量	GDP	第三产业生产总值	第三产业生产总指数
	-0.185	0.177	0.562

其中，偏相关系数绝对值越大，则影响越大，偏相关系数为负值则表示为负影响，对该因变量有一定的遏制作用。表 24-5 中第一产业、第三产业煤耗量受 GDP 的制约，GDP 上升越高，将影响第一产业、第三产业所占比重，煤耗量将牵制下降。

24.5.8　问题一第三小问模型的优化求解

Step5：利用 SPSS 分析，求得江苏省煤炭消费总量及其占能源消费量的比重、第一、二、三产业煤炭消费量的变动对节能减排、经济增长的影响及对 CO_2 排放强度的影响：

$$\hat{y}_5 = 1.064\times10^{-15} + 0.053\beta_1 + 0.923\beta_2 - 0.063\beta_3 - 1.359\beta_4 + 1.321\beta_5$$

β_1、β_2、β_3、β_4、β_5 分别为生煤炭消费总量、煤炭消费总量占能源的比重、第一产业拉动率、第二产业拉动率、第三产业拉动率。

检验统计量如表 24-6 所示。

表 24-6　检验统计量表

R	R^2	F	p	D-W 统计量
0.82	0.673	6.175	0.003	0.493

由表 24-6 可得，该回归方程线性相关性较大，D-W 统计量可得到模型残差不存在强烈的自相关性关系。由 $\hat{y}_5 = 1.064\times10^{-15} + 0.053\beta_1 + 0.923\beta_2 - 0.063\beta_3 - 1.359\beta_4 + 1.321\beta_5$ 可得，影响节能减排、经济增长的主要因素是煤炭消费总量占能源的比重、第二产业拉动率、第三产业拉动率，煤炭消费总量、第二产业拉动率影响较小。

24.6　问　题　二

24.6.1　问题二的分析

对于问题二，由问题一分析可知，CO_2 排放强度可以很大程度上反映能源消耗。因此，根据“十二五”时期以及未来十年江苏省碳排放规划中的要求，求出 2015 年和 2020 年的碳排放消耗指数，利用双立方插值拟合的方法，预测出未来十年间江苏省 CO_2 的排放量。同时以 CO_2 排放强度为因变量，三大能源的消耗量为自变量，进行回归分析，建立 CO_2 排放强度和三大能源消耗的回归预测模型。

对得到的预测模型进行优化，利用题目附录 1 中表 2 的数据求得三大能源的平均碳排放系数。为了达到减排节能的目标，即碳排放量达到最小值，通过平均碳排放系数建立目标函数。同时，又根据题目附录 1 中表 4 中单位国内生产总值能耗降低率、国内生产总值二氧化碳排放下降率得到约束条件，建立以碳排放量达到最小值为目标函数的优化模型。预测出“十二五”时期和未来十年的三大能源消耗结构。但是考虑到江苏省在前二十年的经济发展速度不均衡，从 2005 年开始经济发展和能源消耗才基本上稳定地发展。因此，考虑采用两组数据，即一组为从 1985 年～2010 年的数据，一组为从 2005 年～2010 年的数据进行分别预测，比较结果选择更优解。

综上，问题二建模流程框图，如图 24-2 所示。

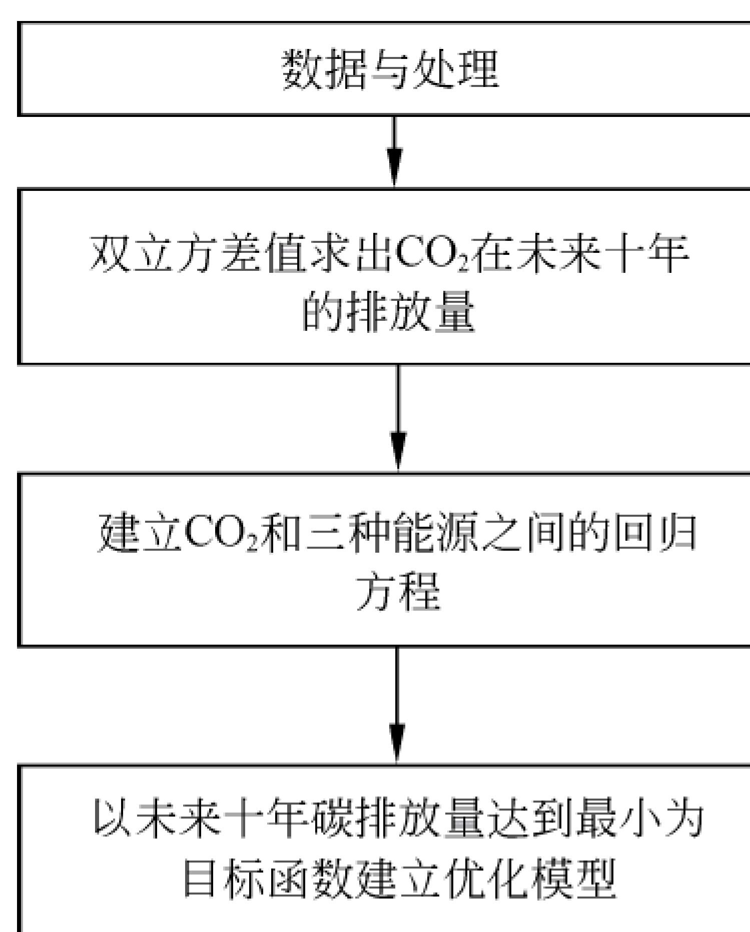


图 24-2　问题二流程框图

24.6.2　数据的预处理

考虑到能源（煤炭、石油和天然气等）消费的结构数据大小问题，防止大数吃小数问题，对数据进行的标准化处理：

$$x'_{ij}=\frac{x_{ij}-\overline{x}_{ij}}{std(x_{ij})}$$

其中，$std(x_{ij})$ 为 x_{ij} 的标准差，$\overline{x}_{ij}$ 为 x_{ij} 的 j 类列平均值。

24.6.3　CO_2 排放强度的双立方插值拟合

对于满足已知某函数 $y=f(x)$ 的一组观测数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\ldots,n)$,要寻求一个函数 $\phi(x)$，使得 $\phi(x_i)=y_i(i=1,2,\ldots,n)$，则 $\phi(x)\approx f(x)$ 。此类问题为插值问题。因此，在预测 CO_2 在未来十年间的排放强度时采用插值的思想。本题利用三次立方多项式函数做插值，在采样点处的光滑性能好。

Step1：利用 MATLAB 和题目已给的观测数据，根据 2015 年 CO_2 的排放强度为 1.26，2020 年 CO_2 的排放强度为 1.05，对 CO_2 的排放强度进行插值预测，MATLAB 编程如下：

```
%CO2 插值
clc,clear
load CO2.mat         %加载数据
n0=size(CO2);
t=1:n0(1,1);
t(1,n0(1,1)+1)=31;  %赋值
t(1,n0(1,1)+2)=36;  %赋值
t=t';
CO2(n0(1,1)+1,1)=1.2636;    %2015 年 CO2 的排放强度
CO2(n0(1,1)+2,1)=1.05;      %2020 年 CO2 的排放强度
n1=size(CO2);
j=1;
for i=1:36
    CO2CZ(j,1)=interp1(t,CO2,i,'cubic');   %立方插值
    j=j+1;
end
plot(t,CO2,'r')      %画图
hold on              %保持继续画图
plot(1:36,CO2CZ,'o')
Box off
gtext('year+1985')  %标记
gtext('CO2 排放强度 tCO2/万元 GDP')
```

运行程序输出插值拟合，如图 24-3 所示。

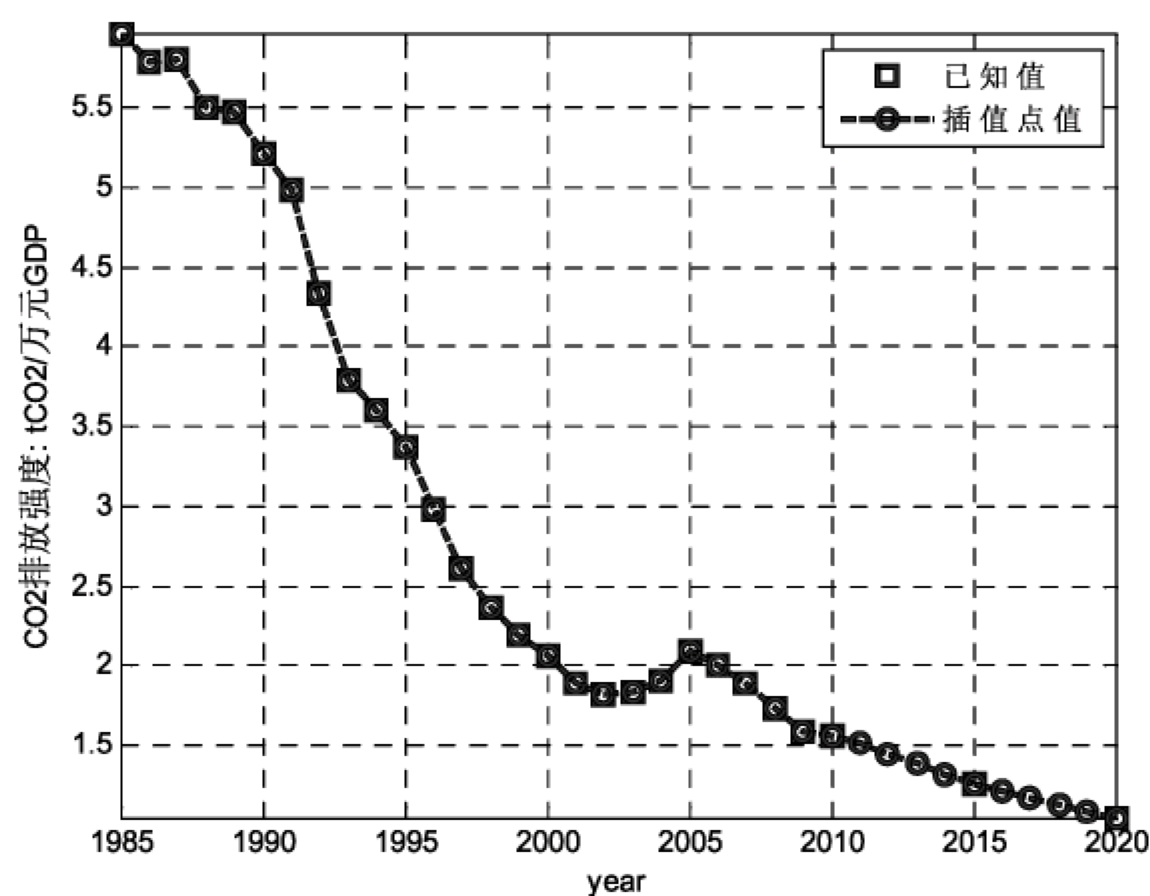


图 24-3　CO_2 排放强度插值拟合图

根据图 24-3 所示，得到未来十年的 CO_2 排放强度如表 24-7 所示。

表 24-7　未来十年 CO_2 排放强度

年份	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Q_{CO_2}	1.51	1.45	1.39	1.32	1.26	1.22	1.17	1.13	1.09	1.05

24.6.4　煤炭、石油、天然气与 CO_2 排放强度模型的建立

Step2：设 CO_2 的排放强度为因变量，煤炭、石油和天然气三大能源分别为回归变量。根据问题一中的原理建立回归方程，选取 1985 年～2010 年煤炭、石油和天然气数据作为

输入变量，进行自回归分析：

```
clc,clear
load mstdata1.mat
n0=size(mstdata);
a=mean(mstdata);    %均值
% %a=mean(a');
a1=std(mstdata);    %方差
% %b=std(b');
% for i=1:n0(1,2)
%     for j=1:n0(1,1)
%         mstdata(j,i)=(mstdata(j,i)-a(1,i))/b(1,i);  %归一化
%     end
% end
%
mstdata=zscore(mstdata);                %调用 MATLAB 自带函数直接归一化

figure(1),
X=mstdata(:,1:3);
X=[ones(n0(1,1),1),X];
Y=mstdata(:,n0(1,2));
[b,bint,r,rint,s]=regress(Y,X);     %回归分析
rcoplot(r,rint)                     %残差检验图

%删除一些点
j=1;
for i=1:n0(1,1)
    if i~=21   %删除第 21 个点
        Cmstdata(j,:)=mstdata(i,:);
        j=j+1;
    end
end
figure(2),
n1=size(Cmstdata);
X=Cmstdata(:,1:3);
X=[ones(n1(1,1),1),X];
Y=Cmstdata(:,n1(1,2));
[b,bint,r,rint,s]=regress(Y,X);     %回归分析
rcoplot(r,rint)                     %残差检验图

x1=0*a1(1,1)+a(1,1);                %方程
x2=0*a1(1,2)+a(1,2);                %方程
x3=1.431741*a1(1,3)+a(1,3);         %方程
```

运行程序整理输出结果如表 24-8 所示。

表 24-8　回归模型参数

参　　数	参数估计值	置 信 区 间
β_0	0.0000	[-0.2142 02.142]
β_1	-0.3773	[-2.1056 1.3509]
β_2	-1.0961	[-2.5011 0.3089]
β_3	0.7946	[0.199 1.3902]
$R^2=0.7559$、$F=22.7122$、$p<0.0001$、$s^2=0.2774$		

根据回归模型易得残差及置信区间图，如图 24-4 所示。

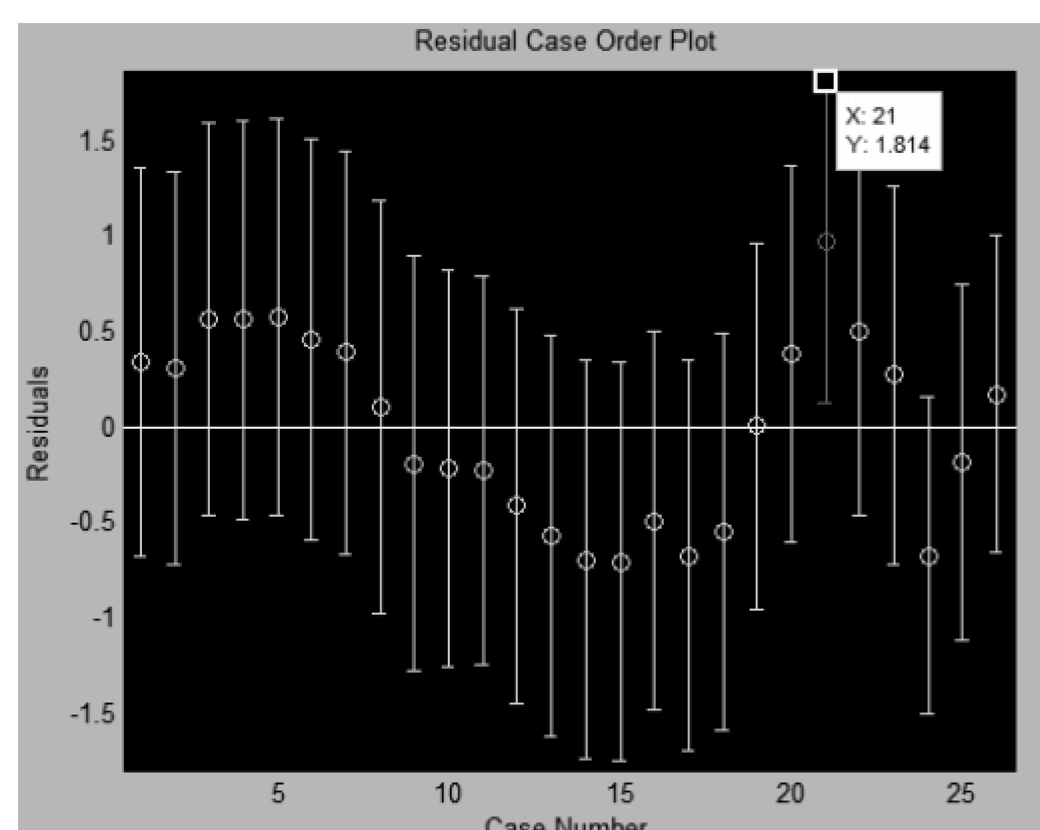


图 24-4　残差及置信区间图

图 24-4 中红色为异常点，于是删除该 21 号节点，再次进行回归分析后，得残差及其置信区间，作图得到结果图如图 24-5 所示。

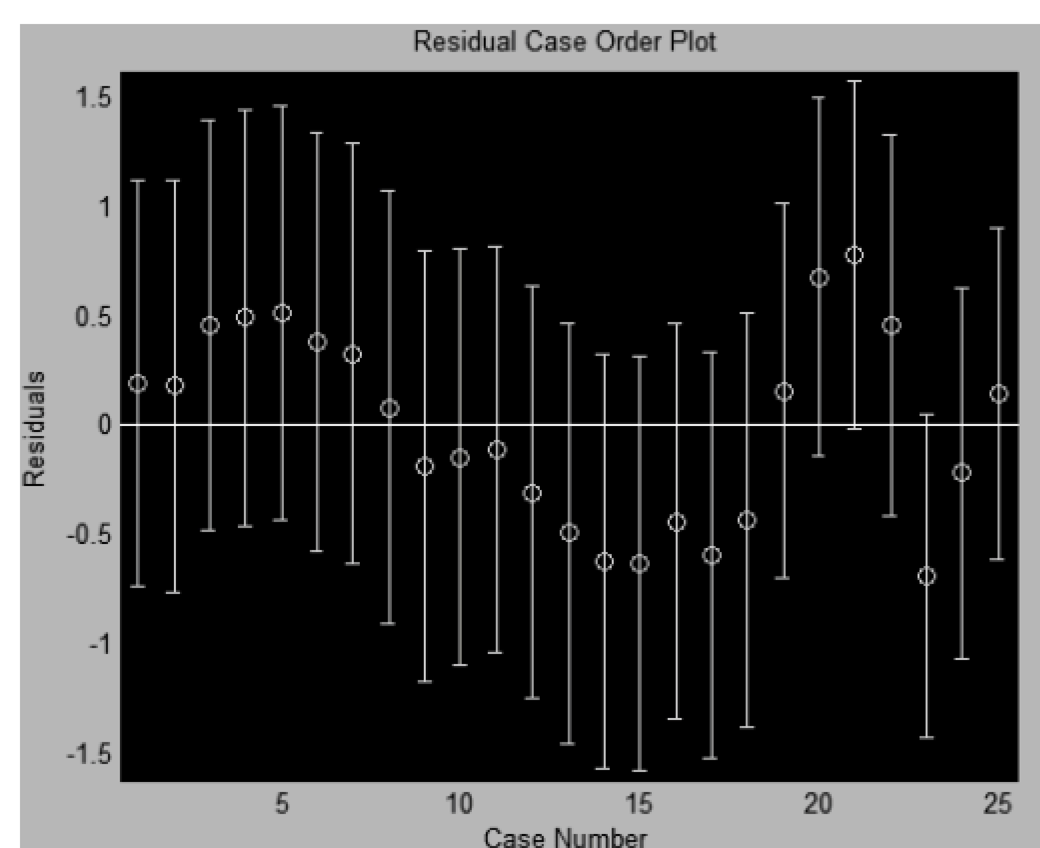


图 24-5　模型去异常点后残差及置信区间图

由剔除后的各变量之间的关系得到煤炭、石油、天然气与 CO_2 排放强度回归模型如表 24-9 所示。

表 24-9　去异常点后回归分析表

回 归 系 数	回归系数估计值	回归系数置信区间
β_0	-0.0516	[-0.2517 0.1485]
β_1	-0.8155	[-2.4346 0.8036]
β_2	-0.9845	[-2.2673 0.2983]
β_3	1.0907	[0.4902 1.6912]
$R^2=0.8037$、$F=28.6618$、$p<0.0001$、$s^2=0.2286$		

由题目可得“十二五”规划期间及未来十年消费结构预测模型为：

$$\hat{Q}_{CO_2}=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3$$

代入表 24-9 中数值得：

$$\hat{Q}_{CO_2}=-0.0516-0.8155x_1-0.9845x_2+1.0907x_3$$

24.6.5　煤炭、石油、天然气与 CO_2 排放强度模型的改进

由于煤炭、石油和天然气三大主要能源数据是随时间变化的，对于后期的预测值主要取决于靠近该点的时间段内的数据相关，故选取 2005 年～2010 年的数据进行相关分析，得回归系数如表 24-10 所示。

表 24-10　改进后的三大主要能源与 CO_2 排放强度回归分析表

回 归 系 数	回归系数估计值	回归系数置信区间
β_0	$-2.483 \cdot 10^{-15}$	[-0.128 0.128]
β_1	1.066	[0.252 1.88]
β_2	-0.645	[-1.013 -0.276]
β_3	-1.516	[-2.102 0.929]
$R^2=0.998$、$F=314.622$、$p<0.0001$、$s^2=0.07271$		

消费结构预测模型为：

$$\hat{Q}_{CO_2}=\beta_0+\beta_1\hat{x}_1+\beta_2\hat{x}_2+\beta_3\hat{x}_3$$

$$\hat{Q}_{CO_2}=-2.483\cdot10^{-15}+1.066\hat{x}_1-0.645\hat{x}_2\text{-}1.516\hat{x}_3$$

由表 24-9 和表 24-10 对比可看出 $R^2{}_{2005}>R^2{}_{1985}$、$F_{2005}>F_{1985}$、$S^2{}_{2005}<S^2{}_{1985}$，因此选取 2005 年～2010 年的数据进行预测和优化，其结果更为理想。

24.6.6　煤炭、石油和天然气的碳排放系数

由题源附录 1 中表 2（见程序文档）各种能源的碳排放系数表，如表 24-11 所示。

表 24-11　各种能源的碳排放系数（单位：万t/万t）

数 据 来 源	煤　　炭	石　　油	天　然　气	水电、核电
DOE/EIA[1]	0.702	0.478	0.389	0
日本能源经济研究所	0.756	0.586	0.449	0
国家发改委能源所[2]	0.7476	0.5825	0.4435	0
国家科委气候变化项目	0.726	0.583	0.409	0

设煤炭碳综合排放系数为 $\overline{w}_m=\sum_{i=1}^{4}w_{mi}/4$，石油碳综合排放系数为 $\overline{w}_s=\sum_{i=1}^{4}w_{si}/4$，天然气碳综合排放系数为 $\overline{w}_t=\sum_{i=1}^{4}w_{ti}/4$，易得表 24-12。

表 24-12　煤炭、石油和天然气的碳排放系数

主 要 能 源	煤　　炭	石　　油	天　然　气
碳综合排放系数（单位：万 t/万 t）	0.7329	0.5574	0.4226

24.6.7　问题二模型的优化求解

在整个碳排放约束下，考虑节能目标和江苏省经济发展目标主要取决于 CO_2 排放强度

Q_{CO_2}，即在 2015 年碳排放约束指标值为 $Q_{CO_2}(2015)=1.26$，在 2020 年碳排放约束指标值为 $Q_{CO_2}(2020)=1.05$。则江苏省节能减排和经济发展目标应满足下式：

$$\hat{Q}_{CO_2}=\beta_0+\beta_1\hat{x}_1+\beta_2\hat{x}_2+\beta_3\hat{x}_3$$

碳排放量是直接制约经济发展的主要因素，节能减排亦从碳排放量上来加以控制，故由表 24-12 的分析可知：

$$\min=\sum_{j=1}^{10}(\overline{w}_m\hat{x}_{1j}+\overline{w}_s\hat{x}_{2j}+\overline{w}_t\hat{x}_{3j})$$

由题中“表 4（见程序文档）各地区‘十二五’节能目标及‘十一五’完成情况”中 2006 年～2015 年江苏省累计单位国内生产总值能耗降低率为 34.77%。又“十一五时期”，江苏省累计单位国内生产总值能耗降低率为 20.45%，则在“十二五时期”最低完成情况为：

$$\frac{\hat{x}_{15}+\hat{x}_{25}+\hat{x}_{35}}{x\hat{s}_{2010}}\geqslant 14.32\%$$

其中，$\hat{xs}_{2010}$ 为 2010 年江苏省能源总消费量标准化值，即 $xs_{2010}=2.3513$。

又江苏省“十二五时期”单位国内生产总值二氧化碳排放下降目标为 19%，江苏省未来十年单位国内生产总值二氧化碳排放下降目标为 50%，则：

$$\frac{(\overline{w}_m\hat{x}_{15}+\overline{w}_s\hat{x}_{25}+\overline{w}_t\hat{x}_{35})}{\overline{w}_m\hat{x}_{12010}+\overline{w}_s\hat{x}_{22010}+\overline{w}_t\hat{x}_{32010}}\geqslant 19\%$$

$$\frac{(\overline{w}_m\hat{x}_{110}+\overline{w}_s\hat{x}_{210}+\overline{w}_t\hat{x}_{310})}{\overline{w}_m\hat{x}_{12005}+\overline{w}_s\hat{x}_{22005}+\overline{w}_t\hat{x}_{32005}}\geqslant 50\%$$

其中，$\hat{x}_{12010}$ 表示 2010 年江苏省煤炭消费量标准化值，$\hat{x}_{12010}=2.1892$；$\hat{x}_{22010}$ 表示 2010 年江苏省石油消费量标准化值，$\hat{x}_{22010}=2.2839$；$\hat{x}_{32010}$ 表示 2010 年江苏省天然气消费量标准化值，$\hat{x}_{32010}=2.6368$。同样地可以得到，$\hat{x}_{12005}=1.1174$，$\hat{x}_{22005}=1.2381$，$\hat{x}_{32005}=0.1093$。

江苏省实施节能减排，一定程度上逐年减少碳排放，则：

$$\overline{w}_m\hat{x}_{1j}+\overline{w}_s\hat{x}_{2j}+\overline{w}_t\hat{x}_{3j}\geqslant\overline{w}_m\hat{x}_{1j+1}+\overline{w}_s\hat{x}_{2j+1}+\overline{w}_t\hat{x}_{3j+1}\quad(j=1,2,3,\cdots,9)$$

由此建立优化模型可得：

$$\begin{cases}\min:\ \sum_{j=1}^{10}(\overline{w}_m\hat{x}_{1j}+\overline{w}_s\hat{x}_{2j}+\overline{w}_t\hat{x}_{3j})\\ s.t.\\ \qquad\beta_0+\beta_1\hat{x}_{1j}+\beta_2\hat{x}_{2j}+\beta_3\hat{x}_{3j}=\hat{Q}_{CO_2j}\quad(j=1,2,\cdots,10)\\ \qquad\dfrac{\hat{x}_{15}+\hat{x}_{25}+\hat{x}_{35}}{x\hat{s}_{2010}}\geqslant 14.32\%\\ \qquad\dfrac{(\overline{w}_m\hat{x}_{15}+\overline{w}_s\hat{x}_{25}+\overline{w}_t\hat{x}_{35})}{\overline{w}_m\hat{x}_{12010}+\overline{w}_s\hat{x}_{22010}+\overline{w}_t\hat{x}_{32010}}\geqslant 19\%\\ \qquad\dfrac{(\overline{w}_m\hat{x}_{110}+\overline{w}_s\hat{x}_{210}+\overline{w}_t\hat{x}_{310})}{\overline{w}_m\hat{x}_{12005}+\overline{w}_s\hat{x}_{22005}+\overline{w}_t\hat{x}_{32005}}\geqslant 50\%\\ \qquad\overline{w}_m\hat{x}_{1j}+\overline{w}_s\hat{x}_{2j}+\overline{w}_t\hat{x}_{3j}\geqslant\overline{w}_m\hat{x}_{1j+1}+\overline{w}_s\hat{x}_{2j+1}+\overline{w}_t\hat{x}_{3j+1}\quad(j=1,2,\cdots,9)\\ \qquad\overline{w}_m、\overline{w}_s、\overline{w}_t、\beta_k、x\hat{s}_{2010}、\hat{x}_{12010}、\hat{x}_{22010}、\hat{x}_{32010}、\\ \qquad\hat{x}_{12005}、\hat{x}_{22005}、\hat{x}_{32005}\in\text{const}\quad(k=0,1,2,3)\\ \qquad\hat{x}_{ij}>0\quad(i=1,2,3,j=1,2,\cdots,10)\end{cases}$$

通过 LINGO 编程计算如下：

```
model:
min=0.7329*x11+0.5574*x21+0.4226*x31+0.7329*x12+0.5574*x22+0.4226*x32+
0.7329*x13+0.5574*x23+0.4226*x33+0.7329*x14+0.5574*x24+0.4226*x34+0.7329*
x15+0.5574*x25+0.4226*x35+0.7329*x16+0.5574*x26+0.4226*x36+0.7329*x17+
0.5574*x27+0.4226*x37+0.7329*x18+0.5574*x28+0.4226*x38+0.7329*x19+0.5574*
x29+0.4226*x39+0.7329*x110+0.5574*x210+0.4226*x310;      !碳排放量最小
!CO2 排放强度 -0.7289 -0.7663 -0.8076    -0.8482 -0.8831 -0.9131 -0.9414
-0.9680 -0.9926 -1.0151

1.066*x11-0.645*x21-1.516*x31-0+ 0.7289 =0;      !节能经济目标
1.066*x12-0.645*x22-1.516*x32-0 + 0.7663 =0;    !约束条件，依次如模型（不）等式
1.066*x13-0.645*x23-1.516*x33-0 + 0.8076 =0;    !约束条件，依次如模型（不）等式
1.066*x14-0.645*x24-1.516*x34-0 + 0.8482 =0;    !约束条件，依次如模型（不）等式
1.066*x15-0.645*x25-1.516*x35-0 + 0.8831 =0;    !约束条件，依次如模型（不）等式
1.066*x16-0.645*x26-1.516*x36-0 + 0.9131 =0;    !约束条件，依次如模型（不）等式
1.066*x17-0.645*x27-1.516*x37-0 + 0.9414 =0;    !约束条件，依次如模型（不）等式
1.066*x18-0.645*x28-1.516*x38-0 + 0.9680 =0;    !约束条件，依次如模型（不）等式
1.066*x19-0.645*x29-1.516*x39-0 + 0.9926 =0;    !约束条件，依次如模型（不）等式
1.066*x110-0.645*x210-1.516*x310-0 + 1.0151 =0; !约束条件，依次如模型（不）等式

x15+x25+x35-0.1432*2.3513>0;                     !约束条件，依次如模型（不）等式
!x15+x25+x35-0.18*2.3513<0;                      !约束条件，依次如模型（不）等式

0.7329*x15+0.5574*x25+0.4226*x35-0.19*0.7329*2.1892-0.19*0.5574*2.2839-0.
19*0.4226*2.6368>0;
0.7329*x110+0.5574*x210+0.4226*x310-0.19*0.7329*1.1174-0.19*0.5574*1.2381
-0.19*0.4226*0.1093>0;

0.7329*x11+0.5574*x21+0.4226*x31-0.7329*x12-0.5574*x22-0.4226*x32>0;
                                                 !约束条件，依次如模型（不）等式
0.7329*x12+0.5574*x22+0.4226*x32-0.7329*x13-0.5574*x23-0.4226*x33>0;
                                                 !约束条件，依次如模型（不）等式
0.7329*x13+0.5574*x23+0.4226*x33-0.7329*x14-0.5574*x24-0.4226*x34>0;
                                                 !约束条件，依次如模型（不）等式
0.7329*x14+0.5574*x24+0.4226*x34-0.7329*x15-0.5574*x25-0.4226*x35>0;
                                                 !约束条件，依次如模型（不）等式
0.7329*x15+0.5574*x25+0.4226*x35-0.7329*x16-0.5574*x26-0.4226*x36>0;
                                                 !约束条件，依次如模型（不）等式
0.7329*x16+0.5574*x26+0.4226*x36-0.7329*x17-0.5574*x27-0.4226*x37>0;
                                                 !约束条件，依次如模型（不）等式
0.7329*x17+0.5574*x27+0.4226*x37-0.7329*x18-0.5574*x28-0.4226*x38>0;
                                                 !约束条件，依次如模型（不）等式
0.7329*x18+0.5574*x28+0.4226*x38-0.7329*x19-0.5574*x29-0.4226*x39>0;
                                                 !约束条件，依次如模型（不）等式
0.7329*x19+0.5574*x29+0.4226*x39-0.7329*x110-0.5574*x210-0.4226*x310>0;

!x11*4045.3+7644.5-x21*1010.5-1975.9>0;          !约束条件，依次如模型（不）等式
!x21*1010.5+1975.9-x31*303.0789-152.7173>0;      !约束条件，依次如模型（不）等式
!x31>0;
end
```

运行程序输出结果得到表 24-13 所示。

表 24-13　模型求解结果

$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$
0.5391	0.0000	0.8599
0.0582	1.2842	0.0000
0.0366	1.3126	0.0000
0.0154	1.3405	0.0000
0.0000	1.3567	0.0053
0.0000	0.1085	0.5562
0.0000	0.0876	0.5837
0.0000	0.0679	0.6096
0.0000	0.0498	0.6336
0.0000	0.0332	0.6555

反标准化数据，MATLAB 程序如下：

```
n1=size(x);
for i=1:n1(1,1)
    for j=1:n1(1,2)
        x1(i,j)=x(i,j)*a1(1,j)+a(1,j);    % 反标准化
    end
end
```

得到未来十年三大能源的消费结构如表 24-14 所示。

表 24-14　未来十年三大能源消费结构

年份	x_1 煤炭消费量	x_2 石油消费量	x_3 天然气消费量
2011	15164.6	3570.7	895.9
2012	14454.7	4092.9	640.1
2013	14422.8	4104.4	640.1
2014	14391.5	4115.8	640.1
2015	14368.8	4122.4	641.7
2016	14368.8	3614.8	805.5
2017	14368.8	3606.3	813.7
2018	14368.8	3598.3	821.4
2019	14368.8	3590.9	828.5
2020	14368.8	3584.2	835.1

结合未来十年的预测值，绘制折线图，如图 24-6 所示。

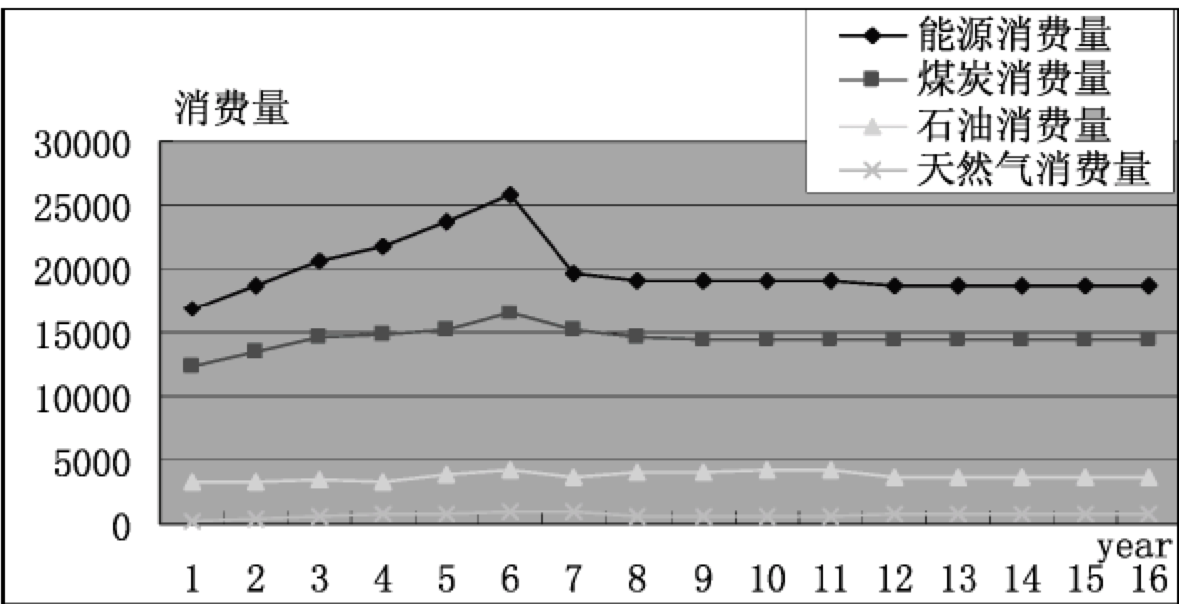


图 24-6　各能源消费量走势图

24.6.8　模型结果的分析

从图 24-6 能源消费量走势图中可看出，在“十二五”期间及未来十年江苏省煤炭消费量下降到 14368.797 万吨保持不变；石油消费量呈现一个上升的趋势，上升的幅度不大；天然气消费量先升高后下降，波动较平稳。从能源消费量走势图可看出，能源消费量在 2010 年～2011 年有一个突变下降值，在 2011 年～2020 年，能源消费量总体上保持平稳有一定下降的趋势。

24.7　问　题　三

24.7.1　问题三的分析

对于问题三，CO_2 的排放量来自能源消耗，而煤炭为能源的主要构成。因此根据已有数据找出煤炭消耗所产生的 CO_2 排放强度。采用和第二问相同的思想，以 CO_2 排放强度为因变量，以第一、二、三产业煤炭消费为回归变量，建立回归方程。利用第二问中已经拟合出未来的十年 CO_2 排放强度，预测和优化“十二五”期间和未来十年一、二、三产业煤炭消费。同时，煤炭消耗总量也主要有第一、二、三产业煤炭消耗构成，因此再建立煤炭消耗总量和三大产业煤炭消费之间的回归模型，对煤炭消耗总量进行预测优化。

由于在时间序列数据的处理中，会引起序列相关问题，即 $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$。若存在序列相关，当采用最小二乘法建立回归预测模型时，将会使自变量前的系数（α_0、α_1、α_2、α_3）的估计不再具有最小方差，不再是有效的估计量，将会使系统检验功能减小，置信区间过宽，使预测失效。因而，必须对回归预测模型进行序列相关检验，也就是 DW 检验。

模型求解流程图如图 24-7 所示。

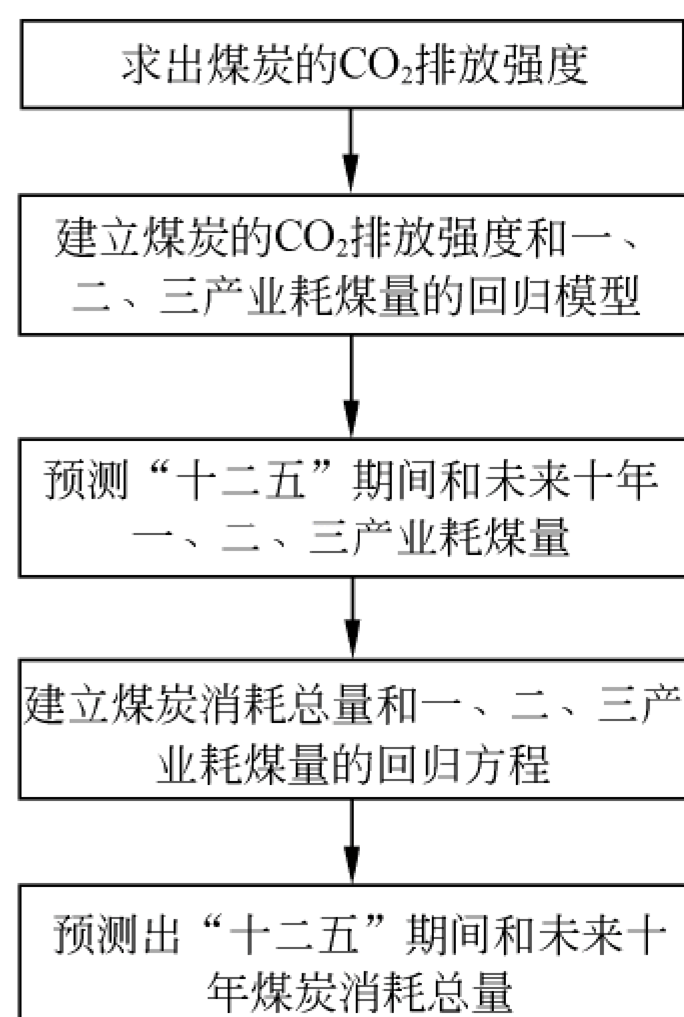


图 24-7　问题三流程框图

24.7.2　数据的标准化

考虑到煤炭消费总量及第一、二、三产业煤炭消费量数据大小问题，防止大数吃小数问题，对数据进行标准化处理：

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \overline{x}_{ij}}{std(x_{ij})}$$

其中，$std(x_{ij})$ 为 x_{ij} 的标准差，$\overline{x}_{ij}$ 为 x_{ij} 的 j 类列平均值。

24.7.3　煤炭消耗量产生的 CO_2 排放强度的计算

Step1：根据已有的数据找出煤炭消耗产生的 CO_2 排放强度和总的 CO_2 排放强度的关系。用 Excel 绘制出煤炭消耗量产生的 CO_2 排放强度和总共的 CO_2 排放强度的关系，如图 24-8 所示。

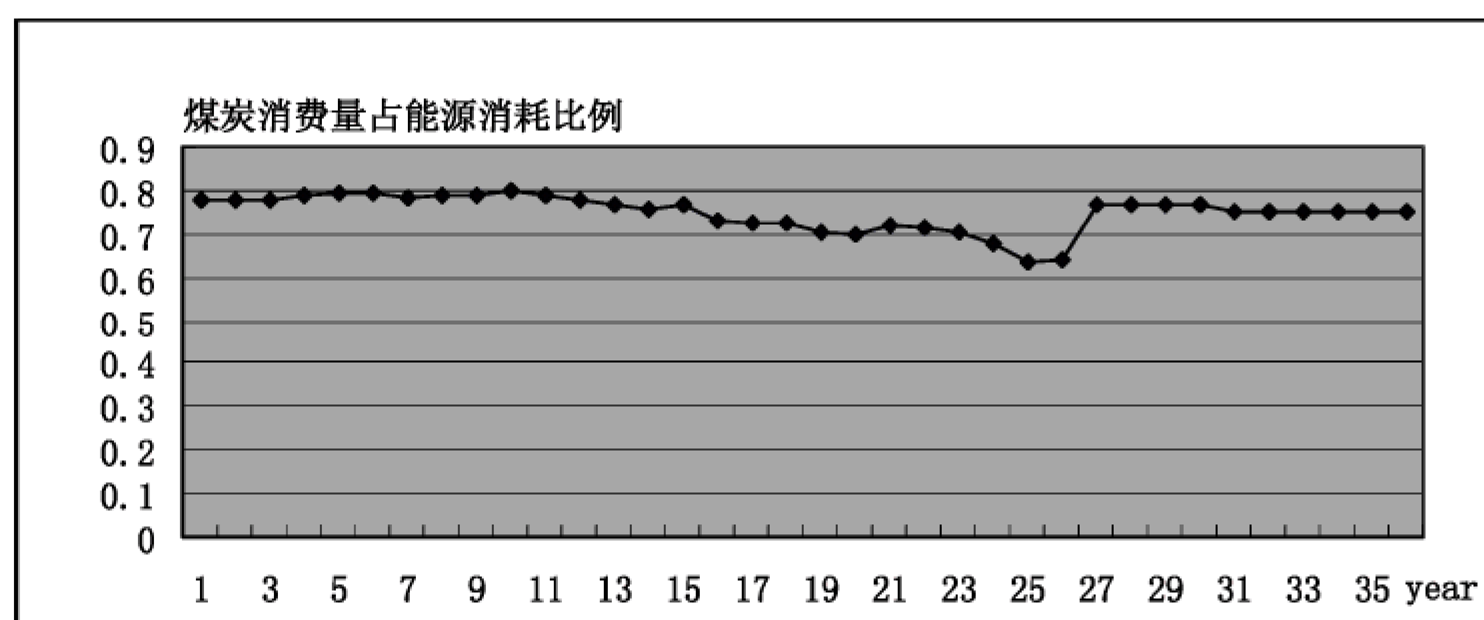


图 24-8　煤炭消费量占能源消费比例时间图

由图 24-8 可得出煤炭消耗量产生的 CO_2 排放强度为：

$$\overline{Q}_{CO_2} = 0.76 Q_{CO_2}$$

24.7.4　数据的整理

经以上分析，整理相应数据可得表 24-15。

表 24-15　数据整合表

年份	煤炭消费量(万吨)	第一产业耗煤量(万吨)	第二产业耗煤量(万吨)	第三产业耗煤量(万吨)	煤炭 CO_2 排放强度(tCO_2/万元 GDP）
1995	8936	116.2	8624.2	70.6	2.56
1996	8833	150	8007.3	82.3	2.27
1997	8585	110.7	7977.4	132.8	1.98
…	…	…	…	…	…
2008	20737	63.1	20504.3	87.3	1.31
2009	21003	63	20780.2	81.8	1.21
2010	23100	50.7	22940.4	62.5	1.19

24.7.5　产业的煤炭消费量与对应 CO_2 排放强度模型的建立

设自变量为 $\hat{x}m_1,\hat{x}m_2,\hat{x}m_3$ 分别表示第一、二、三产业的煤炭消费量，$\overline{Q}_{CO_2}$ 为因变量即煤炭消费量产生的 CO_2 排放强度。β_0、β_1、β_2、β_3 分别表示随机误差和三个自变量的回归系数。得到预测的模型：

$$\hat{\overline{Q}}_{CO_2} = \beta_0 + \beta_1\hat{x}m_1 + \beta_2\hat{x}m_2 + \beta_3\hat{x}m_3$$

Step2：计算得第一、二、三产业煤炭消费量对 CO_2 排放强度影响的回归方程。置信区间作图如图 24-9 所示。

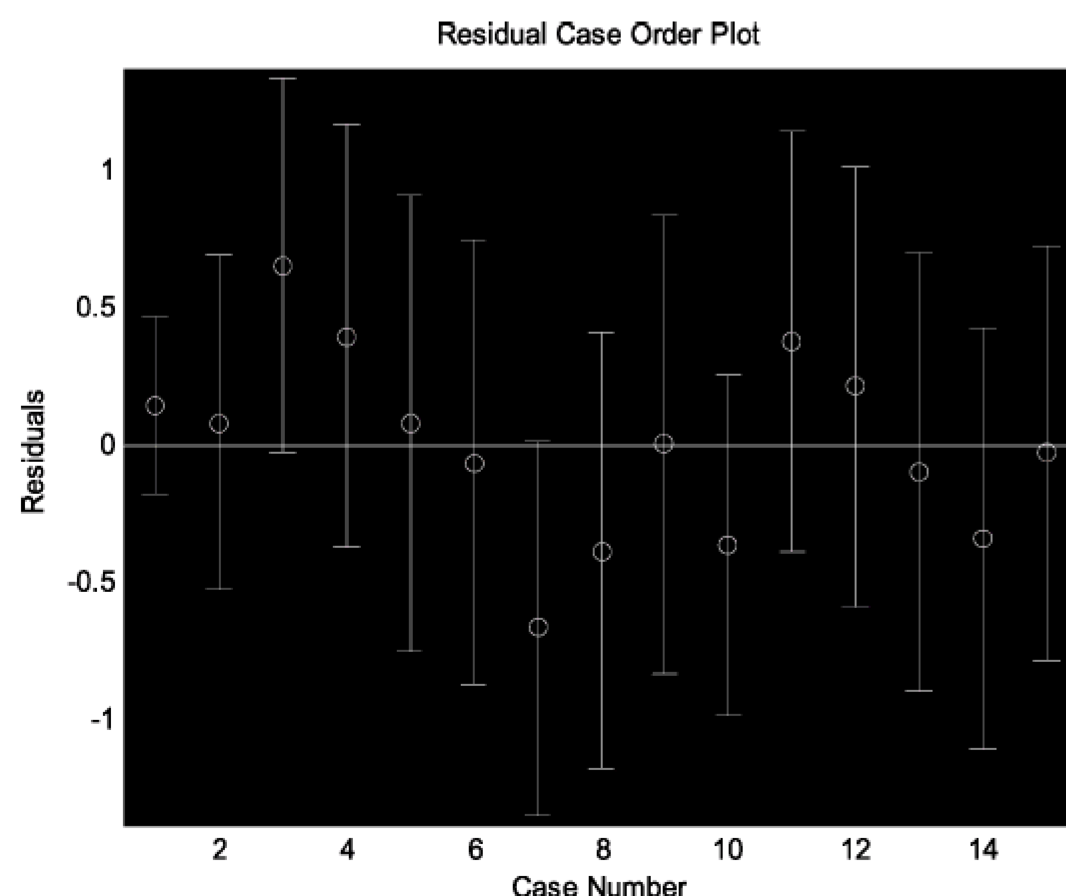


图 24-9　残差及置信区间图

得到回归系数如表 24-16 所示。

表 24-16　回归系数表

回 归 系 数	回归系数估计值	回归系数置信区间
β_0	-0.1008	[-0.3244 0.1228]
β_1	0.5362	[0.2345 0.8379]
β_2	-0.2930	[-0.5402 -0.0459]
β_3	-0.0248	[-0.2316 0.2811]
$R^2 = 0.7974$、$F = 14.4272$、$p < 0.0001$、$s^2 = 0.1521$		

第一、二、三产业煤炭消费量预测模型为：

$$\hat{\overline{Q}}_{CO_2} = -0.1008 + 0.5362\hat{x}m_1 - 0.293\hat{x}m_2 - 0.0248\hat{x}m_3$$

由于在时间序列数据的处理中，会引起序列相关问题，因而，必须对回归预测模型进行序列相关检验，也就是 DW 检验，以保证预测结果的有效性。

统计量 DW 定义为：

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n} e_t^{\,2}}$$

由于 $DW \approx 2(1-\hat{\rho})$，$-1 \leqslant \hat{\rho} \leqslant 1$，所以 $0 \leqslant DW \leqslant 4$，并且，若 $\hat{\rho}$ 在 0 附近，则 DW 在 2 附近，ε_t 的自相关性很弱（或不存在自相关）；若 $\hat{\rho}$ 在 ± 1 附近，则 DW 接近 0 或 4，ε_t 的自相关性很强。

MATLAB 编程计算 DW 和 $\hat{\rho}$ 值程序如下：

```
%第一、二、三产业煤炭消费量 DW 检验
clc,clear
load Bmtxfl.mat        %加载数据
n0=size(Bmtxfl);       %矩阵维数
for i=1:n0(1,1)
    %第一、二、三产业煤炭消费量预测模型
    msum(i,1)=-0.1008+0.5632*mtxfl(i,2)-0.293*mtxfl(i,3)-0.0248*mtxfl(i,4);
end
for i=1:n0(1,1)
    error(i,1)=mtxfl(i,5)-msum(i,1);  %误差
end
e1=error(1:n0(1,1)-1,:);     %当前时刻误差
e2=error(2:n0(1,1),:);       %下一个时刻误差
delta=0;
E2=0;
for i=1:n0(1,1)-1
    delta=delta+(e2(i,1)-e1(i,1))*(e2(i,1)-e1(i,1));
    E2=E2+e2(i,1)*e2(i,1);
end
DW=delta/E2;           %DW 检验

plot(e1,e2,'+')        %画图
xlabel('e1')
ylabel('e2')
title('模型 DW 检验')
```

运行程序，经 DW 检验可得：

$$DW=0.0993,\quad \hat{\rho}=0.95$$

画出误差分布图，如图 24-10 所示。

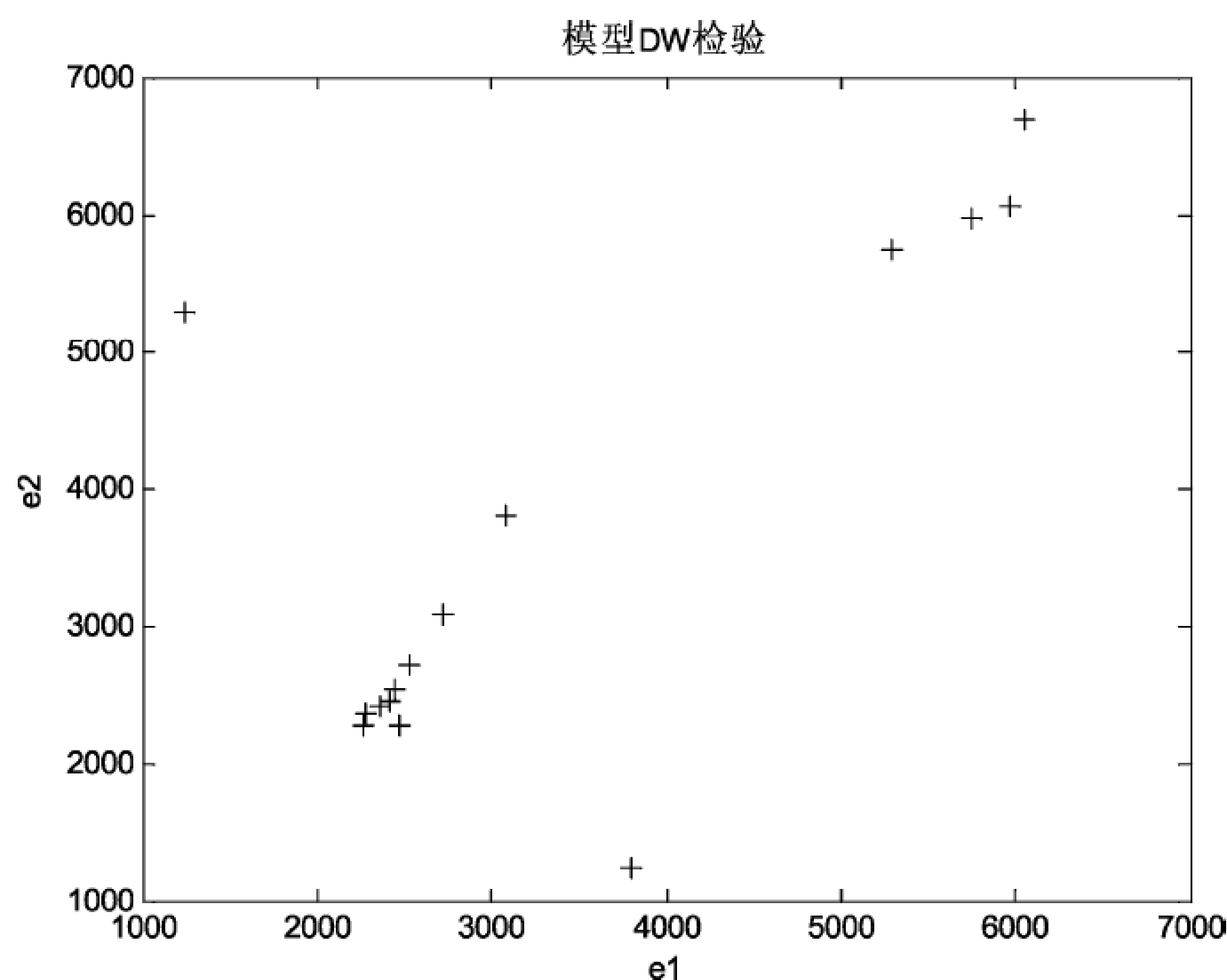


图 24-10　$e_t \sim e_{t-1}$ 误差散点图

在图 24-10 中，误差散点图分布于第一象限，第一、二、三产业煤炭总消费量的随机误差 ε_t 存在自相关性，其拟合图和留数图具体如图 24-11 所示。

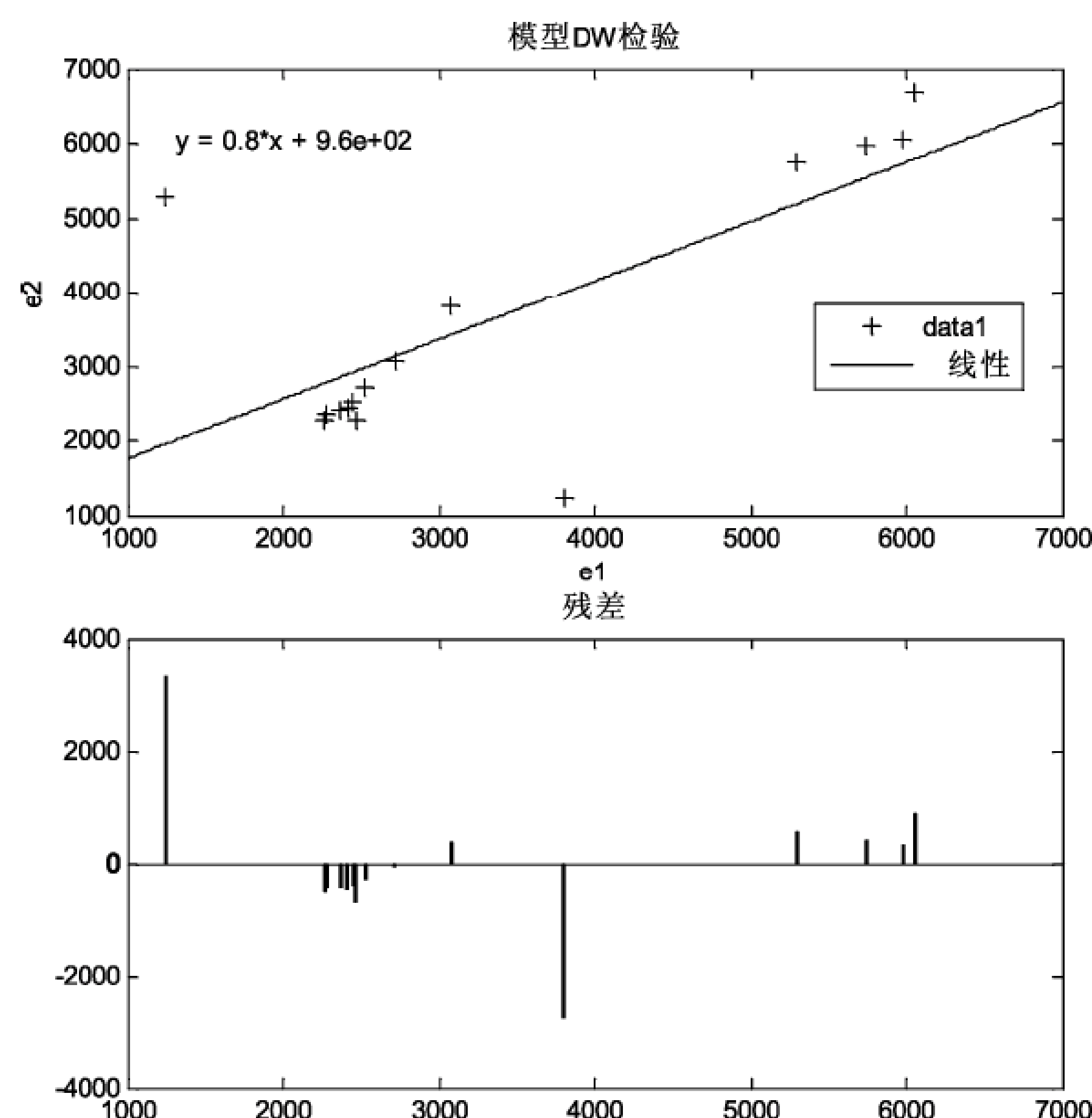


图 24-11　误差散点拟合图

由图 24-11 可得出，该模型存在严格的线性相关性，则应对模型进行变换得：

$$\hat{\hat{Q}}_{CO_2t}^{\;*}=\hat{\hat{Q}}_{CO_2t}-\hat{\rho}\hat{\hat{Q}}_{CO_2t-1}\text{，}\quad \hat{x}m_{it}^{\;*}=\hat{x}m_{it}-\hat{\rho}\hat{x}m_{i(t-1)}\ (i=1,2,3)$$

由图 24-11 中的 residuals 分布图可知，该误差分布拟合较合理，个别位置点预测存在较大的误差，整体上较好，则有：

$$\varepsilon_t=0.8\varepsilon_{t-1}+960$$

变换后，再次进行回归分析得表 24-17。

表 24-17　改进后回归模型系数

回 归 系 数	回归系数估计值	回归系数置信区间
β_0^*	-0.2823	[-0.3174 -0.2472]
β_1^*	0.1501	[0.0845 0.2158]
β_2^*	-0.3602	[-0.7237 0.0033]
β_3^*	-0.0318	[-0.0696 0.0061]
$R^2=0.9661$、$F=28.5007$、$p=0.0105$、$s^2=0.0004$		

最后，将模型中的 $\hat{\hat{Q}}_{CO_2t}^{\;*}$ 和 $\hat{x}m_{it}^{\;*}(i=1,2,3)$ 带入原始的 $\hat{\hat{Q}}_{CO_2t}$ 和 $\hat{x}m_{it}$，得到：

$$\hat{\hat{Q}}_{CO_2t}-\hat{\rho}\hat{\hat{Q}}_{CO_2t-1}=-0.2823+0.1501(\hat{x}m_{1t}-\rho\hat{x}m_{1t-1})-0.3602(\hat{x}m_{2t}-\rho\hat{x}m_{2t})-0.0318(\hat{x}m_{3t}-\rho\hat{x}m_{3t})$$

$$\hat{\hat{Q}}_{CO_2t}=-0.2823+0.95\hat{\hat{Q}}_{CO_2t-1}+0.1501\hat{x}m_{1t}-0.1426\hat{x}m_{1t-1}-0.3602\hat{x}m_{2t}$$
$$+0.3422\hat{x}m_{2t-1}-0.0318\hat{x}m_{3t}+0.0302\hat{x}m_{3t-1}$$

由上式，从机理上看，对于滞后性的 CO_2 排放强度规律作用下的时间序列数据，因此

引入自相关模型式更为合理。

24.7.6　问题三模型的优化求解

在整个碳排放约束下，考虑节能目标和江苏省经济发展目标主要取决于煤炭 CO_2 排放强度 Q_{CO_2}。江苏省节能减排和经济发展目标应满足修正模型，为简化模型的计算在此选择下式进行优化计算：

$$\hat{\hat{Q}}_{CO_2} = \beta_0 + \beta_1\hat{x}m_1 + \beta_2\hat{x}m_2 + \beta_3\hat{x}m_3$$

而煤炭碳排放量是直接制约经济发展的因素，节能减排亦从碳排放量上来加以控制，应保证碳排放量最少，可知：

$$\min = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{10}\hat{x}m_{ij}$$

又江苏省实施节能减排，一定程度上逐年减少碳排放，则煤炭量每年应保证逐年递减：

$$xm_1 + xm_2 + xm_3 \geqslant xm_{1j} + xm_{2j} + xm_{3j} \quad (j = 1,2,3,\cdots,10)$$

$$xm_{1j} + xm_{2j} + xm_{3j} \geqslant xm_{1j+1} + xm_{2j+1} + xm_{3j+1} \quad (j = 1,2,3,\cdots,9)$$

综合上式建立优化模型得：

$$\begin{cases} \min: \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{10}\hat{x}m_{ij} \\ s.t. \\ \qquad \beta_0 + \beta_1\hat{x}m_{1j} + \beta_2\hat{x}m_{2j} + \beta_3\hat{x}m_{3j} = \hat{\hat{Q}}_{CO_2j} \quad (j = 1,2,\cdots,10) \\ \qquad \hat{x}m_{1j} + \hat{x}m_{2j} + \hat{x}m_{3j} \geqslant \hat{x}m_{1j+1} + \hat{x}m_{2j+1} + \hat{x}m_{3j+1} \quad (j = 1,2,\cdots,9) \\ \qquad \beta_k \in \text{const} \quad (k = 0,1,2,3) \\ \qquad \hat{x}m_{ij} > 0 \quad (i = 1,2,3, j = 1,2,\cdots,10) \end{cases}$$

通过 LINGO 编程计算，程序如下：

```
model:
min=x11+x21+x31+x12+x22+x32+x13+x23+x33+x14+x24+x34+x15+x25+x35+x16+x26
+x36+x17+x27+x37+x18+x28+x38+x19+x29+x39+x110+x210+x310;    !碳排放量最小

!CO2 排放强度 -0.4717 -0.5755 -0.6902 -0.8026 -0.8997 -0.9828 -1.0616 -1.1353
-1.2036 -1.2658

0.5362*x11-0.293*x21-0.0248*x31-0.1008 + 0.4717 =0;    !节能经济目标
0.5362*x12-0.293*x22-0.0248*x32-0.1008 + 0.5755 =0;    !对应模型表达式
0.5362*x13-0.293*x23-0.0248*x33-0.1008 + 0.6902 =0;    !对应模型表达式
0.5362*x14-0.293*x24-0.0248*x34-0.1008 + 0.8026 =0;    !对应模型表达式
0.5362*x15-0.293*x25-0.0248*x35-0.1008 + 0.8997 =0;    !对应模型表达式
0.5362*x16-0.293*x26-0.0248*x36-0.1008 + 0.9828 =0;    !对应模型表达式
0.5362*x17-0.293*x27-0.0248*x37-0.1008 + 1.0616 =0;    !对应模型表达式
0.5362*x18-0.293*x28-0.0248*x38-0.1008 + 1.1353 =0;    !对应模型表达式
0.5362*x19-0.293*x29-0.0248*x39-0.1008 + 1.2036 =0;    !对应模型表达式
0.5362*x110-0.293*x210-0.0248*x310-0.1008 + 1.2658 =0; !对应模型表达式

27.5773*x11+73.9438+5928.8*x21+12368+22.8177*x31+74.5125-50.7-22940.4-62.5<0;
```

```
1.2086*x11+259.833*x21+1*x31-1.2086*x12-259.833*x22-1*x32>0;  !对应模型表达式
1.2086*x12+259.833*x22+1*x32-1.2086*x13-259.833*x23-1*x33>0;  !对应模型表达式
1.2086*x13+259.833*x23+1*x33-1.2086*x14-259.833*x24-1*x34>0;  !对应模型表达式
1.2086*x14+259.833*x24+1*x34-1.2086*x15-259.833*x25-1*x35>0;  !对应模型表达式
1.2086*x15+259.833*x25+1*x35-1.2086*x16-259.833*x26-1*x36>0;  !对应模型表达式
1.2086*x16+259.833*x26+1*x36-1.2086*x17-259.833*x27-1*x37>0;  !对应模型表达式
1.2086*x17+259.833*x27+1*x37-1.2086*x18-259.833*x28-1*x38>0;  !对应模型表达式
1.2086*x18+259.833*x28+1*x38-1.2086*x19-259.833*x29-1*x39>0;  !对应模型表达式
1.2086*x19+259.833*x29+1*x39-1.2086*x110-259.833*x210-1*x310>0;  !对应模型表达式

end
```

运行程序，整理输出结果，求得三大产业煤炭消费预测值，最终得到表 24-18。

表 24-18　三大产业煤炭消费量预测量

年份	第一产业煤炭消费量 xm_1	第二产业煤炭消费量 xm_2	第三产业煤炭消费量 xm_3
2011	81.6	22897.5	74.5
2012	76.3	22902.9	74.5
2013	73.9	22839.0	140.7
2014	73.9	22730.7	249.0
2015	73.9	22637.1	342.6
2016	73.9	22557.0	422.7
2017	73.9	22481.0	498.7
2018	73.9	22410.0	569.7
2019	73.9	22344.2	635.6
2020	73.9	22284.2	695.5

24.7.7　煤炭消费总量的求解

Step1：由表 24-18 数据整合表，分析可得到煤炭消耗总量与第一、二、三产业煤炭消费存在正相关关系，然而由于某种因素，导致煤炭消耗总量与第一、二、三产业煤炭消费和存在一定的差异，故在此建立煤炭消耗总量与第一、二、三产业煤炭消费预测回归模型，进而预测出未来十年煤炭消耗总量。

经 MATLAB 分析得到预测回归方程，其回归系数如表 24-19 所示。

表 24-19　煤炭消费总量回归系数表

参　　数	参数估计值	置 信 区 间
α_0	131.8973	[-46.7533 217.0413]
α_1	1.1593	[-0.0798 2.3983]
α_2	0.9936	[0.9913 0.996]
α_3	1.828	[1.0651 2.5909]
$R^2=1.000$、$F=874600$、$p<0.0001$、$s^2=92.467$		
预测回归方程	$xm=131.8973+1.1593xm_1+0.9936xm_2+1.828xm_3$	

Step2：对该模型对 DW 进行求解，煤炭消耗总量的分析结果如下：

$$\text{DW}=1.9989,\quad \hat{\rho}\approx 0$$

根据预测值和实际中之间的相对误差，画出 $e_t \sim e_{t-1}$ 的散点图，编程如下：

```
%煤炭消费量 DW 检验
clc,clear
load mtxfl.mat        %加载数据
n0=size(mtxfl);       %矩阵维数
for i=1:n0(1,1)
    msum(i,1)=131.8973+1.1593*mtxfl(i,2)+0.993*mtxfl(i,3)+1.828*mtxfl(i,4);
                                                                      %方程
end
for i=1:n0(1,1)
    error(i,1)=mtxfl(i,1)-msum(i,1);     %误差
end
e1=error(1:n0(1,1)-1,:);                 %前一个时刻误差
e2=error(2:n0(1,1),:);                   %下一个时刻误差
delta=0;
E2=0;
for i=1:n0(1,1)-1
    delta=delta+(e2(i,1)-e1(i,1))*(e2(i,1)-e1(i,1));
    E2=E2+e2(i,1)*e2(i,1);
end
DW=delta/E2;          %DW 检验

plot(e1,e2,'+')       %画图
xlabel('e1')
ylabel('e2')
title('模型 DW 检验')
```

运行程序输出图形如图 24-12 所示。

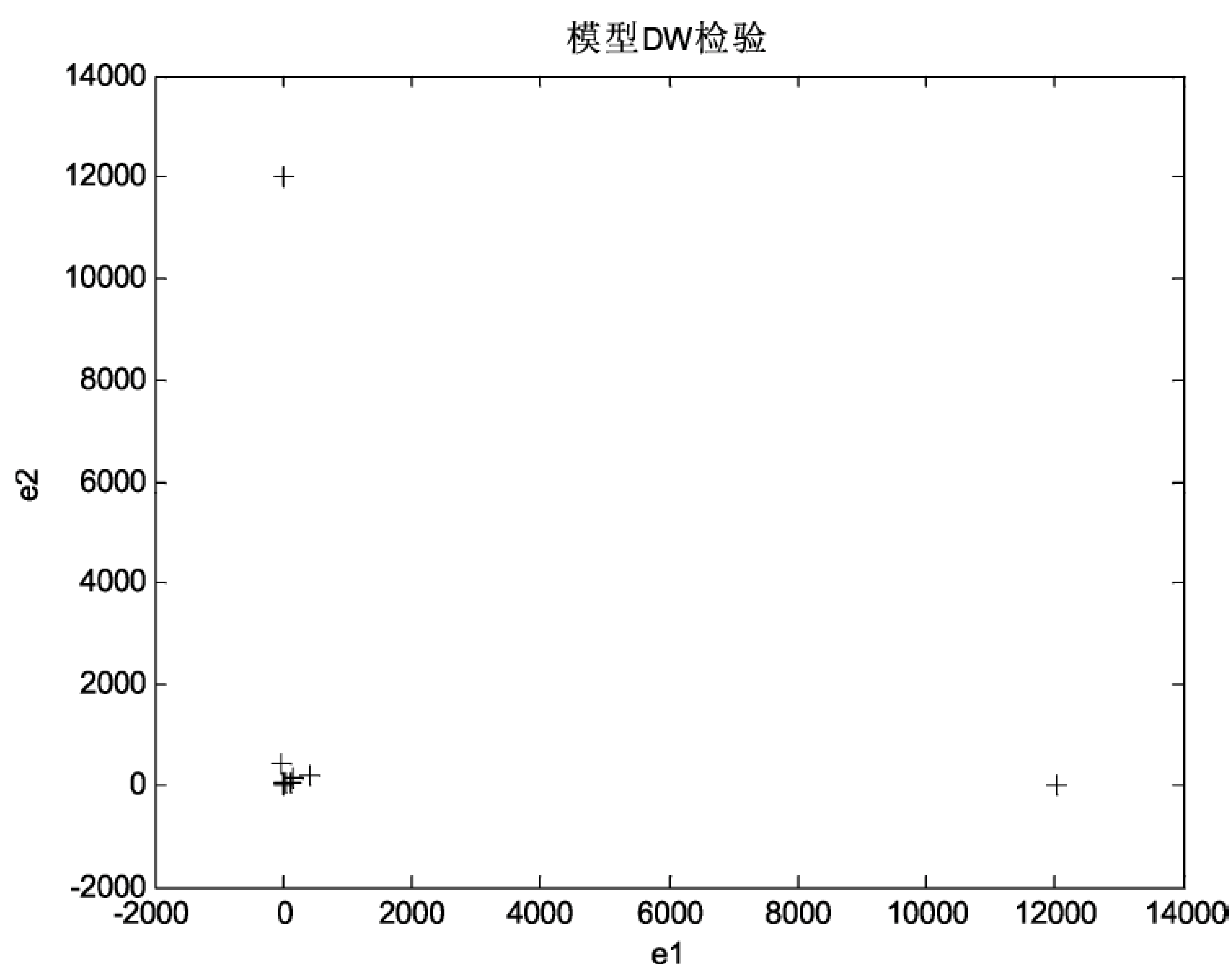


图 24-12　$e_t \sim e_{t-1}$ 误差散点图

由以上分析可知，煤炭总消费量 DW 检验值在 2 附近，误差散点图分布于第一象限，故可以得出，煤炭总消费量的随机误差 ε_t 不存在自相关性，由此说明了模型可靠。再由表 24-18 三大产业煤炭消费量预测量可得表 24-20 煤炭消费量预测值。

表 24-20　煤炭消费量预测值

year	2011	2012	2013	2014	2015
xm	23113.7	23112.8	23167.7	23258.1	23336.2
year	2016	2017	2018	2019	2020
xm	23403.0	23466.4	23525.7	23580.6	23630.6

Step3：根据表 24-18 和表 24-20 预测值，绘制相应预测值随时间变化图，MATLAB 程序如下：

```
%煤炭消费量 1995 年～2020 年图
clc,clear
load mtxflz.mat                            %加载数据
n0=size(mtxflz);                           %矩阵维数
subplot(2,2,1)                             %小窗画图
plot(1995:2010,mtxflz(1:16,1));            %画图
hold on                                    %继续画图句柄
plot(2010:2020,mtxflz(16:26,1),'r');
gtext('year')                              %标记字符串
gtext('煤炭消费总量')                      %标记字符串
hold on
for i=1:16
   sum(i,1)=mtxflz(i,1);                   %赋值
end
for i=17:26
   sum(i,1)=mtxflz(i,2)+mtxflz(i,3)+mtxflz(i,4);  %求和
end
plot(2010:2020,sum(16:26,1),'r.');

subplot(2,2,2)
plot(1995:2010,mtxflz(1:16,2));
hold on                                    %继续画图句柄
plot(2010:2020,mtxflz(16:26,2),'r');
gtext('year')                              %标记字符串
gtext('第一产业煤炭消费总量')              %标记字符串

subplot(2,2,3)
plot(1995:2010,mtxflz(1:16,3));
hold on                                    %继续画图句柄
plot(2010:2020,mtxflz(16:26,3),'r');%画图
gtext('year')                              %标记字符串
gtext('第二产业煤炭消费总量')              %标记字符串

subplot(2,2,4)
plot(1995:2010,mtxflz(1:16,4));
hold on                                    %继续画图句柄
plot(2010:2020,mtxflz(16:26,4),'r');%画图
gtext('year')                              %标记字符串
gtext('第三产业煤炭消费总量')              %标记字符串
```

运行程序输出图形如图 24-13 所示。

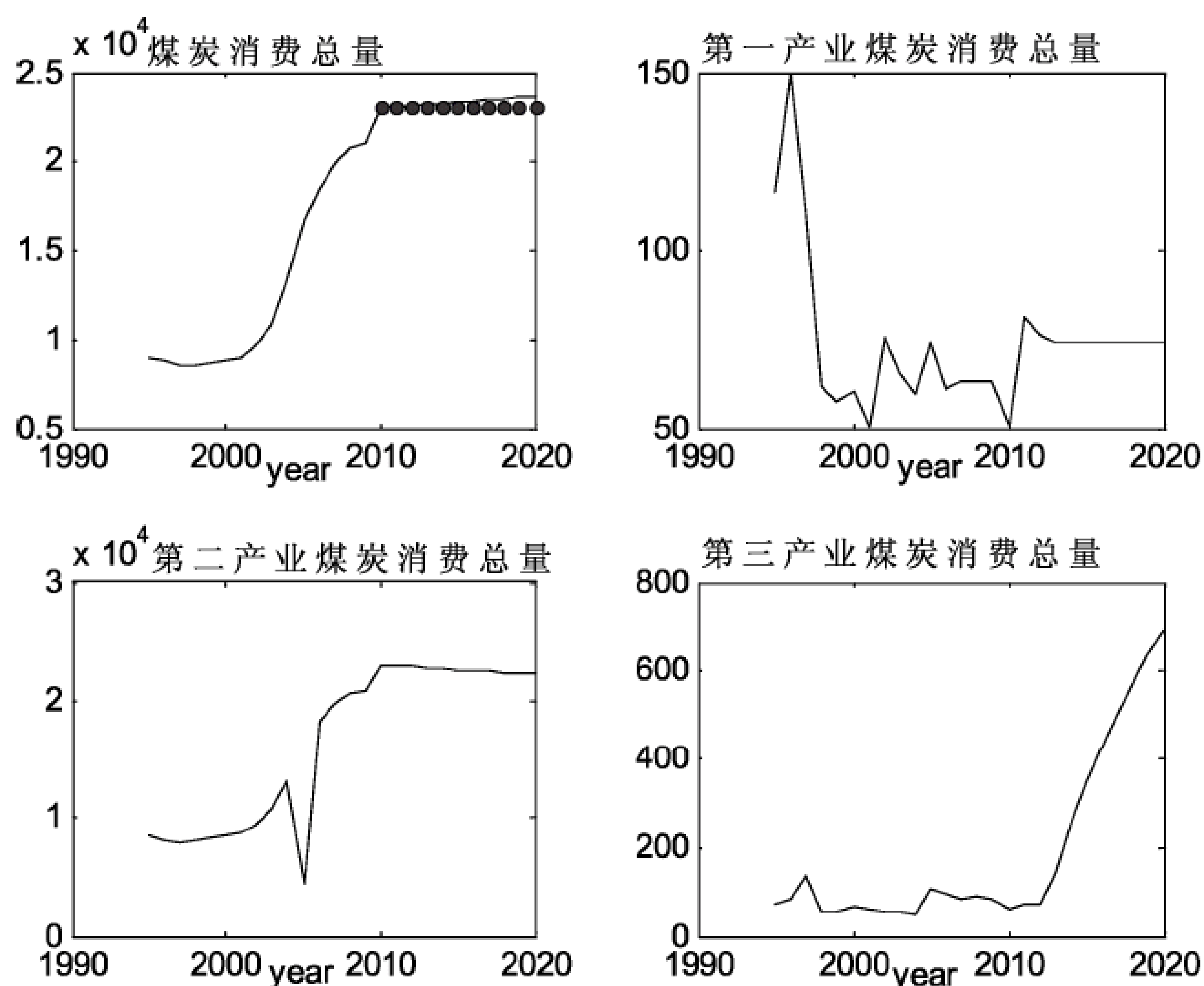


图 24-13　煤炭消费量预测值时间变化图

24.7.8　模型结果的分析

从图 24-13 中可得出，第一产业煤炭消费量先快速增长然后趋于平稳，整体上呈现上升的趋势；第二产业煤炭消费量逐年缓慢的下降，下降的趋势略小；第三产业煤炭消费量逐年增长，增长趋势较大。故满足“十二五”时期目标和 2020 年碳排放目标，应减小第二产业的煤炭消费量，大力发展第一产业和第三产业。

24.8　问题四意见与建议

由第二问的结果，可以得到未来十年内，江苏省的三大能源消耗结构基本保持平稳。其中，煤炭的使用仍然占据着主要位置，石油的使用次之，天然气所占比重最少。在“十二五”期间及未来十年江苏省煤炭消费量下降，之后保持不变；石油消费量呈现一个上升的趋势，上升的幅度不大；天然气消费量先升高后下降，波动较平稳。从能源消费量走势图可看出，能源消费量在 2010 年～2011 年有一个突变下降值，在 2011 年～2020 年，能源消费量总体上保持平稳有一定的下降的趋势。

在三大能源中，天然气的使用最清洁，而且能源利用率最高，而且是近年兴起的新能源，开发潜能大。石油的使用清洁程度次之，能源利用率也次之。而煤炭的使用则是对环境污染较大，产生的废气粉尘等较多，并且是多年使用的能源，开发潜能小，并且再生能力弱。

根据第三问的结果分析得到，第三产业在未来十年期间的发展最为迅速，因此它的耗煤量增长最快。而第一产业本身对煤炭的需求程度较小，因此变化不大。而第二产业，也就是工业等产业对煤炭的需求量仍然很大，不过略有下降。

第一产业煤炭消费量先快速增长然后趋于平稳，整体上呈现上升的趋势；第二产业煤

炭消费量逐年缓慢的下降，下降的趋势略小；第三产业煤炭消费量逐年增长，增长趋势较大，故满足“十二五”时期目标和 2020 年碳排放目标，应减小第二产业的煤炭消费量，大力发展第一产业和第三产业。

因此，为了保证可持续发展，提高能源利用率，减少废气、粉尘和有毒物质等的排放，并且还要保证经济的正常发展，在未来的能源结构上，政府应该大力发展清洁能源。例如天然气、风能、水能、核能和太阳能等，并且尽量减少煤炭和石油等再生能力弱并且利用效率低，燃烧废物多的能源的使用。

同时，尽快加速调整产业结构也是非常重要的一项任务。农业、林业和渔业等第一产业生产效率较低，但是对能源的需求不大。工业等第二产业目前在产业结构中的比较很大，而且对能源需求量也很多，对环境的影响也较大。服务业等第三产业目前所占比重较小，对能源的需求量也适中，经济价值也较大。

因此，在未来的产业结构调整方面，应该加大对第三产业的煤炭的投入，第一产业维持原有水平，第二产业也应略微下调。

24.9　模型的评价与推广

24.9.1　模型的评价

对于问题一的模型，寻求影响煤炭消耗量的指标，不是单纯地通过经验选取，而是客观地基于数据的基础上，进行主成成分分析，提取出真正的对其产生影响的指标。在寻求指标的目标的影响情况时，采用了多元线性回归模型，并且计算出偏相关系数，客观且具体地反应了影响情况。

对于问题二的模型，用 CO_2 排放强度同时反应节能和经济发展的内容。巧妙地先对 CO_2 排放强度进行插值，再对 CO_2 排放强度和三大能源结构建立多元线性函数，建立优化模型。对 CO_2 排放强度进行插值相对于直接对三大能源直接插值拟合计算出的未来十年能源结构更加的客观。

对于问题三的模型，采取的思路与第二问类似，也同样地建立了多元回归模型，进行预测优化。不足之处在于还未能够分析出煤炭消耗总量是否等于三大产业煤炭消费之和。比较巧妙的一点是并没有直接用 CO_2 排放强度和煤炭消耗总量进行建模预测，而是用求解出的三大产业耗煤量和煤炭总共消费量进行建模预测。

对于问题四，根据前几问所计算得出的结果进行建议，同时也参考了实际的一些政策和现实，得出了比较合理和有现实意义的意见和建议。

24.9.2　模型的推广

本模型采用较多的就是多元线性回归模型，通过找出各个变量之间的线性回归函数，根据节能减排的目标，建立优化模型进行预测分析。在预测方法上可以进行一些改进，尝试采用新的模型方法进行预测，并且比较多个模型的结果，采取最符合实际、最合理的模型和结果。

第 25 章　变循环发动机部件法建模及优化

本章以航空发动机为建模对象。航空发动机主要部件有：进气道、风扇、副外涵道、CDFS 涵道、核心驱动风扇级（CDFS）、主外涵道、前混合器、高压压气机、主燃烧室、高压涡轮、低压涡轮、后混合器、加力燃烧室和尾喷管。双涵道模式下，选择活门和后混合器（后 VABI）全部打开；单涵道模式下，选择活门关闭，后混合器关小到一定位置。

变循环发动机有两种工作模式，分别为涡喷模式和涡扇模式。发动机在亚音速巡航的低功率工作状态，风扇后的模式转换活门因为副外涵与风扇后的压差打开，使更多空气进入副外涵，同时前混合器面积开大，打开后混合器，增大涵道比，降低油耗，此时为发动机的涡扇模式。发动机在超音速巡航、加速和爬升状态时，前混合器面积关小，副外涵压力增大，选择活门关闭，迫使绝大部分气体进入核心机，产生高的推力，此时为发动机的涡喷模式。

因此整个航空发动机部件建模步骤较多，求解较复杂。本章主要基于粒子群智能算法对该部件进行求解，得到发动机较合理的设计参数值，指导实际应用。

学习目标：

（1）学习和掌握机理分析方法；

（2）掌握 MATLAB GUI 设计等方法；

（3）掌握粒子群算法解决非线性隐函数方程组等方法；

（4）掌握变循环发动机部件建模及优化方法等。

注意：本章出现的所有附录均见程序文档。

25.1　问题的重述

由飞机/发动机设计原理可知，对于持续高马赫数飞行任务，需要高单位推力的涡喷循环，反之，如果任务强调低马赫数和长航程，就需要低耗油率的涡扇循环。双涵道变循环发动机可以同时具备高速时的大推力与低速时的低油耗。变循环发动机的内在性能优势，受到了各航空强国的重视，是目前航空发动机的重要研究方向。

请完成以下几个问题：

一、（1）请画出附录 4（见程序文档）中风扇特性数据表中流量随压比函数值变化的图形。

（2）设在发动机飞行高度 $H = 11\text{km}$，飞行马赫数 $Ma = 0.8$ 的亚音速巡航点，导叶角度均设置为 0°，风扇和 CDFS 的物理转速都为 0.95，风扇和 CDFS 的压比函数值都为 0.5，求风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量。

二、设在发动机飞行高度 $H=11\text{km}$，飞行马赫数 $Ma=0.8$ 的亚音速巡航点，采用双涵道模式，导叶角度均设置为 0°，选择活门完全打开，副外涵道面积设为1.8395e+003，后混合器出口总面积设置为 2.8518e+004，尾喷管喉道面积 $A_8=9.5544\text{e}+003$，n_L=0.85 。请运用或设计适当的算法求解由发动机 7 个平衡方程（1）、（2）、（3）、（4）、（5）、（6）、（7）组成的非线性方程组。要求陈述算法的关键步骤及其解释，尽可能讨论算法的有效性。

如果还有时间，请研究下面的问题：

三、（1）设在发动机飞行高度 $H=11\text{km}$，飞行马赫数 $Ma=1.5$ 的超音速巡航点，发动机采用单涵道模式，将选择活门面积设置为 0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度和高压涡轮导叶角度均设置为 0°，后混合器面积设置为 2.8518e+004。请问发动机 CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积 3 个量为多少时，发动机的性能最优？

（2）试研究发动机飞行高度 $H=11\text{km}$，飞行马赫数从 $Ma=1.1$ 变化到 $Ma=1.6$，发动机特性最优时，CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度和尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。此时发动机采用单涵道模式，将选择活门面积设置为 0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度和高压涡轮导叶角度均设置为 0°，后混合器出口总面积设置为 2.8518e+004，后混合器内和外涵道面积可调（即不受附录 1 后混合器给定的内和外涵道面积值的约束）。

25.2　摘　　要

本章对变循环发动机部件法建模及优化问题进行研究。首先由附录 1 计算公式，利用 MATLAB 编程计算并验证发动机各部件出口总温、总压和流量等数值关系。然后采用机理分析法，推导出了由平衡方程所决定的非线性隐函数方程组，运用基于自适应变异粒子群算法对该方程寻优计算，验证了该算法的有效性和结果的可靠性。最后根据求解数值结果，分析了优化参数的变化规律。

问题一，利用 UG/NX 对发动机进行了 3D 建模复原，便于理解发动机工作原理，由压比函数值与增压比关系，绘制了风扇特性曲线图形。由单、双涵道风扇和 CDFS 计算公式，得出了单、双涵道的出口总温、总压和流量。

问题二，根据发动机部件法推导出了 7 个平衡方程所决定的非线性系统，该系统由各部件参数的非线性隐函数方程所组成，因此，不能直接对其进行求解。本设计运用赋值法分析系统各参数影响，以油耗率为适应度函数，采用 PSO 算法求解该方程组的近似数值解，通过观察适应度曲线，多次运算取平均值，得到发动机较合理的设计参数值，较之于赋值法，模型更加精确，验证了算法的合理性和有效性。

问题三，在单涵道模式下，适当调节马赫数 Ma 和外涵道面积，采用 PSO 算法对系统所有未知变量全局寻优，统计 CDFS 导叶角、低压涡轮导叶角和喷管喉道面积优化结果值，然后绘制各参数随马赫数 Ma、外涵道面积变化时的图形，并分析其变化不规则的原因，多是由于粒子群算法寻优规则所致。

本章特色在于设计了单、双涵道的 GUI 软件，可供用户任意修改参数调用，程序可执行性较强；采用 PSO 算法进行寻优计算，解决了复杂系统变量的快速寻优计算，通过多次寻优取平均值的方法减小系统跳变，从而增强系统的鲁棒性。

关键词：机理分析、MATLAB GUI、PSO 算法、适应度、性能优化。

25.3　模 型 假 设

根据题意，可以进行如下假设：

（1）发动机中气流沿发动机轴向按一维流动处理，不考虑二维流动的情况；

（2）发动机各部件只考虑气体流动，不考虑流体压缩，不考虑流体与部件之间的热交换；

（3）高压压气机后不经主燃烧室的分流气流为冷却气流，在本章中忽略不计；

（4）燃油在燃烧室中燃烧延迟的影响忽略不计；

（5）附录 4 中给出的实验数据全部真实可靠，不存在故意捏造的情况。

25.4　符 号 说 明

25.4.1　注释表

H：高度， km	P：环境压力，bar
Ma：马赫数	T：环境温度，K
γ：气体绝热指数	σ：总压恢复系数
n：转速，rpm	pr：增压比
α：导叶角	η：效率
W：流量，kg/s	zz：压比函数值
C：换算常数	k：修正系数
ψ：熵，J/K	h：焓
R：气体常数	l：功
N：功率，W	A：面积， m^2
$\overline{CP}$：高压涡轮平均等比热	f：油气比
$q()$：气动函数 q	$f()$：气动函数 f
$\pi()$：气动函数 π	$\tau()$：气动函数 τ
const：常数	F：推力，N
V：飞行速度，m/s	Fs：单位推力
sfc：耗油率	λ：速度系数
$z()$：气动函数 z	f_b：燃油比
H_u：燃油热值	c：气流速度

25.4.2　下标含义

0：进气道　　1 或 CL：风扇

2 或 CDFS：核心驱动风扇级　　3 或 CH：高压压气机

4：主燃气室　　5 或 TH：高压涡轮
6 或 TL：低压涡轮　　d：设计点
cor：换算转速　　Fduct：副外涵道
ei：理想值　　Zduct：主涵道
out：出口　　in：进口
7：尾喷管喉部　　8：尾喷管喉道
9：尾喷管出口　　map：特性图

25.5　问 题 分 析

本章针对变循环发动机部件法建模及优化过程中的有关问题进行求解和探讨，由题目要求可知，需解决以下问题。

（1）关于第一问：绘制出风扇的流量随其压比函数变化的图形，并分析其流量与压比函数值之间存在的关系；仔细理解附录 1 中发动机各部件计算公式，推导得出风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量的计算公式。

注意：由于题目中没有明确说明是单涵道还是双涵道，故需分两种情况进行计算。其中，双涵道模型经过风扇输出后，仍需利用线性插值法求解增压比、效率和换算流量。

（2）关于第二问：根据题目已知条件和附录 1 的发动机各部件计算公式，确定发动机的 7 个平衡方程所组成的非线性方程组，并设计合理有效的算法求解这个方程组所包含的 7 个发动机各部件的关键参数的数值解，并讨论所用算法的合理性。

（3）关于第三问：运用第二问提出自适应变异粒子群算法，在单涵道模式下，优化发动机工作性能，求解发动机 CDFS 导叶角、低压涡轮导叶角和喷管喉道面积。运用粒子群算法求解：当马赫数 Ma 从 1.1 到 1.6 变化时，发动机 CDFS 导叶角、低压涡轮导叶角和喷管喉道面积的变化规律，同时考虑外涵道面积对结果的影响。

25.6　问　题　一

25.6.1　绘制风扇特性数据表中流量随压比函数值变化的图形

为了更好地理解变循环发动机的工作原理，利用 UG/NX 三维软件对题中二维变循环发动机进行 3D 建模，得出变循环发动机 3D 概念模型，很好的帮助、理解和解决题中专业问题。发动机工作时气流运动示意图如图 25-1 所示。

由附录 3（见程序文档）可知，根据压气机压比函数值 $zz=\dfrac{pr-pr_{\min}}{pr_{\max}-pr_{\min}}$ 的定义，可由压比 pr_c 求解出风扇的压比函数值 zz。压比函数值为自变量，流量为因变量，利用 MATLAB 2012B 绘制出不同换算转速情况下风扇特性数据表中流量随压比函数值变化图形，编程如下：

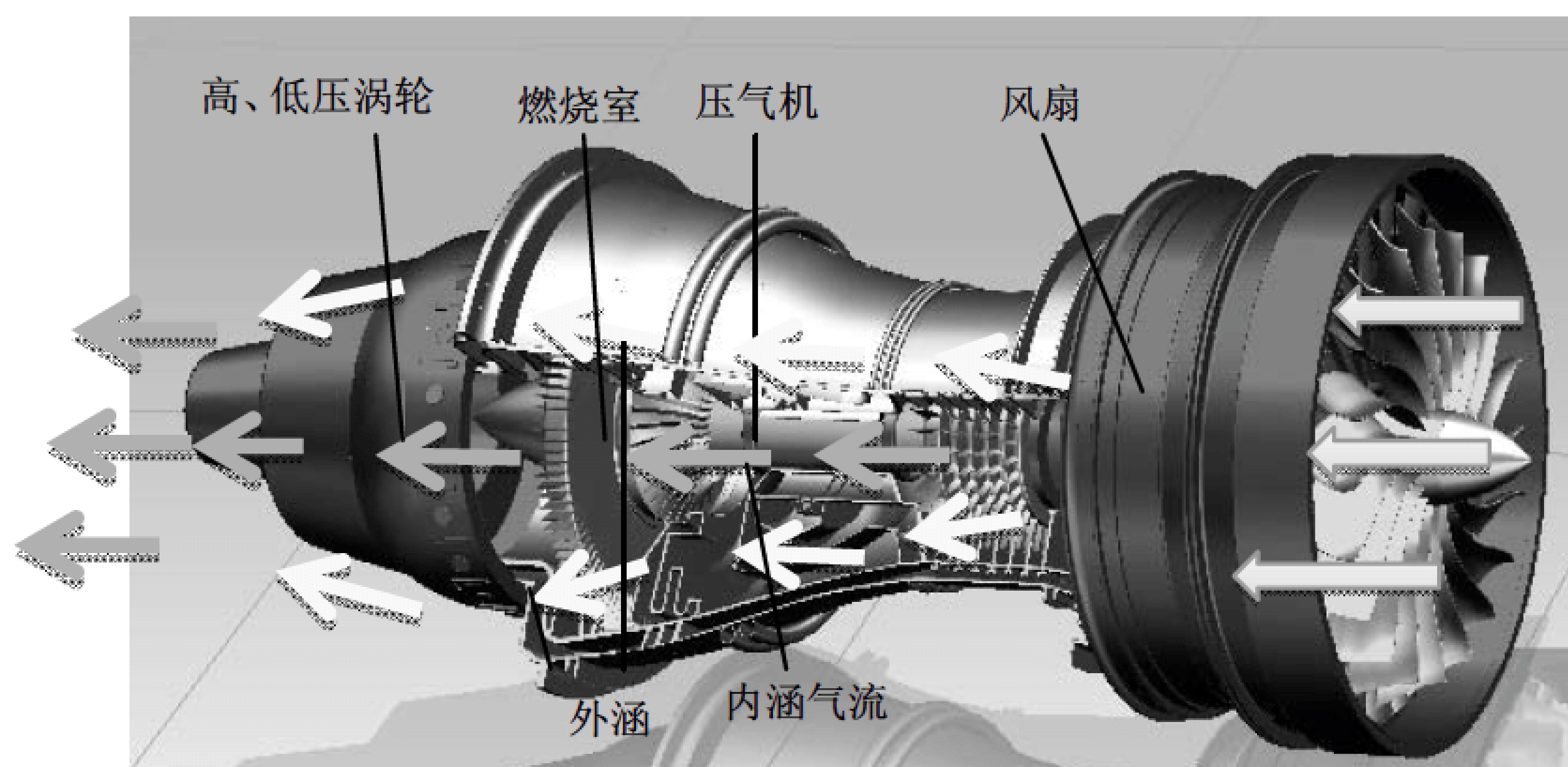


图 25-1　变循环发动机的工作过程示意图

```
%% --------风扇特性：流量随压比函数值变化的图形（2 维图形）-----MATLAB 2012B
clc % 清屏
clear all;            %删除 workplace 变量
close all;            %关掉显示图形窗口
format short
warning off

H = 11;               %飞行高度
Ma = 0.8;             %飞行马赫数
r = 1.4;              %纯空气气体绝热指数

% 输入温度给定值
Tind_f=288.15;
Tind_CDFS=428.56862609;
Tind_hcom=473.603961;
% 输入压力给定值
Pind f=1.01325;
Pind CDFS=3.5464;
Pind hcom=4.886;

load('D:\MATLAB Edit 2012B\ysw\20130920\data\fan.mat');
                           %加载风扇特性数据——原始数据

% 输入压气机管道总温、总压
tube TP = tube(H,Ma,r);     %function tube TP=tube(H,Ma,r)
Tin_f = tube_TP(1,1);       %风扇输入总温
Pin_f = tube_TP(1,2);       %风扇输入总压
%% 风扇
alpha = 0;                  %导叶角度
nspeed =0.95;               %风扇和 CDFS 的物理转速都为 0.95
ndata=size(fan);
prc f=fan(:,1:3:ndata(1,2)-2);       %增压比
prc_f(1,:)=[];
Wc_f=fan(:,2:3:ndata(1,2)-1);        %流量
Wc_f(1,:)=[];
nf=size(prc f);
figure(1),
for i=1:nf(1,2)
   zz(:,i) = (prc f(:,i) - min(prc f(:,i)))./(max((prc f(:,i)))-min(prc f(:,i)));
   plot(zz(:,i),Wc f(:,i),'linewidth',3);
   hold on
```

```
    grid on
end
xlabel('压比函数');ylabel('流量');
grid on;title('风扇特性中流量随压比函数值变化图'); axis tight
figure(2),
for i=1:nf(1,2)
    Wcf(1,i)=Wc f(nf(1,1),i);
    prcf(1,i)=prc f(nf(1,1),i);
    plot(Wc f(:,i),prc f(:,i),'linewidth',3);
    hold on
    grid on
end
plot(Wcf,prcf,'linewidth',3)
xlabel('换算流量');ylabel('增压比');
grid on;title('典型的压气机流量特性曲线'); axis tight
```

运行程序输出结果，如图 25-2 和图 25-3 所示。

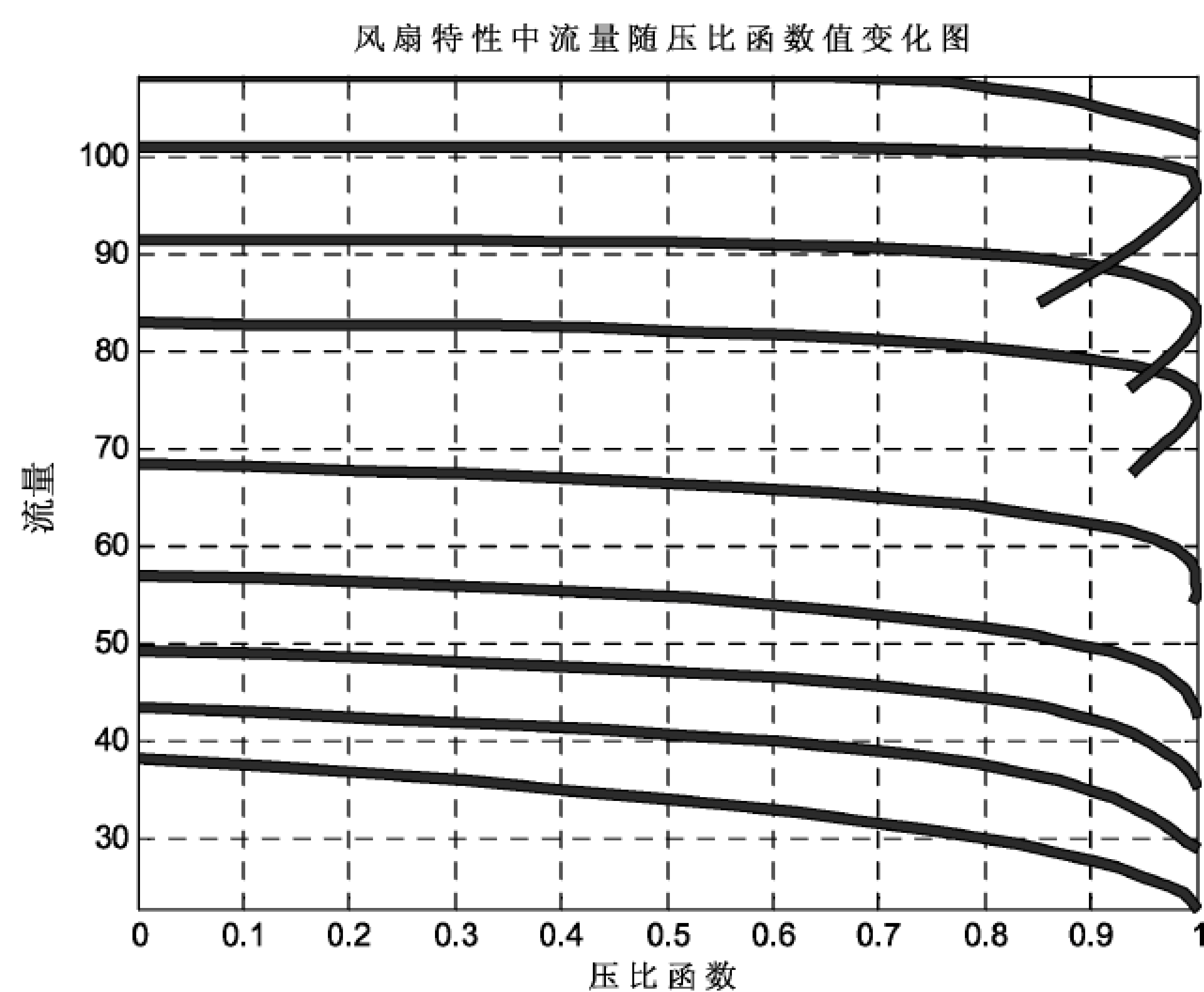


图 25-2　风扇特性数据表中流量随压比函数值变化的图形

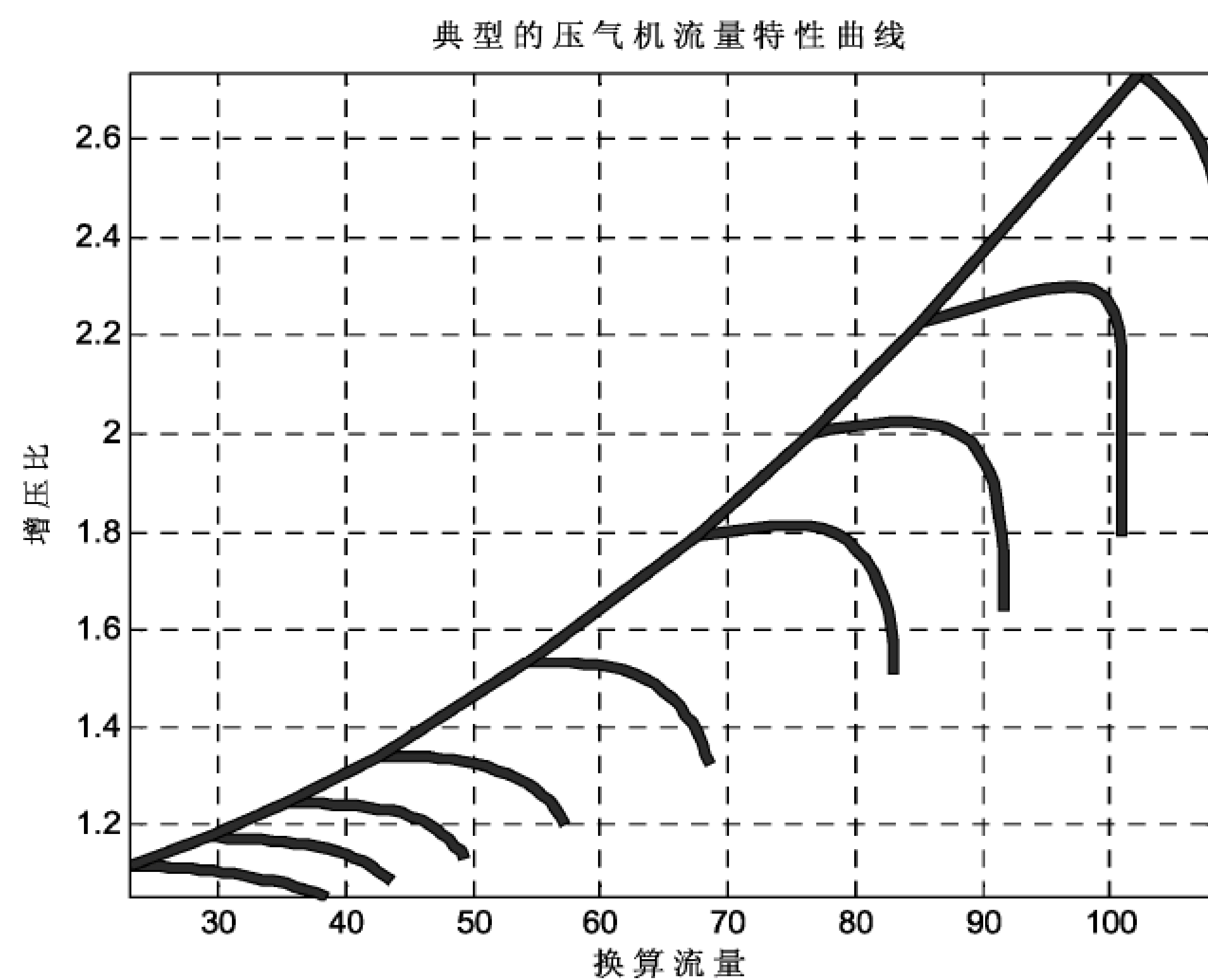


图 25-3　风扇流量特性曲线图形

25.6.2　求解风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量

由上述分析可知，问题一应分为双涵道和单涵道工作方式进行求解。

（1）双涵道模式工作时的计算情况

采用双涵道的模式时，由于风扇、CDFS 和高压压气机这三个压气机部件采用同一种计算方法，这里以风扇工作模式计算为例，求解风扇的出口总温、总压和流量，按照此方法计算出 CDFS 的出口总温、总压和流量。

Step1：计算进气道出口的总温总压。

由题目知，发动机飞行高度 $H=11\text{km}$，飞行马赫数 $Ma=0.8$，计算标况下环境压力（静压）p_0=0.2172，环境温度（静温）T_0=216.65。由进气道进口的总温和总压的公式（25.1）可以求出进气道进口的总温 $T_{\text{in,tupe}}$=216.6500，进气道进口的总压 $P_{\text{in,tupe}}$=0.2172。

$$\begin{cases} T_{\text{in,tupe}}=T_0\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}Ma^2\right) \\ p_{\text{in,tupe}}=p_0\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{cases} \tag{25.1}$$

Step2：计算进气道出口的总温和总压。

由飞行马赫数 $Ma=0.8<1$ 可知进气道总压恢复系数为 σ_{tupe}=1.0，则进气道出口总温总压 $T_{\text{out,tupe}}$=244.381200，$P_{\text{out,tupe}}$=0.331146。

Step3：计算风扇换算转速。

由公式（25.2）可以算出风扇的换算转速，其中风扇的 $T_{\text{d,CL}}$=288.15，$T_{\text{in,CL}}=T_{\text{out,tupe}}$=244.381200，$n$=0.95，计算结果为 $n_{\text{cor,CL}}$=1.0316。

$$n_{\text{cor,CL}}=n\sqrt{\frac{T_{\text{d,CL}}}{T_{\text{in,CL}}}} \tag{25.2}$$

Step4：计算出风扇的增压比 $pr_{\text{CL,map}}$、效率 $\eta_{\text{CL,map}}$ 和换算流量 $W_{\text{CL,map}}$。

利用线性插值法计算出 $n_{\text{cor,CL}}$=1.0316 时风扇的增压比、效率和换算流量三组数据。根据风扇压比函数值的定义，可以求出当 zz=0.5 时特性图上的增压比 $pr_{\text{CL,map}}$、效率 $\eta_{\text{CL,map}}$ 和换算流量 $W_{\text{CL,map}}$，接着将这三个值代入修正公式（25.3）中得出修正值，其中 k_{pr}、k_{w}、k_η 分别是增压比、效率和换算流量的修正系数。风扇的 k_{pr}、k_{w}、k_η 分别取 1、1、0.01，由题意知 α_{CL}=0，C_{pr}、C_{w}、C_η 分别为 2.3894、0.4950、1.0684，可以计算出修正后的增压比 $pr_{\text{CL}}=2.3894pr_{\text{CL,map}}-1.3894$、换算流量 $W_{\text{CL}}=0.4950W_{\text{CL,map}}$ 和效率 $\eta_{\text{CL}}=1.0684\eta_{\text{CL,map}}$。

$$\begin{cases} pr_{\text{CL}}=C_{\text{pr}}(pr_{\text{CL,map}}-1)(1+\dfrac{k_{\text{pr}}}{100}\alpha)+1 \\ W_{\text{CL}}=C_W W_{\text{CL,map}}(1+\dfrac{k_{\text{w}}}{100}\alpha) \\ \eta_{\text{CL}}=C_\eta\eta_{\text{CL,map}}(1+\dfrac{k_\eta^2}{100}\alpha) \end{cases} \tag{25.3}$$

Step5：计算风扇的出口总压、总温和流量

① 风扇的出口总压为：$P_{\text{out,CL}} = P_{\text{in,CL}} \cdot pr_{\text{CL}}$ =0.924094；

② 计算风扇的进口熵：$\psi_{\text{in,CL}} = \psi(T_{\text{in,CL}})$，进口焓：$h_{\text{in,CL}} = h(T_{\text{in,CL}})$；

③ 计算风扇出口理想熵：$\psi_{\text{out,ei}} = \psi_{\text{in,CL}} + \dfrac{R}{M}\ln pr_{\text{CL}}$，这里 $M=1$，R=287；

由风扇出口理想熵 $\psi_{\text{out,ei}} = \psi(T^{*}_{\text{out,ei}})$，计算出风扇出口理想总温 $T^{*}_{\text{out,ei}} = \psi^{-1}(\psi_{\text{out,ei}})$；

计算风扇出口理想焓：$h_{\text{out,ei}} = h(T^{*}_{\text{out,ei}}) = h(\psi^{-1}(\psi_{\text{out,ei}}))$；

根据公式 $\eta_{\text{CL}} = \dfrac{h_{\text{out,ei}} - h_{\text{in,CL}}}{h_{\text{in,CL}} - h_{\text{in,CL}}}$ 可以计算压气机出口焓 $h_{\text{out,CL}} = \dfrac{h_{\text{out,ei}} - h_{\text{in,CL}}}{\eta_{\text{CL}}} + h_{\text{in,CL}}$；

由压气机出口焓 $h_{\text{out,CL}} = h(T_{\text{out,CL}})$，求出风扇出口总温为：$T_{\text{out,CL}}$ =485.679914。

由公式（25.4）求出风扇出口流量 W_{a2} =37.714634。

$$W_{\text{out,CL}} = W_{\text{CL}} \cdot \sqrt{\frac{T_{\text{d,CL}}}{T_{\text{in,CL}}} \cdot \frac{p_{\text{in,CL}}}{p_{\text{d,CL}}}} \tag{25.4}$$

同理，计算出 CDFS 出口总温 $T_{\text{out,CL}}$ =794.640845，总压 $P_{\text{out,CL}}$ = 1.066453，流量 $W_{\text{out,CL}}$ =68.859768。

风扇出口理想总温 $T^{*}_{\text{out,ei}} = \psi^{-1}(\psi_{\text{out,ei}})$ 的求解是一个难点，利用 MATLAB 工具求解，Solve 命令求解易出现奇异值。本章中采用 fmincon 命令解决此问题，具体代码如下：

```
syms T
% 计算压气机出口理想总温
y = @(T)abs( Sairout_ei - ((0.10489652*10^4)*log(T*10^(-3))+0.80558643*(10^4)+...
   +(-465.6811*T+0.6793*T^2-4.1745*(10^(-4))*(T^3)+1.4177*(10^(-7))*(T^4)-2.5558*(10^(-11))*(T^5)+2.2909*(10^(-15))*T^6)*(10^(-3))) );
lb= 10;     %下限
ub=8*Tin;   %上限
Tout_ei = fmincon(y,Tin,[],[],[],[],lb,ub,[],optimset('Algorithm','SQP','Disp','none'));
```

双涵道模式下，具体求解流程图如图 25-4 所示。

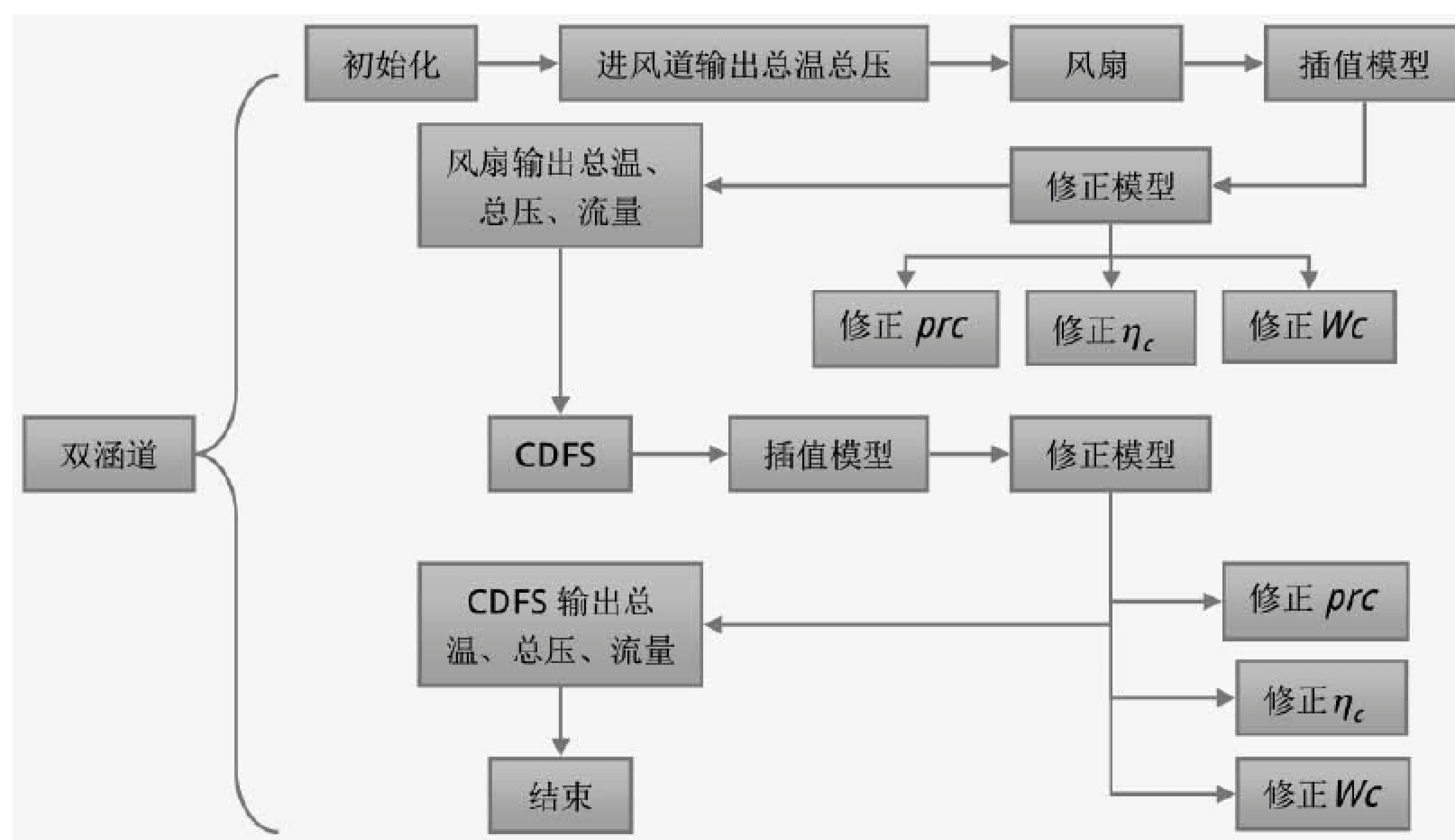


图 25-4　双涵道模式下风扇和 CDFS 计算求解步骤

（2）单涵道模式工作时的计算情况

单涵道模式时，风扇的总温、总压和流量计算等同于双涵道计算方式，而 CDFS 的计算有点变化。不同之处在于，风扇的出口流量全部经过 CDFS，CDFS 出口流量等于其进口流量，即风扇的出口流量 $W_{\text{out,CL}}=37.714634$，总温和总压修正计算与双涵道计算方式一致。单涵道模式下，具体求解流程图如图 25-5 所示。

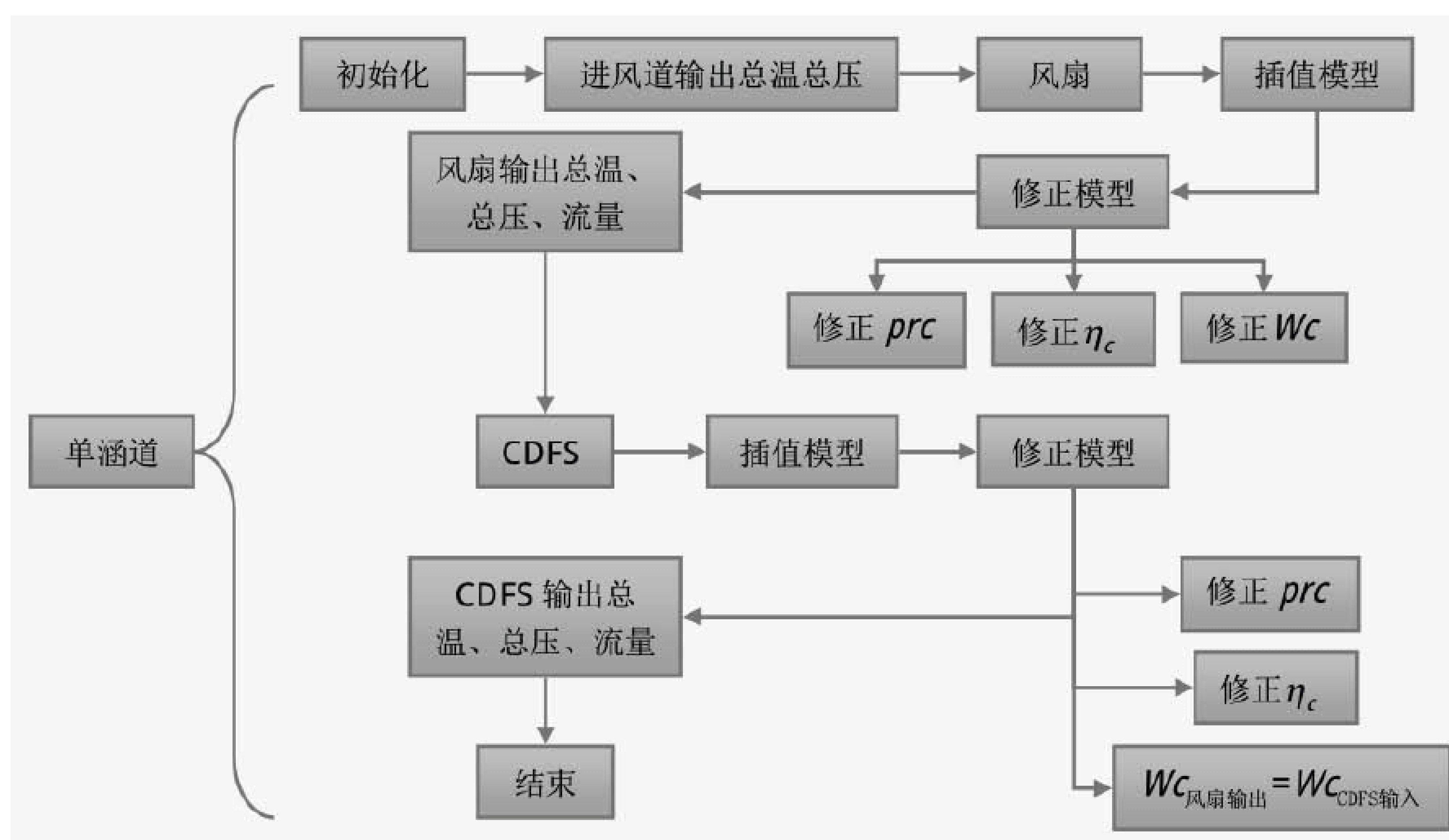


图 25-5　单涵道模式下风扇和 CDFS 计算求解步骤

由图 25-4 和图 25-5 计算双涵道模式和单涵道模式的各部件参数值，MATLAB 程序如下：

```
%% ----         单涵道      ----MATLAB 2012B
%% --------出口总温、总压和流量-----MATLAB 2012B
clc % 清屏
clear all;                   %删除 workplace 变量
close all;                   %关掉显示图形窗口
format short
warning off

H = 11;                      %飞行高度
Ma = 0.8;                    %飞行马赫数
alpha = 0;                   %导叶角度
nspeed = 0.95;               %风扇和 CDFS 的物理转速都为 0.95
zz = 0.5;                    %风扇和 CDFS 的压比函数值都为 0.5
r = 1.4;                     %纯空气气体绝热指数

% 输入温度给定值
Tind_f=288.15;
Tind_CDFS=428.56862609;
Tind_hcom=473.603961;
% 输入压力给定值
Pind_f=1.01325;
Pind_CDFS=3.5464;
Pind_hcom=4.886;

load('D:\MATLAB Edit 2012B\ysw\20130920\data\fan.mat');
```

```
                                          %加载风扇特性数据——原始数据
load('D:\MATLAB Edit 2012B\ysw\20130920\data\hcompressor.mat');
                                          %加载高压压气机特性数据——原始数据
load('D:\MATLAB Edit 2012B\ysw\20130920\data\CDFS.mat');
                                  %加载 CDFS(核心驱动风扇级)特性数据——原始数据

%输入压气机管道总温、总压
tube TP = tube(H,Ma,r)    % function tube TP=tube(H,Ma,r)
fprintf('进风管输出 总温 = %f\n',tube TP(1,1))
fprintf('进风管输出 总压 = %f\n',tube_TP(1,2))
%% 风扇
Tin_f = tube_TP(1,1);              %风扇输入总温
Pin_f = tube_TP(1,2);              %风扇输入总压
% 在换算转速 ncor 下的线性插值，增压比、效率、换算流量
ncor data f = linear interp(Tind f,Tin f,nspeed,fan);
                   %function ncor_data=linear_interp(Tind,Tin,n,data)
%修正后的增压比、效率、换算流量
com_ch_f = correct_com(ncor_data_f,alpha,0);
                   %function com ch=correct com(data,alpha,flag)
% 风扇输出总温、总压、流量、功、功率
com_ch_f(1,:)=[];   %第一行为换算转速
%% 计算压气机风扇出口总温
temp f = Tout(com ch f,zz,Tin f,Tind f,Pin f,Pind f,0)
                   %function temp=Tout(com_ch,zz,Tin,Tind,Pin,Pind,flag)

fprintf('风扇输出 总温 = %f\n',temp_f(1,1))
fprintf('风扇输出 总压 = %f\n',temp_f(1,2))
fprintf('风扇输出 流量 = %f\n',temp f(1,3))
fprintf('风扇输出 功 = %f\n',temp_f(1,4))
fprintf('风扇输出 功率 = %f\n',temp_f(1,5))

%% CDFS
Tin_CDFS = temp_f(1,1);            %CDFS 输入总温，风扇输出总温
Pin_CDFS = temp_f(1,2);            %CDFS 输入总压，风扇输出总压
Win_CDFS = temp_f(1,3);            %CDFS 输入总流量，风扇输出总流量
% 在换算转速 ncor 下的线性插值，增压比、效率、换算流量
ncor_data_CDFS = linear_interp(Tind_CDFS,Tin_CDFS,nspeed,CDFS);
                   %function ncor data=linear interp(Tind,Tin,n,data)
% 修正后的增压比、效率、换算流量
com ch CDFS = correct com(ncor data CDFS,alpha,1);
                       %function com ch=correct com(data,alpha,flag)
% CDFS 输出 总温、总压、流量、功、功率
com_ch_CDFS(1,:)=[];               %第一行为换算转速
%% 计算压气机 CDFS 出口总温
temp_CDFS  = Tout_W(com_ch_CDFS,Win_CDFS,zz,Tin_CDFS,Tind_CDFS,Pin_CDFS,
Pind CDFS,1) % function temp=Tout(com ch,zz,Tin,Tind,Pin,Pind,flag)
fprintf('CDFS 输出 总温 = %f\n',temp_CDFS(1,1))
fprintf('CDFS 输出 总压 = %f\n',temp_CDFS(1,2))
fprintf('CDFS 输出 流量 = %f\n',temp CDFS(1,3))
fprintf('CDFS 输出 功 = %f\n',temp_CDFS(1,4))
fprintf('CDFS 输出 功率 = %f\n',temp_CDFS(1,5))
```

运行程序，输出双涵道模式和单涵道模式的计算结果，整理如表 25-1 所示。

表 25-1　双涵道模式和单涵道模式的计算结果

双涵道模式		单涵道模式	
进气道输出总温	244.381200	进气道输出总温	244.381200
进风管输出总压	0.331146	进风管输出总压	0.331146
风扇输出总温	485.679914	风扇输出总温	485.679914
风扇输出总压	0.924094	风扇输出总压	0.924094
风扇输出流量	37.714634	风扇输出流量	37.714634
CDFS 输出总温	794.640845	CDFS 输出总温	794.640845
CDFS 输出总压	1.066453	CDFS 输出总压	1.066453
CDFS 输出流量	68.859768	CDFS 输出流量	37.714634

风扇、CDFS 输出流量与压比函数直接相关，应用题中的修正模型可以对原始增压比、效率与流量进行一定的修正。图 25-6 为物理转速一定的条件下，压比函数、导叶角与流量未修正和修正模式下对比图，图 25-7 为导叶角一定条件下，压比函数、物理转速与流量未修正和修正模式下对比图。具体的 MATLAB 程序如下：

```
%% -------风扇特性：流量随压比函数值变化的图形(未修正--3 维图形)-----MATLAB 2012B
clc % 清屏
clear all;          %删除 workplace 变量
close all;          %关掉显示图形窗口
format short
warning off

H = 11;             %飞行高度
Ma = 0.8;           %飞行马赫数
r = 1.4;            %纯空气气体绝热指数

% 输入温度给定值
Tind_f=288.15;
Tind_CDFS=428.56862609;
Tind_hcom=473.603961;
% 输入压力给定值
Pind_f=1.01325;
Pind_CDFS=3.5464;
Pind_hcom=4.886;

load('D:\MATLAB Edit 2012B\ysw\20130920\data\fan.mat');
                                                 %加载风扇特性数据——原始数据

% 输入压气机管道总温、总压
tube_TP = tube(H,Ma,r);     %function tube_TP=tube(H,Ma,r)
Tin_f = tube_TP(1,1);       %风扇输入总温
Pin_f = tube_TP(1,2);       %风扇输入总压
%% 风扇导叶角度一定
alpha = 0;                  %导叶角度

zz = 0:0.01:1;              %风扇和 CDFS 的压比函数值都为 0.5
nzz=size(zz);
nspeed =0:1.5/100:1.5;      %风扇和 CDFS 的物理转速都为 0.95

for k=1:nzz(1,2)

    %在换算转速 ncor 下的线性插值增压比、效率、换算流量
```

```
    ncor_data_f = linear_interp(Tind_f,Tin_f,nspeed(1,k),fan);
                    %function ncor_data=linear_interp(Tind,Tin,n,data)
    % 修正后的增压比、效率、换算流量
    com_ch_f = ncor_data_f; % correct_com(ncor_data_f,alpha,0);
                    %function com_ch=correct_com(data,alpha,flag)
    com_ch_f(1,:)=[];             %第一行为换算转速

    ncom=size(com_ch_f);
    prc=com_ch_f(:,1);            %增压比
    nc=com_ch_f(:,2);             %效率
    Wc=com_ch_f(:,3);             %流量

    for i=1:nzz(1,2)
        pr(i,1)=(max(prc)-min(prc))*zz(1,i)+min(prc);
        [a,b]=min(abs(prc-pr(i,1)));              %a 最小值; b 最小值所在位置
        WC(k,i)=Wc(b,1); % ncor 和 zz 下的 prc,nc,Wc
    end

end
[nsg,zzg]=meshgrid(nspeed,zz);
figure(1),surf(nsg,zzg,WC);
view([59.5 32]);
xlabel('物理转速');ylabel('压比函数值 zz');zlabel('流量');
grid on;title('导叶角度一定,未修正'); axis tight
%% 风扇物理转速一定
nspeed=[];
WC=[];
nspeed = 0.95;                    %风扇和 CDFS 的物理转速都为 0.95

alpha = -5:0.2:15;                %导叶角度
zz = 0:0.01:1;                    %风扇和 CDFS 的压比函数值都为 0.5
nzz=size(zz);

for k=1:nzz(1,2)

    % 在换算转速 ncor 下的线性插值，增压比、效率、换算流量
    ncor_data_f = linear_interp(Tind_f,Tin_f,nspeed,fan);
                    %function ncor_data=linear_interp(Tind,Tin,n,data)
    % 修正后的增压比、效率、换算流量
    com_ch_f = ncor_data_f; %correct_com(ncor_data_f,alpha(1,k),0);
                        %function com_ch=correct_com(data,alpha,flag)
    com_ch_f(1,:)=[]; % 第一行为换算转速

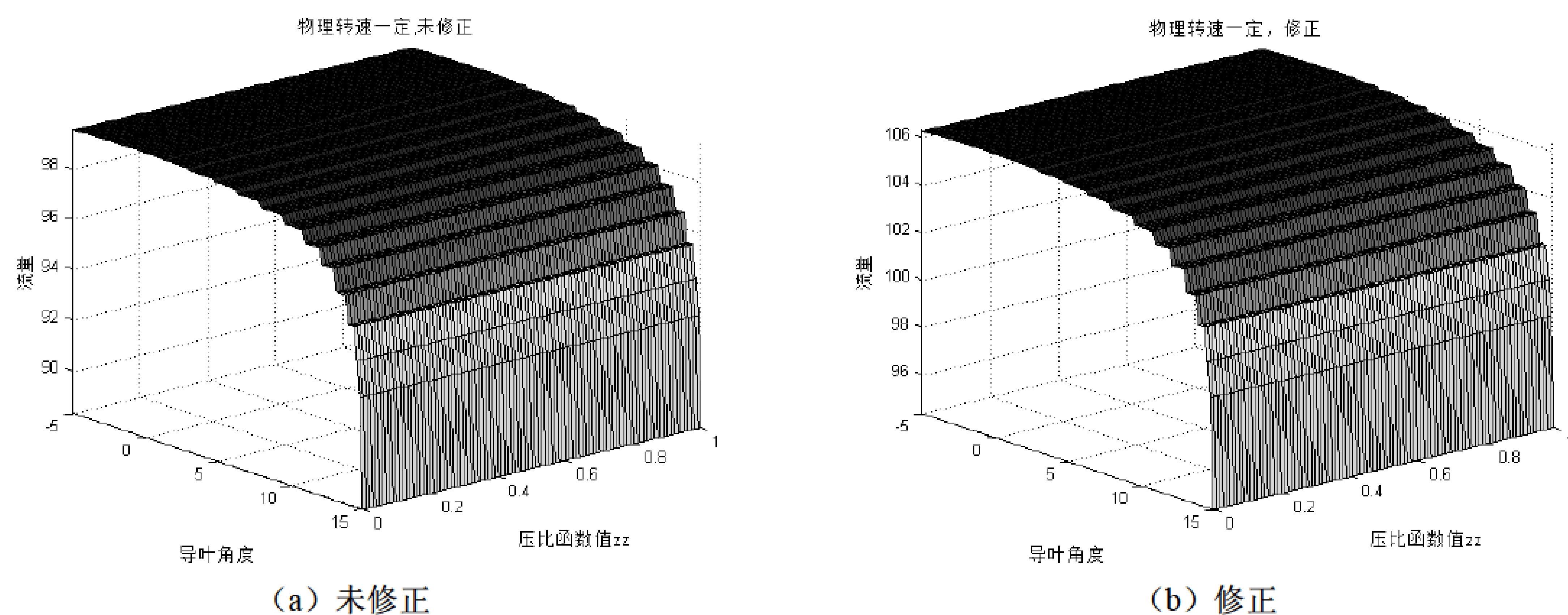
    ncom=size(com_ch_f);
    prc=com_ch_f(:,1);            %增压比
    nc=com_ch_f(:,2);             %效率
    Wc=com_ch_f(:,3);             %流量

    for i=1:nzz(1,2)
        pr(i,1)=(max(prc)-min(prc))*zz(1,i)+min(prc);
        [a,b]=min(abs(prc-pr(i,1)));          %a 最小值; b 最小值所在位置
        WC(k,i)=Wc(b,1); % ncor 和 zz 下的 prc,nc,Wc
    end

end
[alg,zzg]=meshgrid(alpha,zz);
figure(2),surf(alg,zzg,WC);
xlabel('导叶角度');ylabel('压比函数值 zz');zlabel('流量');
```

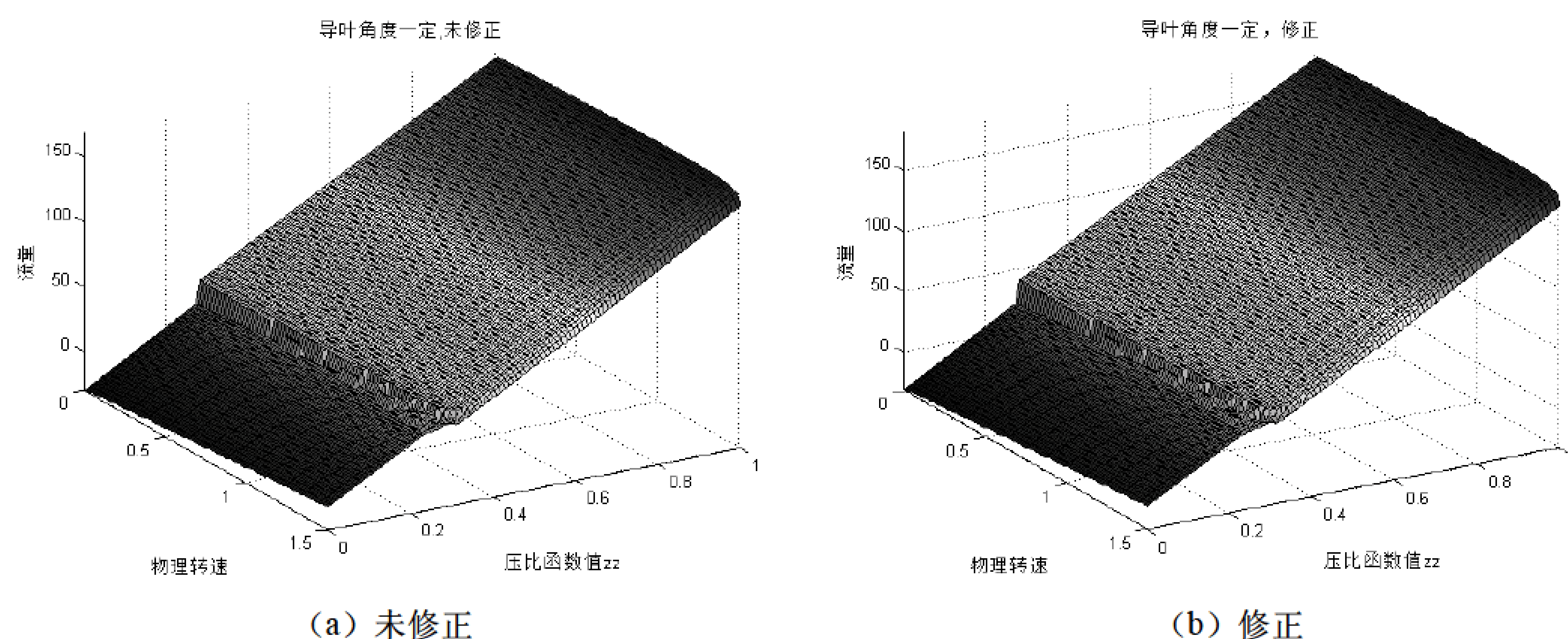
```
grid on;view([49.5 24]);
title('物理转速一定,未修正'); axis tight
```

运行程序输出结果如图 25-6 和图 25-7 所示。



（a）未修正　　（b）修正

图 25-6　物理转速一定压比函数、导叶角与流量关系图



（a）未修正　　（b）修正

图 25-7　导叶角一定物理转速、压比函数与流量关系图

上述求解过程还是比较繁琐的，为了优化上述的求解程序的可执行性，利用 MATLAB 设计并开发单涵道和双涵道模式下的 GUI 软件（见 25.10 节），从而大大提高了 MATLAB 计算程序的通用性及可移植性。

25.7　问　题　二

25.7.1　确定非线性方程组

由发动机 7 个平衡方程（1）～（7）中的各变量可分别由附录 1 中的公式转化为所列的 12 个设计中需要给出的发动机各部件参数的函数。非线性方程组的求解的基本思路是从进气道至尾喷管出口截面按照附录 1 中的部件模型进行计算，把发动机各部件参数假定为已知，按照气流通过的顺序完成所有部件的总温、总压、功率和流量的计算，部分部件需

要求解其面积，最终可以得到题目给出的平衡方程（1）～（7）的所有参数，将这些参数组合可以得到新的平衡方程。

由上述过程可知，新的平衡方程是包含发动机各部件主要参数的隐式非线性方程，需要求得这些方程，需要进行一次完整的发动机气动热力计算，该非线性方程组是非常复杂的。简而言之，求解发动机部件级模型的数学问题是求解一个复杂的多维非线性隐式方程。

由第二问题目可知，n_L=0.85，$\alpha_L = \alpha_{CDFS} = \alpha_H = \alpha_{CH} = 0^\circ$，所以，未知参数由原来 12 个变成了 7 个参数，包括高压转速 n_H（高压压气机、CDFS 和高压涡轮物理转速），风扇压比函数值 Z_{CL}，CDFS 压比函数值 Z_{CDFS}，高压压气机压比函数值 Z_{CH}，主燃烧室出口温度 T_4^*，高压涡轮压比函数值 Z_{TH}，低压涡轮压比函数值 Z_{TL}，正好也有 7 个平衡方程，这保证了 7 维非线性方程组有唯一解。

如果按照部件顺序一个个按照公式推导稳态方程中的各个变量，会出现不断迭代而造成变量表达式非常庞大，不利于表示和求解方便。因此，本章引入各个部件的一些关键参数表达式采用隐函数的方式进行说明，隐函数的定义如表 25-2 所示。

表 25-2　求解非线性方程组用到的隐函数

参数	含　　义	隐函数表达式
$P_{1\mathrm{out}}$	$=P_{2\mathrm{in}}$，风扇出口总压	$P_1(n_L, Z_{CL})$
$p_{2\mathrm{out}}$	$=P_{3\mathrm{in}}$，CDFS 进口总压	$P_2(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS})$
$p_{3\mathrm{out}}$	$=P_{4\mathrm{in}}$，高压压气机出口总压	$P_3(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{CH})$
$p_{4\mathrm{out}}$	$=P_{5\mathrm{in}}$，主燃烧室出口总压	$P_3(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{CH})$
$p_{5\mathrm{out}}$	$=P_{6\mathrm{in}}$，高压涡轮出口总压	$P_5(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{TH}, T_4^*)$
$p_{6\mathrm{out}}$	$=P_{7\mathrm{in}}$，低压涡轮出口总压	$P_6(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{TH}, Z_{TL}, T_4^*)$
T_{15}^*	前混合器出口总温	$T_{15}(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{CH})$
p_{15}^*	前混合器出口总压	$P_{15}(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{CH})$
$T_{1\mathrm{out}}$	风扇出口总压	$T_1(n_L, Z_{CL})$
$T_{2\mathrm{out}}$	CDFS 进口总温	$T_2(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS})$
$T_{3\mathrm{out}}$	高压压气机出口总温	$T_3(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{CH})$
f_b	主燃烧室燃气比	$f_b(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{CH}, T_4^*)$
$T_{5\mathrm{out}}$	高压涡轮出口总温	$T_5(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{TH}, T_4^*)$
$T_{6\mathrm{out}}$	低压涡轮出口总温	$T_6(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{TH}, Z_{TL}, T_4^*)$
T_6^*	混合器出口总温	$T_6^*(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{TH}, Z_{TL}, T_4^*)$
p_6^*	混合器出口总压	$P_6^*(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{TH}, Z_{TL}, T_4^*)$
W_{g125}	CDFS 涵道出口流量	$W_{g125}(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{CH})$
W_{g225}	$=W_{a13}$，副外涵道出口流量	$W_{g225}(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{CH})$

1. 低压轴功率平衡方程的确定

$$N_{CL} - N_{TL}\eta_{mL} = 0 \tag{25.5}$$

其中，N_{CL} 是风扇消耗功率，N_{TL} 是低压涡轮发出功率，η_{mL}=0.99 为中间轴机械效率。根据附录 1 中给出的风扇和低压涡轮相关计算公式，可以计算出（具体计算过程详见

25.11 节）。

（1）风扇消耗功率 N_{CL}

$$N_{CL}=\frac{0.1644\xi_{12}(n_L,Z_{CL})(h(\psi^{-1}(\psi(244.318)+287\ln[2.3894\xi_{11}(n_L,Z_{CL})-1.3894]))-53808)}{\xi_{13}(n_L,Z_{CL})} \tag{25.6}$$

其中 $\xi_{11}(),\xi_{12}()$ 都是关于物理转速 n_L，增压比函数值 Z_{CL} 的二元隐函数，前者的值表示线性插值得到的风扇增压比 pr_c，后者表示线性插值得到风扇换算流量 W_c。

（2）低压涡轮发出功率 N_{TL}

$$N_{TL}=\frac{1.3302\zeta_{22}(n_L,Z_{TL})p_{6in}\cdot(h(T_{6in},f_b)-h(T_{6out},f_b))}{\sqrt{T_{6in}}} \tag{25.7}$$

其中 $\zeta_{22}()$ 是关于 n_L，Z_{TL} 的二元隐函数，其值表示线性插值得到的涡轮换算流量 W_c。

2．高压轴功率平衡方程的确定

$$N_{CH}+N_{CDFS}-N_{TH}\eta_{mH}=0 \tag{25.8}$$

N_{CH} 和 N_{CDFS} 分别是高压压气机和 CDFS 的消耗功率，N_{TH} 是高压涡轮发出功率，η_{mH}=0.99 是高速轴的机械效率。根据附录 1 中给出的高压压气机、CDFS 和高压涡轮的相关计算公式可以计算出。

（1）高压压气机消耗功率 N_{CH}

$$N_{CH}=\frac{1.5982p_{3in}\xi_{32}(n_H,Z_{CH})\cdot(h(\psi^{-1}(\psi(244.318)+287\ln[0.9119\xi_{31}(n_H,Z_{CH})-0.0981]))-h(T_{3in}))}{\xi_{33}(n_H,Z_{CH})\sqrt{T_{3in}}} \tag{25.9}$$

其中 $\xi_{31}()$、$\xi_{32}()$和$\xi_{33}()$ 是关于 n_H和Z_{CH} 的二元隐函数，其值分别表示线性插值得到的高压压气机的增压比 pr_c、换算流量 W_c 和效率 η_c。

（2）CDFS 消耗功率 N_{CDFS}

$$N_{CDFS}=\frac{0.6528\xi_{22}(n_H,Z_{CDFS})\mathrm{p}_{2in}\cdot(h(\psi^{-1}(\psi(T_{2in})+287\ln[0.3059\xi_{21}(n_H,Z_{CDFS})-0.6941]))-h(T_{2in}))}{\xi_{23}(n_H,Z_{CDFS})\sqrt{T_{2in}}} \tag{25.10}$$

其中 $\xi_{21}()$、$\xi_{22}()$和$\xi_{23}()$ 是关于 n_H和Z_{CDFS} 的二元隐函数，其值分别表示线性插值得到的 CDFS 增压比 pr_c、换算流量 W_c 和效率 η_c。

（3）高压涡轮发出功率 N_{TH}

$$N_{TH}=\frac{20.092545\zeta_{12}(n_H,Z_{TH})p_{5in}\cdot(h(T_{5in},f_b)-h(\mathrm{T}_{5out},f_b))}{\sqrt{T_{5in}}} \tag{25.11}$$

3．高压涡轮进口截面流量平衡方程的确定

$$W_{g41}-W'_{g41}=0 \tag{25.12}$$

W_{g41} 是高压涡轮进口截面气体流量，即主燃烧室出口气体流量和冷却空气流量，W'_{g41}

是通过高压涡轮特性数据线性插值得到的高压涡轮流量。

（1）高压涡轮进口截面气体流量 W_{g41}

由于冷却空气流量忽略不计，则 W_{g41} 即为主燃烧室出口气体流量，应该等于燃油流量加上主燃烧室进口空气流量，可得：

$$W_{g41}=W_{CH}\cdot f_b+W_{CH}=\frac{1.7131(1+f_b)\xi_{32}(n_H,Z_{CH})\cdot p_{3in}}{\sqrt{T_{3in}}} \tag{25.13}$$

（2）线性插值得到的高压涡轮流量

$$\mathrm{W}_4'=13.2121\zeta_{12}(n_{\mathrm{H}},Z_{\mathrm{TH}}) \tag{25.14}$$

其中 $\zeta_{12}()$ 都是关于 n_{H}，Z_{TH} 的二元隐函数，前者的值表示线性插值得到的高压涡轮的换算流量 W_c。

4．低压涡轮进口截面流量平衡方程的确定

$$W_{g45}-W'_{g45}=0 \tag{25.15}$$

W_{g45} 是低压涡轮进口截面流量，由主燃烧室出口气体流量和冷却空气流量计算得到，W'_{g45} 是通过低压涡轮特性数据线性插值得到的低压涡轮流量。

（1）低压涡轮进口截面流量 W_{g45}

由上述 W_{g45} 的含义可知：

$$W_{g45}=W_{g41}=\frac{1.7131(1+f_b)\xi_{32}(n_{\mathrm{H}},Z_{\mathrm{CH}})\cdot p_{3\mathrm{in}}}{\sqrt{T_{3\mathrm{in}}}} \tag{25.16}$$

（2）据线性插值得到的低压涡轮流量 W'_{g45}

$$W'_{g45}=0.3881\zeta_{22}(n_{\mathrm{L}},Z_{\mathrm{TL}}) \tag{25.17}$$

5．后混合器静压平衡方程的确定

$$p_{61}-p_{62}=0 \tag{25.18}$$

p_{61} 和 p_{62} 分别是后混合器内和外涵道（主外涵道）的静压，二者应平衡。后混合器见图 2 的 6 截面。

（1）后混合器内的静压 p_{62}

$$p_{61}=p_{6\mathrm{out}}\cdot\pi(q^{-1}(\frac{W_{\mathrm{TL}}\sqrt{T_{6\mathrm{out}}}}{210.6521p_{6\mathrm{out}}})) \tag{25.19}$$

其中 W_{TL} 为低压涡轮出口流量，其表达 $W_{\mathrm{TL}}=\dfrac{1.4724\zeta_{22}(n_{\mathrm{L}},Z_{\mathrm{TL}})p_{6\mathrm{in}}}{\sqrt{T_{6\mathrm{in}}}}$。

（2）外涵道（主外涵道）静压 p_{62}

$$p_{62}=p_{15}^{*}\cdot\pi(q^{-1}(\frac{(\mathrm{W}_{\mathrm{g}125}+\mathrm{W}_{\mathrm{g}225})\sqrt{T_{15}^{*}}}{92.1516p_{15}^{*}})) \tag{25.20}$$

6．尾喷管面积平衡方程的确定

$$A_8-A_8'=0 \tag{25.21}$$

$A_8^{'}$为给定的尾喷管 8 截面的面积，这里 $A_8^{'}=9.5544e+003$ 、A_8为按附录 1 尾喷管的有关公式计算出的尾喷管 8 截面的面积，二者应相等。

由流量公式 $W_{g8}=k_m\dfrac{p_8^*}{\sqrt{T_8^*}}A_8q(\lambda_8)$ 计算出 A_8，其中 λ_8=1，计算出 $q(\lambda_8)=1$。

$$A_8=\frac{W_{g6}\sqrt{T_6^*}}{k_m p_6^*}=\frac{(W_{g125}+W_{g125}+W_{\text{TL}})\sqrt{T_6^*}}{0.0397\,p_6^*} \tag{25.22}$$

7．风扇出口流量平衡方程的确定

$$W_{a2}-W_{a21}-W_{a13}=0 \tag{25.23}$$

其中风扇出口的流量W_{a2}分流为副外涵流量W_{a13}和 CDFS 进口流量W_{a21}，三者之间应存在平衡关系。副外涵流量W_{a13}是按附录 1 中前混合器的有关公式计算出的。

（1）风扇出口的流量W_{a2}

$$W_{a2}=0.1780\xi_{12}(n_{\text{L}},Z_{\text{CL}}) \tag{25.24}$$

（2）副外涵流量W_{a13}

$$W_{g13}=\frac{74.3185\,p_{1\text{out}}}{\sqrt{T_{1\text{out}}}}q(\pi^{-1}(\pi(q^{-1}(\frac{W_{g125}\sqrt{T_{2\text{out}}}}{24.5803\,p_{2\text{out}}}))\frac{p_{2\text{out}}}{p_{1\text{out}}})) \tag{25.25}$$

（3）CDFS 进口流量W_{a21}

$$W_{a21}=W_{\text{CDFS}}=\frac{0.8756\xi_{22}(n_{\text{H}},Z_{\text{CDFS}})\cdot p_{2\text{in}}}{\sqrt{T_{\text{2in}}}} \tag{25.26}$$

于是，完全确定了 7 个平衡方程所构成的非线性方程组，简记为：

$$\begin{cases}f_1(n_{\text{L}},n_{\text{H}},Z_{\text{CL}},Z_{\text{CDFS}},Z_{\text{TH}},Z_{\text{TL}},T_4^*)=0\\ f_2(n_{\text{L}},n_{\text{H}},Z_{\text{CL}},Z_{\text{CDFS}},Z_{\text{TH}},T_4^*)=0\\ f_3(n_{\text{L}},n_{\text{H}},Z_{\text{CL}},Z_{\text{CDFS}},Z_{\text{CH}},T_4^*)=0\\ f_4(n_{\text{L}},n_{\text{H}},Z_{\text{CL}},Z_{\text{CDFS}},Z_{\text{TH}},Z_{\text{TL}},T_4^*)=0\\ f_5(n_{\text{L}},n_{\text{H}},Z_{\text{CL}},Z_{\text{CDFS}},Z_{\text{TH}},Z_{\text{TL}},T_4^*)=0\\ f_6(n_{\text{L}},n_{\text{H}},Z_{\text{CL}},Z_{\text{CDFS}},Z_{\text{TH}},Z_{\text{TL}},T_4^*)=0\\ f_7(n_{\text{L}},n_{\text{H}},Z_{\text{CL}},Z_{\text{CDFS}})=0\end{cases} \tag{25.27}$$

理想情况下当发动机在某一设定状态下稳定工作，会存在一组确定的变量满足公式（25.27）的非线性方程组。

但是由于按照各个部件的气动热力计算过程相当复杂，使隐式线性方程组相当复杂，加之建模过程中的简化假设、插值计算和非线性计算等数值计算误差因素的影响，很难得到恰好完全满足 6 个平衡方程的变量。

换而言之，不能够通过简单的计算得到共同方程组的解，只能采用数值算法，使非线性方程等式右边接近 0，得到一定精度方位的数值解。

采用数值方法进行模型原型设计，得到可执行程序，求解流程如图 25-8 所示。

图 25-8　数值模拟流程图

在图 25-8 中，对于前混合器输入流量的计算，即风扇 W_{g225} 和 CDFS W_{g125}，计算流程如图 25-9 所示。



图 25-9　风扇 W_{g225} 和 CDFS W_{g125} 计算

图 25-9 中，对于后混合器输入流量的计算，由低压涡轮 W_{g61} 和前混合器 W_{g62} 组成，低压涡轮 W_{g61} 和前混合器 W_{g62} 计算过程如图 25-10 所示。



图 25-10　低压涡轮 W_{g61} 和前混合器 W_{g62} 计算

图 25-8 计算流程最终将决定于发动机的性能，对于发动机性能计算，总燃气流量 W_g 和总空气流量 W_a 计算如图 25-11 所示。



图 25-11　发动机性能参数求解

由此设计开发的 GUI 软件如图 25-12 所示。

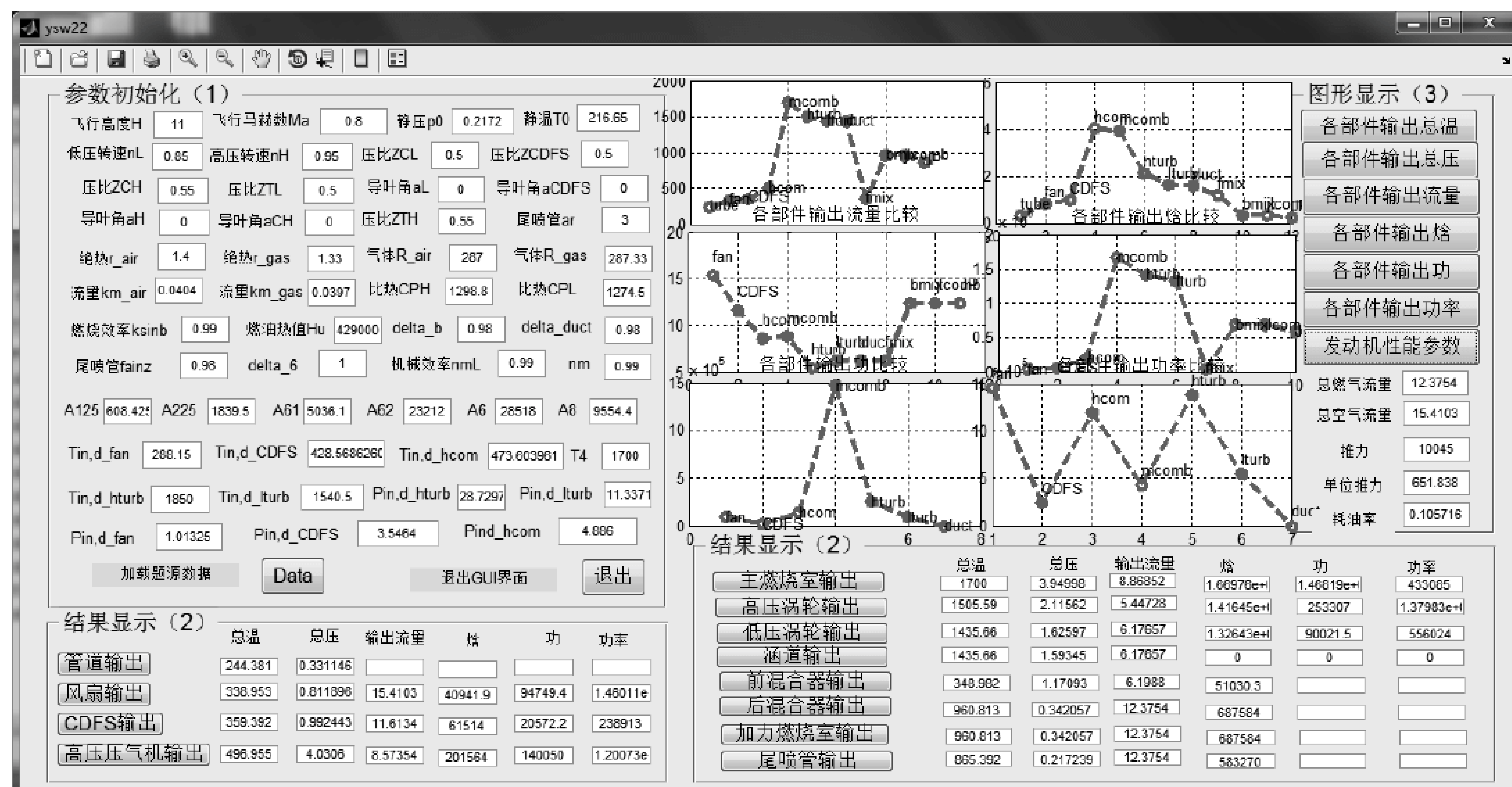


图 25-12　MATLAB GUI 双涵道求解

对该系统赋一组状态值，通过 GUI 求解各部件输出温度、输出压力、输出流量、输出焓、输出功和输出功率的计算，绘制图形如图 25-13 所示。

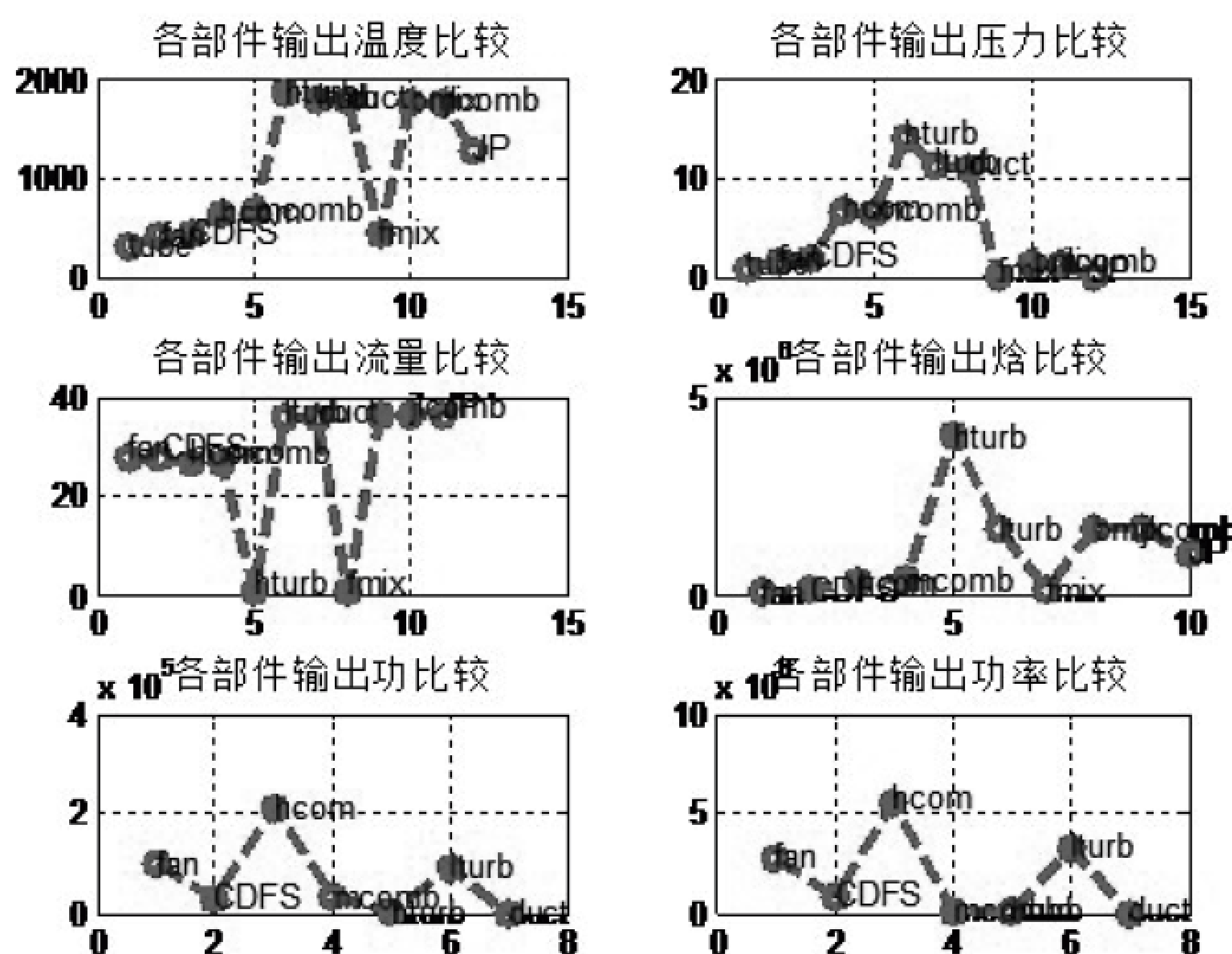


图 25-13　各部件输出状态值比较

因此采用数值计算是一种行之有效的方法。

问题二要求运用或设计适当的算法求解非线性方程组。本章采用基于自适应变异的粒子群算法来求解非线性方程组（25.27）中各参数的数值解。尹大伟应用粒子群算法（PSO）和量子粒子群算法等基于全体搜索的现代优化算法，成功的应用求解复杂的发动机模型等有关问题，得到很好的收敛效果，从而验证了算法的有效性。

25.7.2　基于粒子群算法的发动机平衡方程优化求解

粒子群算法（PSO）是一种基于群体的随机优化技术。基本思想是一个由 M 个粒子组成的群体以一定的速度飞行，粒子运动空间就是解空间，待优化的目标函数值就是粒子的适应度，粒子的位置限量代表优化问题解空间中的变量，粒子的运动过程就是解的搜索过程。

设在一个 S 维的目标搜索空间中，有 m 个粒子组成一个群体，其中第 i 个粒子表示为一个 S 维的向量 $\vec{x}_i=\left(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iS}\right)$，$i=1,2,\cdots,m$，每个粒子的位置就是一个潜在的解。将 $\vec{x}_i$ 代入一个目标函数就可以算出其适应值，根据适应值大小衡量解的优劣。第 i 个粒子的飞行的速度是 S 维向量，记为 $\vec{V}=\left(V_{i1},V_{i1},\cdots V_{iS}\right)$。记第 i 个粒子迄今为止搜索到的最优位置为 $\vec{P}_{iS}=\left(P_{iS},P_{iS},\cdots,P_{iS}\right)$，整个粒子群迄今为止搜索到的最优位置为 $\vec{P}_{gS}=\left(P_{gS},P_{gS},\cdots,P_{gS}\right)$。

不妨设 $f(x)$ 为最小化的目标函数，则微粒 i 的当前最好位置由下式确定：

$$p_i(t+1)=\begin{cases}p_i(t)\to f\left(x_i(t+1)\right)\geqslant f\left(p_i(t)\right)\\X_i(t+1)\to f\left(x_i(t+1)\right)<f\left(p_i(t)\right)\end{cases} \tag{25.28}$$

Kennedy 和 Eberhart 用下列公式对粒子操作：

$$v_{is}(t+1)=v_{is}(t)+c_1r_{1s}(t)\left(p_{is}(t)-x_{is}(t)\right)+c_2r_{2s}(t)\left(p_{gs}(t)-x_{is}(t)\right) \tag{25.29}$$

$$x_{is}(t+1)=x_{is}(t)+v_{is}(t+1) \tag{25.30}$$

其中，$i=[1,m]$，$s=[1,S]$，学习因子 c_1 和 c_2 是非负常数，c_1 和 c_2 取经典值 1.494，r_1 和

r_2 为相互独立的伪随机数，服从$[0,1]$上的均匀分布，$v_{is} \in [-v_{\max}, v_{\max}]$，$v_{\max}$ 为常数，由用户设定。

由以上进化方程可见，c_1 调节粒子飞向自身最好位置方向的步长，c_2 调节粒子飞向全局最好位置方向的步长。为了减少进化过程中粒子离开搜索空间的可能，v_{is} 通常限定在一个范围之中，即 $v_{is} \in [-v_{\max}, v_{\max}]$，$v_{\max}$ 为最大速度。如果搜索空间在$[-x_{\max}, x_{\max}]$中，则可以设定 $v_{\max} = kx_{\max}$，$0.1 \leqslant k \leqslant 1.0$。Y.Shi 和 Eerhart 在对（25.29）作了改进：

$$v_{is}(t+1) = \omega v_{is}(t) + c_1 r_{1s}\left(p_{is}(t) - x_{is}(t)\right) + c_2 r_{2s}(t)\left(p_{gs}(t) - x_{gs}(t)\right) \qquad (25.31)$$

在（25.31）中 ω 为非负数，称为动力常量，控制前一速度对当前速度的影响，ω 较大时，前一速度影响较大，全局搜索能力较强；ω 较小时，前一速度影响较小，局部搜索能力较强。通过调整 ω 大小来跳出局部极小值。终止条件根据具体问题取最大迭代次数或粒子群搜索到的最优位置满足的预定最小适应阈值。

算法的初始化过程如下：

（1）设定群体规模 m。

（2）对任意的 i，s，在$[-x_{\max}, x_{\max}]$内服从均匀分布产生 x_{is}。

（3）对任意的 i，s，在$[-v_{\max}, v_{\max}]$内服从均匀分布产生 v_{is}。

（4）对任意的 i，设 $y_i = x_i$。

自适应变异粒子群算法优化是计算智能领域，除蚁群算法外的一种基于群体智能的优化算法。自适应变异 PSO 算法流程图如图 25-14 所示。

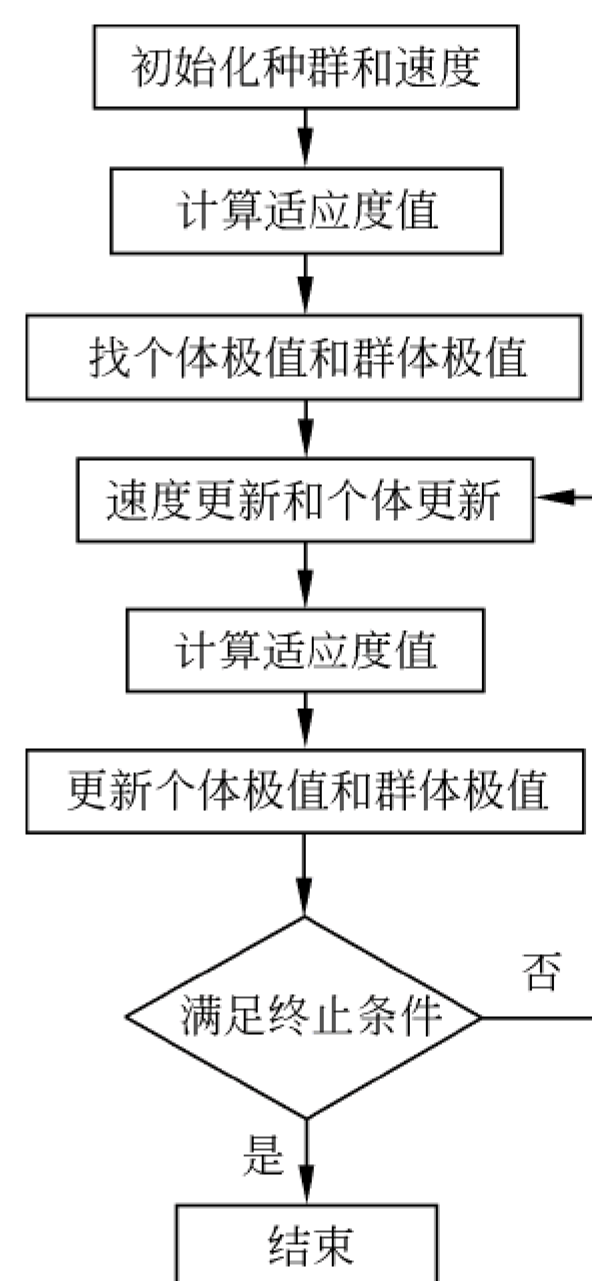


图 25-14　粒子群算法流程图

由上述分析可知：

粒子群为由 n 个粒子组成的种群 $X = (X_1, X_2, X_3, \cdots X_n)$；

第 i 个粒子表示 D 维向量 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \cdots, x_{iD})^T$；

第 i 个粒子的速度为 $V_i = (V_{i1}, V_{i2}, V_{i3}, \cdots, V_{iD})^T$；

个体极值为 $P_i = (P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{iD})^T$；

局极值为 $P_g = \left(P_{g1}, P_{g2}, \cdots, P_{gD}\right)^T$；

速度更新为 $V_{id}^{k+1} = V_{id}^k | + c_1 r_1 \left(P_{id}^k - X_{id}^k\right) + c_2 r_2 \left(P_{pd}^k - X_{id}^k\right)$；

c_1 和 c_2 为其两个参数值，r_1 和 r_2 为其两个随机值；

位置更新为 $X_{id}^{k+1} = X_{id}^k + V_{id}^{k+1}$。

PSO 算法实现步骤如下。

Step1：初始化一个规模为 m 的粒子群，设定初始位置和速度。

Step2：计算每个粒子的适应值。

Step3：对每个粒子将其适应值和其经历过的最好位置 p_{is} 的适应值进行比较，若较好，则将其作为当前的最好位置。

Step4：对每个粒子将其适应值和全局经历过的最好位置 p_{gs} 的适应值进行比较，若较好，则将其作为当前的全局最好位置。

Step5：根据公式（25.29）、（25.30）分别对粒子的速度和位置进行更新。

Step6：如果满足终止条件，则输出解；否则返回 Step2。

由题意，高压转速 n_H（高压压气机、CDFS 和高压涡轮物理转速），风扇压比函数值 Z_{CL}，CDFS 压比函数值 Z_{CDFS}，高压压气机压比函数值 Z_{CH}，主燃烧室出口温度 T_4^*，高压涡轮压比函数值 Z_{TH}，低压涡轮压比函数值 Z_{TL} 等 7 个变量作为粒子群算法的优化求解目标，根据变量物理意义，变量取值范围为：

$$\begin{cases} 0 < x_i < 2, \quad i = 1, 2, \cdots, 6 \\ 500 \leqslant x_7 \leqslant 2500 \end{cases} \tag{25.32}$$

适应度函数以同时满足推力 F 最大和耗油率 $sfc = \dfrac{3600W_f}{F}$ 最小为目标，建立相应的适应度函数。MATLAB 程序如下：

```
%% --------粒子群算法（PSO）求解非线性方程-----MATLAB 2012B
% nH = x(1) ;             %高压转速（CDFS、高压压气机和高压涡轮物理转速）
% ZCL = x(2);             %风扇 压比函数值
% ZCDFS = x(3);           %CDFS 压比函数值
% ZCH = x(4);             %高压压气机 压比函数值
% ZTH = x(5);             %高压涡轮 压比函数值
% ZTL = x(6);             %低压涡轮 压比函数值
% T4 = x(7);              %主燃烧实验室出口温度

clc % 清屏
clear all;                %删除 workplace 变量
close all;                %关掉显示图形窗口
format short
warning off
%粒子群算法中的两个参数
c1 = 1.49445;
c2 = 1.49445;
maxgen=30;                %进化次数
sizepop=50;               %种群规模
% 种群更新速度
Vmax = 1 ;
Vmin = -1 ;
%种群
popmax1=1.4;
popmax11=1;
popmax2=3000;
popmin1=0.9;
popmin11=0.45;
popmin2=1500;
%% 产生初始粒子和速度
for i=1:sizepop
    %随机产生一个种群
    pop(i,1) = 0.9 + 0.6*rand;                      %初始种群
    pop(i,2:6) = 0.45 + 0.55*rand(1,5);             %初始种群
    pop(i,7) = 1700 + 1000*rand(1,1);               %初始种群
    V(i,:)=rand(1,7);                               %初始化速度
    %计算适应度
    fitness(i)=fitness_sfc(pop(i,:));               %染色体的适应度
end

%%
%找最好的染色体
[bestfitness bestindex]=min(fitness);
```

```
zbest=pop(bestindex,:);                              %全局最佳
gbest=pop;                                           %个体最佳
fitnessgbest=fitness;                                %个体最佳适应度值
fitnesszbest=bestfitness;                            %全局最佳适应度值

%% 迭代寻优
for i=1:maxgen  % 进化次数
    i
    for j=1:sizepop % 种群规模
        %速度更新
        V(j,:) = V(j,:) + c1*rand*(gbest(j,:) - pop(j,:)) + c2*rand*(zbest
        - pop(j,:)); % 速度
        V(j,find(V(j,:)>Vmax))=Vmax;
        V(j,find(V(j,:)<Vmin))=Vmin;

        %种群更新
        pop(j,:)=pop(j,:)+0.7*V(j,:);
%         pop(j,find(pop(j,:)>popmax))=popmax;        %最大值约束
%         pop(j,find(pop(j,1)>popmax1))=popmax1;      %最小值约束
        if pop(j,1)>popmax1
            pop(j,1)=popmax1;
        elseif pop(j,1)<popmin1
            pop(j,1)=popmin1;
        end
%         pop(j,find(pop(j,2:6)>popmax11))=popmax11;
        for k=2:6
            if pop(j,k)>popmax11
                pop(j,k)=popmax11;
            elseif pop(j,k)<popmin11
                pop(j,k)=popmin11;
            end
        end

        if pop(j,7)>popmax2      %个体最大值约束
            pop(j,7)=popmax2;
        elseif pop(j,7)<popmin2  %个体最小值约束
            pop(j,7)=popmin2;
        end

%         pop(j,2*find(pop(j,2)>popmax11))=popmax11;
%         pop(j,3*find(pop(j,3)>popmax11))=popmax11;
%         pop(j,4*find(pop(j,4)>popmax11))=popmax11;
%         pop(j,5*find(pop(j,5)>popmax11))=popmax11;
%         pop(j,6*find(pop(j,6)>popmax11))=popmax11;
%         pop(j,7*find(pop(j,7)>popmax2))=popmax2;
%         pop(j,find(pop(j,:)<popmin11))=popmin11;

        %自适应变异
        if rand>0.8
            k=ceil(7*rand);
            if k==1
               pop(j,k)=0.95+0.05*rand;
            elseif k>=2&&k<=6
                pop(j,k)=0.5+0.15*rand;
            elseif k==7
                pop(j,k)=1700+300*rand;
            end
        end
```

```
        %适应度值
        fitness(j)=fitness sfc(pop(j,:));

        %个体最优更新
        if fitness(j) < fitnessgbest(j)
            gbest(j,:) = pop(j,:);
            fitnessgbest(j) = fitness(j);
        end

        %群体最优更新
        if fitness(j) < fitnesszbest
            zbest = pop(j,:);
            fitnesszbest = fitness(j);
        end

    end

    yy(i)=fitnesszbest;

end

%% 结果分析
plot(yy,'ro--','linewidth',3)
title(['适应度曲线  ' '终止代数=' num2str(maxgen)]);
xlabel('进化代数');ylabel('适应度');
grid on
zbest % 最优解
fprintf('高压转速            nH = %f\n',zbest(1,1))
fprintf('风扇 压比函数值       ZCL = %f\n',zbest(1,2))
fprintf('CDFS 压比函数值       ZCDFS = %f\n',zbest(1,3))
fprintf('高压压气机 压比函数值  ZCH = %f\n',zbest(1,4))
fprintf('高压涡轮 压比函数值    ZTH = %f\n',zbest(1,5))
fprintf('低压涡轮 压比函数值    ZTL = %f\n',zbest(1,6))
fprintf('主燃烧室出口温度       T4 = %f\n',zbest(1,7))
fprintf('最优适应度            sfc = %f\n',yy(1,end))
```

运用自适应粒子群算法，初始种群大小选择 50，迭代进化次数选择 30 次，求解的适应度曲线如图 25-15 所示。适应度曲线收敛性较好，说明计算结果可信，故所运用的算法是合理有效的。

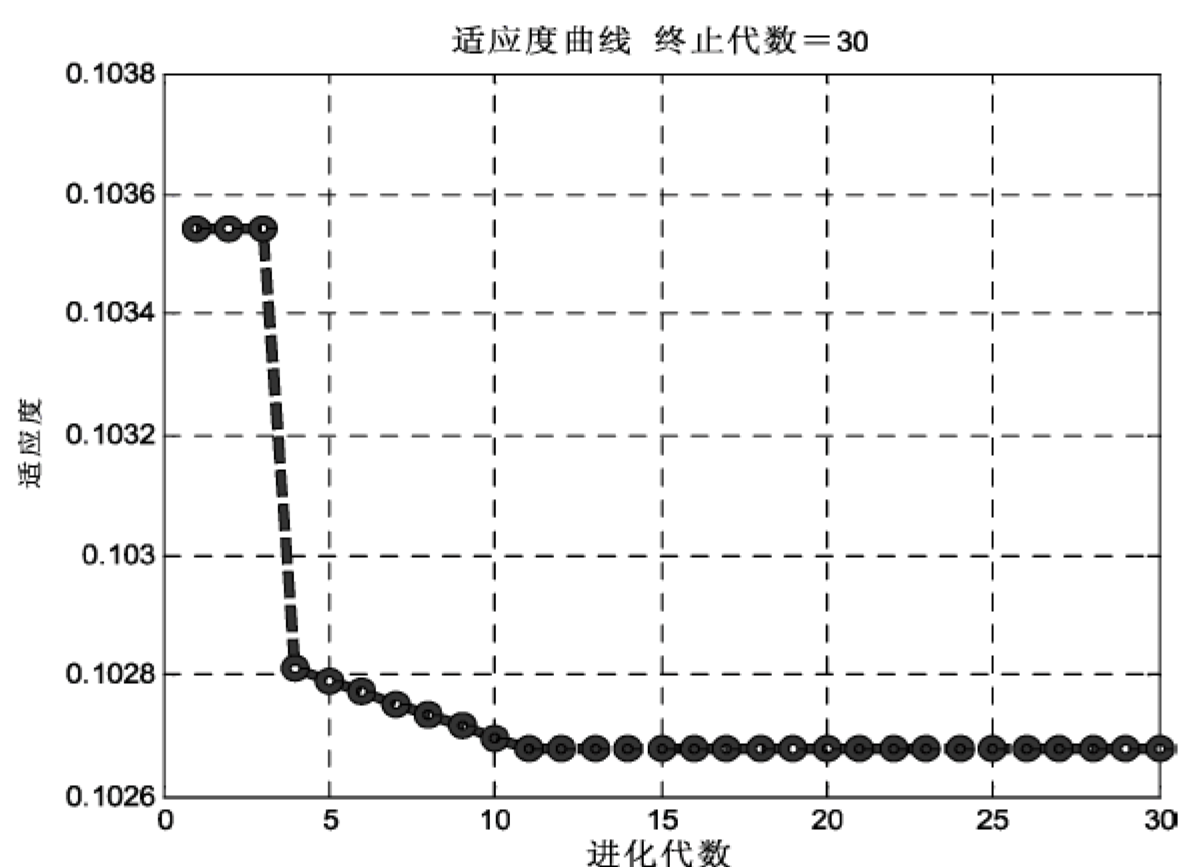


图 25-15　初始种群大小为 50，迭代进化次数为 30 的适应度曲线

采用自适应变异 PSO 进行函数优化，对该函数共做了 10 次试验，发动机各参数的求解结果如表 25-3 所示。

表 25-3　发动机各参数的 10 次试验结果

高压转速 n_H	风扇 Z_{CL}	CDFS Z_{CDFS}	高压压气机 Z_{CH}	高压涡轮 Z_{TH}	低压涡轮 Z_{TL}	主燃烧室出口温度 T_4^*	最佳适应度 f_{min}
0.900000	0.450000	0.450000	0.450000	0.450000	0.450000	1710.262510	0.102678
0.900000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.450000	1696.276462	0.101585
0.900000	0.450000	1.000000	0.450000	1.000000	0.450000	1700.413423	0.101908
0.900000	1.000000	0.450000	0.450000	1.000000	0.783887	1687.329332	0.100886
0.900000	0.450000	0.450000	1.000000	0.450000	1.000000	1700.507847	0.101916
0.900000	1.000000	0.450000	0.450000	1.000000	1.000000	1691.355786	0.101201
0.900000	1.000000	1.000000	1.000000	0.589061	1.000000	1690.328319	0.101119
0.900000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1690.911128	0.101167
0.900000	0.450000	1.000000	0.450000	1.000000	0.450000	1714.592982	0.103016
0.900000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.450000	1696.843723	0.101629

求出 10 次试验结果的适应度 f_{min} 的平均值为：$f_{min} = 0.101711 = sfc$，至此求解出了非线性方程的 10 组近似数值解。表 25-3 所示的 10 种求解结果，均满足题目要求设计优化求解目标，一般应选取最靠近 f_{min} 的一组结果。

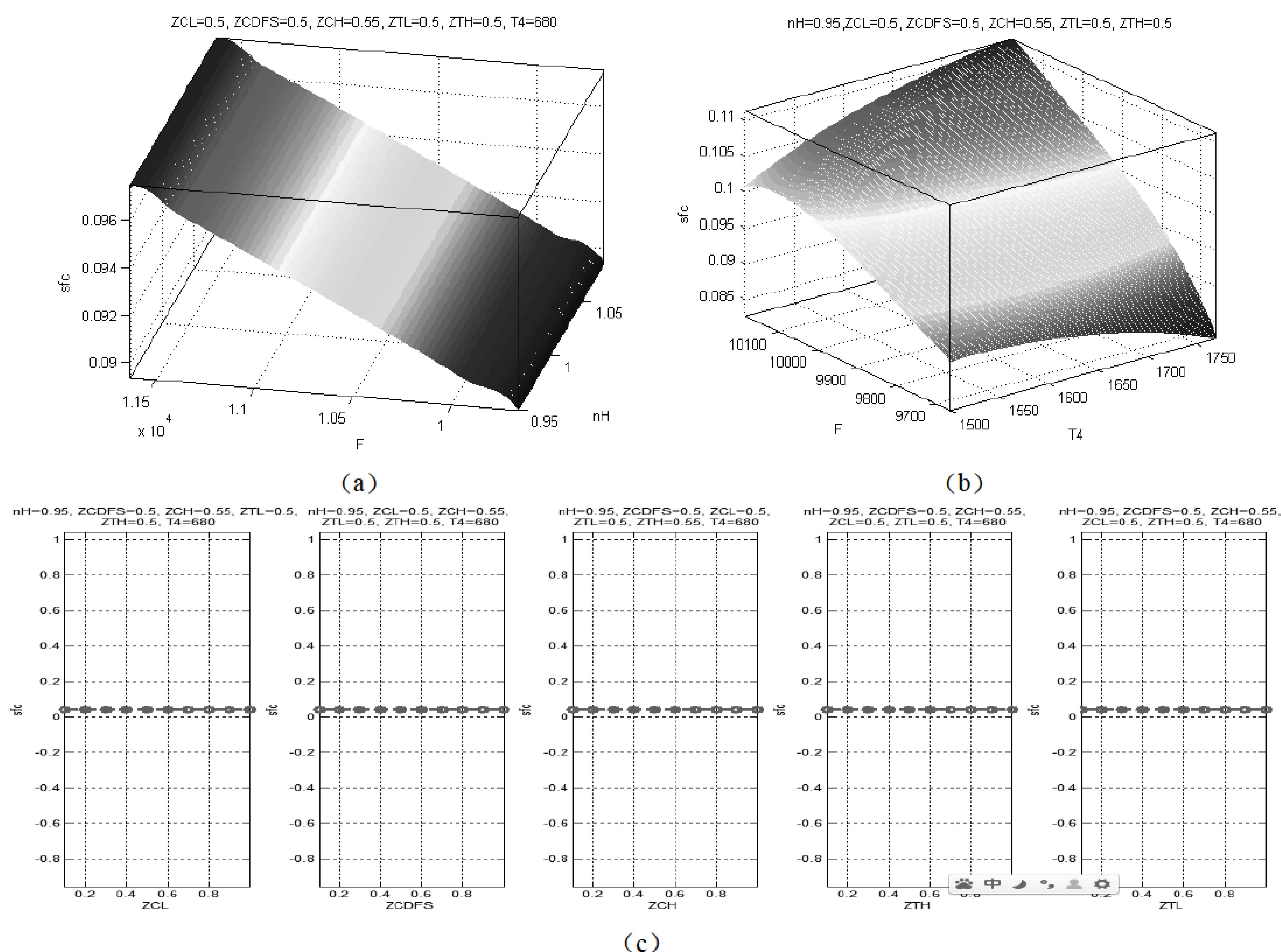
为了验证算法求解结果的合理性，采用设计 GUI 软件，对该发动机机理模型进行合理的赋值求解实际输出结果，进而与粒子群算法分析对比。7 组参数单一指标对推力 F、耗油率 *sfc* 的影响画图编程如下：

```
%% draw surf1 ---T4  高压转速
clc,clear,close all
%下载输入输出数据
% T4=[];
% save nH.mat T4
load('T4.mat');                  %原始数据以列向量的方式存放在 workplace 文件中
data = T4 ;
datax1=data(1,:);                %作为 nH 输入
datax2=data(2,:);                %作为 推力 F 输入
datay=data(3,:);                 %作为 耗油率 sfc 目标向量

datax11=min(datax1):(max(datax1)-min(datax1))/200:max(datax1);
                                                       %作为 nH 输入
datax22=min(datax2):(max(datax2)-min(datax2))/200:max(datax2);
                                                       %作为 推力 F 输入
[datax111,datax222]=meshgrid(datax11,datax22);         %插值
datay1=griddata(datax1,datax2,datay,datax111,datax222,'v4');
                                          %'v4'MATLAB 4 格点样条函数内插

figure1 = figure('Color',[1 1 1]);
mesh(datax11,datax22,datay1);
xlabel('T4');ylabel('F');zlabel('sfc');
grid on
axis tight
title('nH=0.95,ZCL=0.5, ZCDFS=0.5, ZCH=0.55, ZTL=0.5, ZTH=0.5')
box on
```

运行程序，输出结果如图 25-16 所示。



（a）　（b）

（c）

图 25-16　试验数据模拟图

在图 25-16（a）中，在 ZCL=0.5，ZCDFS=0.5，ZCH=0.55，ZTH=0.5，T4=1500 不变时，nH 变化对推力 F 、耗油率 sfc 的影响，nH 在 0.95 左右影响较强。在图 5-16（b）中，在 nH=0.95，ZCL=0.5，ZCDFS=0.5，ZCH=0.55，ZTH=0.5 不变时，T4 变化对推力 F 、耗油率 sfc 的影响，T4 在 1750 度时，影响较显著。图 5-16（c）分别表示各压缩比对推力 F 、耗油率 sfc 的影响，几乎无影响。

通过实际输出结果的分析，粒子群算法直接求解 7 个变量，所得最优个体能够满足推力 F 最大、耗油率 sfc 最小，通过大量的试验结果，能够很好的挑出局部最优。

25.8　问　题　三

25.8.1　飞行高度为 *H*=11km，马赫数 *Ma*=1.5 时发动机的性能优化

题目三需求解出发动机采用单涵道模式工作时，发动机 CDFS 导叶角度 α_{CDFS} 、低压涡轮导叶角度 α_{TL} 和喷管喉道面积 A_8 等 3 个量应为多少时能够让发动机的性能达到最优，即满足耗油率最低和单位推力最大。

对于单涵道工作模式，选择活门关闭，$W_{g225}=0$，各部件计算与双涵道工作模式计算不同，具体体现在流量输入输出问题上。单涵道工作计算流程图如图 25-17 所示。

图 25-17　发动机单涵道工作计算流程

对于前混合器输入流量（W_{g125}）计算，需采用附录 3 中 λ 与马赫数 Ma 的关系，反向求解 W_{g125}，如图 25-18 所示。

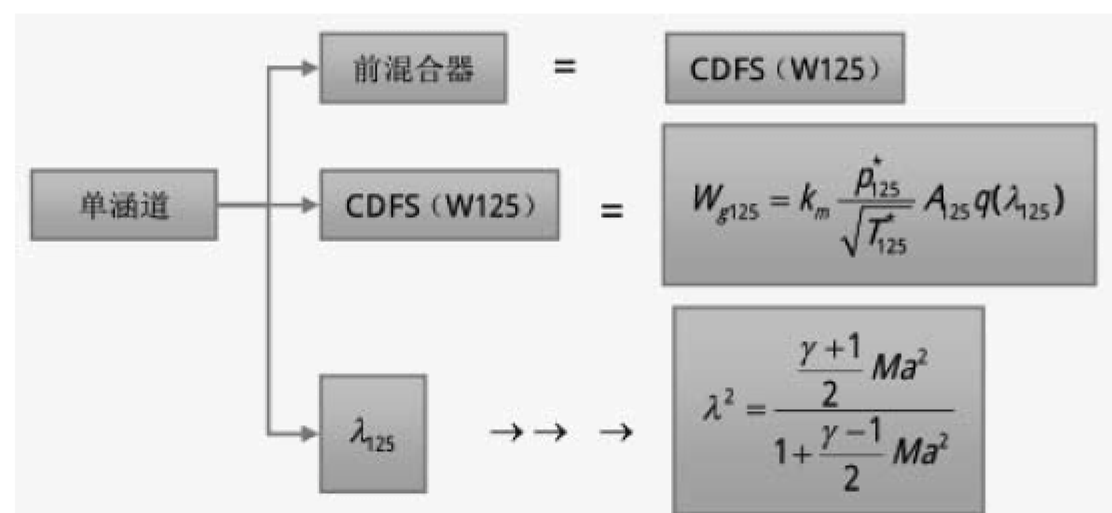


图 25-18　前混合器输入流量（W_{g125}）计算

由题目三可知，发动机的设计中主要的各部件参数，风扇导叶角度 α_L、高压压气机导叶角度 α_{CH}、高压涡轮导叶角度 α_{TH} 均为 0°，n_L、n_H、Z_{CL}、Z_{CDFS}、Z_{CH}、Z_{TH}、Z_{TL} 和 T_4^* 8 个参数都是未知量。

本章采用两种方式来对本问进行求解。

第一种：对 8 个未知参数赋予实验值，进行模拟计算；

第二种：把 8 个参数直接作为未知数进行求解，按照 PSO 算法进行求解。

（1）给未知的 8 个参数赋值，对发动机的性能优化求解。

根据荀学中和尹大伟的文章中得到的仿真实验数据，对 n_L 等 9 个数据赋予其合理的初始值用于发动机寻优问题的求解，初始值如表 25-4 所示。按照第二问中运用的算法，求解出发动机性能最优时的 α_{CDFS}、α_{TL} 和 A_8。

表 25-4　求解发动机寻优问题的主要参数的初始值

初 始 参 数	初　　值	初 始 参 数	初　　值
低压转速 n_L	0.6	高压涡轮　压比函数值 Z_{TH}	0.5
高压转速 n_H	1.1	低压涡轮　压比函数值 Z_{TL}	0.5
风扇压比函数值 Z_{CL}	0.5	风扇导叶角 α_L	0°
CDFS　压比函数值 Z_{CDFS}	0.5	高压涡轮导叶角 α_{TH}	0°
高压压气机压比函数值 Z_{CH}	0.55	高压压气机导叶角 α_{CH}	0°
主燃烧实验室出口温度 T_4^*	1700		

运用自适应粒子群算法，初始种群大小选择 30，迭代进化次数选择 100 次，求解的适应度曲线如图 25-19 所示。适应度曲线收敛性好，算法是合理有效的。

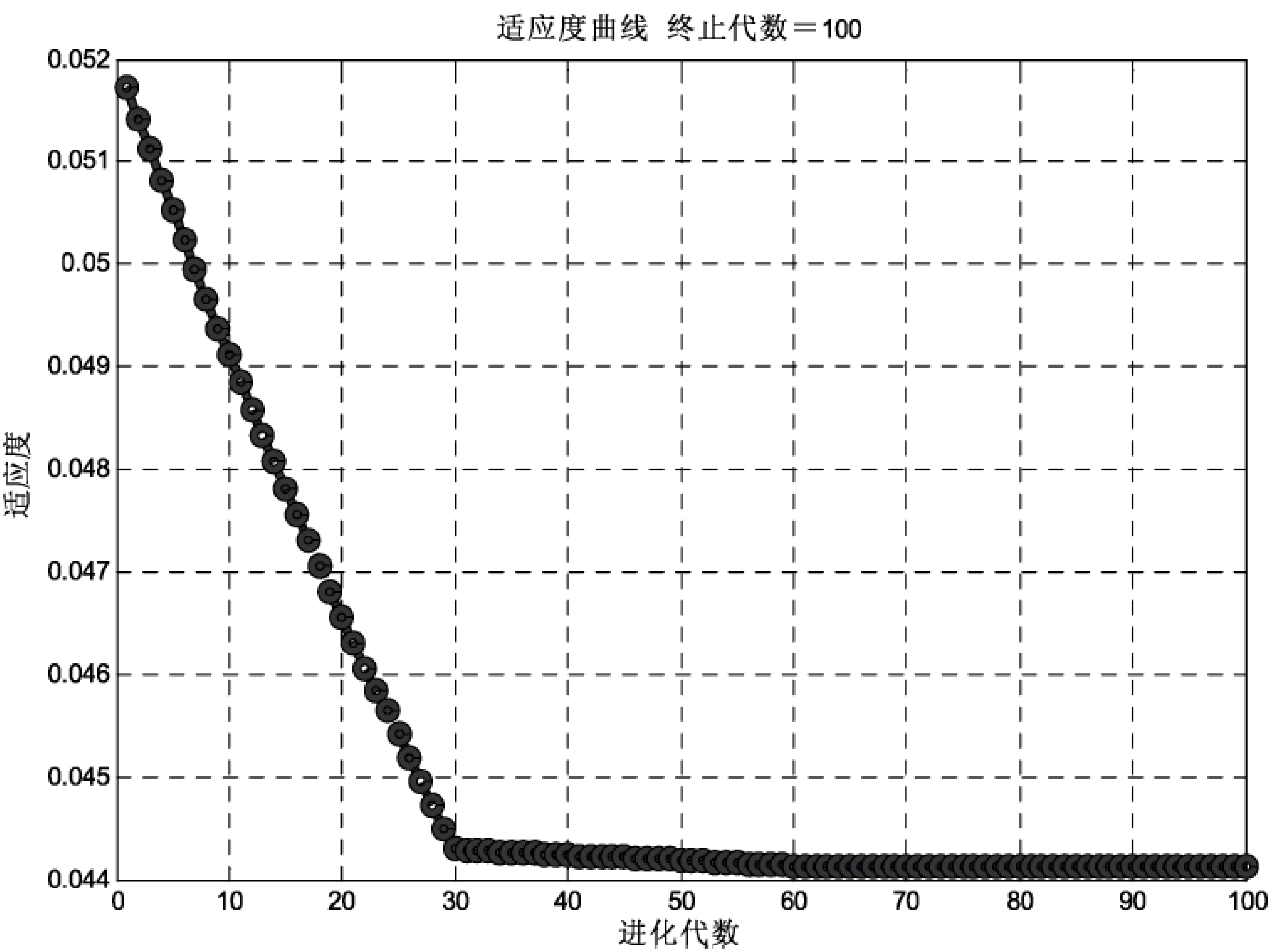


图 25-19　初始种群大小为 30，迭代进化次数为 100 的适应度曲线

对适应度函数用自适应变异 PSO 进行函数优化，对该函数共做了 10 次试验，发动机的参数 α_{CDFS}、α_{TL} 和 A_8 的求解结果如表 25-5 所示。

表 25-5　发动机各参数的 10 次试验结果

CDFS 导叶角 α_{CDFS}	低压涡轮导叶角 α_{TL}	喷管喉道面积 A_8	最优适应度 f_{min}
18.095294	15.000000	9623.571405	0.044124
11.784850	15.000000	9639.670350	0.044197
22.161252	15.000000	9585.395197	0.044078
27.155438	15.000000	9560.768020	0.044021
14.000000	15.000000	9575.263527	0.044171
15.000000	15.000000	9627.655934	0.044160
12.000000	15.000000	9567.736835	0.044194
24.544846	15.000000	9606.035794	0.044050
16.500000	15.000000	9594.818227	0.044143
23.576492	15.000000	9636.383208	0.044061

（2）未知的 8 个参数均作为未知数对发动机的性能优化求解

运用自适应粒子群算法，初始种群大小选择 50，迭代进化次数选择 30 次，求解的适应度曲线如图 25-20 所示。适应度曲线收敛性好，算法是合理有效的。

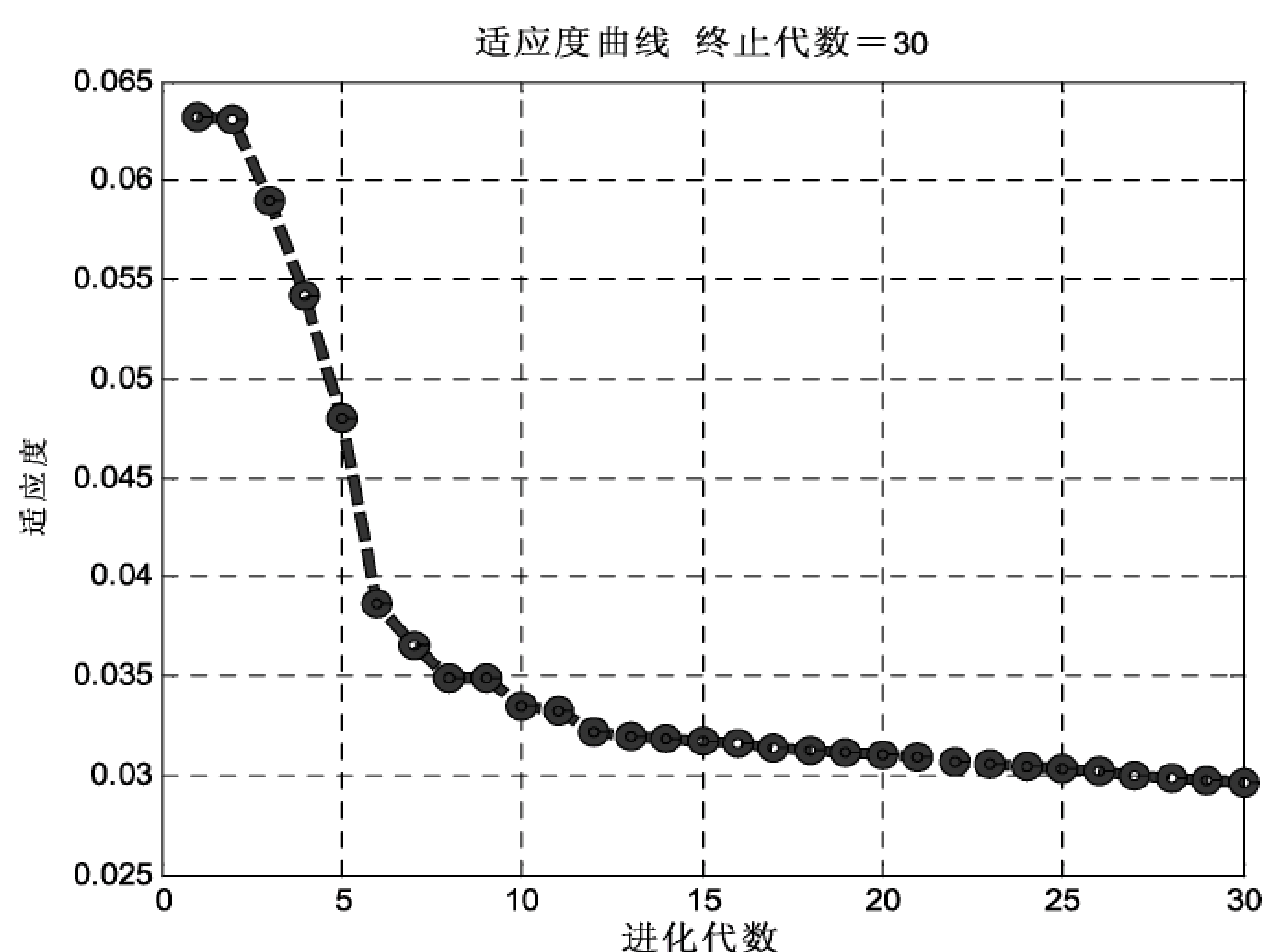


图 25-20　初始种群大小为 50，迭代进化次数为 30 的适应度曲线

对适应度函数用自适应变异 PSO 进行函数优化，对该函数共做了 10 次试验，发动机的参数 α_{CDFS}、 α_{TL} 和 A_8 的求解结果如表 25-6 所示。

表 25-6　发动机各参数的 10 次试验结果

参　　数	第 1 次试验	第 2 次试验	第 3 次试验	第 4 次试验	第 5 次试验
CDFS 导叶角	1.012463	7.149031	-5.000000	3.837168	-4.916863
低压涡轮导叶角	2.784128	5.732235	4.039288	4.937928	9.818802
喷管喉道面积	9616.18643	10883.96619	9634.45869	9969.76494	9620.99920
低压转速	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000
高压转速	0.900000	0.900000	0.900000	0.900000	0.900000
风扇压比函数值	1.000000	0.450000	0.450000	1.000000	1.000000
CDFS 压比函数值	1.000000	1.000000	0.450000	0.450000	0.450000

续表

参　　数	第 1 次试验	第 2 次试验	第 3 次试验	第 4 次试验	第 5 次试验
高压压气机压比函数值	1.000000	1.000000	0.450000	0.450000	1.000000
高压涡轮压比函数值	1.000000	0.725004	0.450000	0.864255	1.000000
低压涡轮压比函数值	1.000000	1.000000	0.450000	1.000000	0.450000
主燃烧室出口温度	1705.55247	1702.46949	1698.29817	1704.04073	1723.54110
最优适应度	0.031772	0.030655	0.031245	0.030999	0.030060

表 25-7　发动机各参数的 10 次试验结果(续)

参　　数	第 6 次试验	第 7 次试验	第 8 次试验	第 9 次试验	第 10 次试验
CDFS 导叶角	3.637009	7.000000	0.975821	2.997601	-5.000000
低压涡轮导叶角	7.500000	12.704224	11.000000	8.960606	11.110845
喷管喉道面积	9641.96721	9568.99670	9634.45869	9617.65042	9620.99920
低压转速	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000
高压转速	0.900000	0.900000	0.900000	0.900000	0.900000
风扇压比函数值	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
CDFS 压比函数值	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
高压压气机压比函数值	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
高压涡轮压比函数值	1.000000	1.000000	0.450000	1.000000	1.000000
低压涡轮压比函数值	1.000000	0.450000	1.000000	1.000000	0.691125
主燃烧室出口温度	1697.79531	1717.57082	1727.10250	1707.505930	1723.54110
最优适应度	0.030015	0.028929	0.029740	0.029818	0.029628

对比表 25-6 和表 25-7，CDFS 导叶角 α_{CDFS}、低压涡轮导叶角 α_{TL} 和喷管喉道面积 A_8 求解结果差异较大。粒子群算法采用种群自适应变异操作，避开了遗传算法交叉和变异算子，在种群规模较小的情况下，易出现早熟现象。对于两种方法的验证，能够为目标的最优值选取提供合理的参考依据，对于个体的选择应该根据背景和参数本身而定。第一种方法表示在一组监控状态下的局部最优求解，使得模型陷入局部陷阱；第二种方法考虑全局影响因素，满足全局最优条件，所求的最优适应度函数值较小。

25.8.2　飞行高度为 H=11km，马赫数从 1.1 到 1.6 变化时发动机的性能优化

问题三（2）研究发动机飞行高度 $H=11\text{km}$，飞行马赫数从 $Ma=1.1$ 变化到 $Ma=1.6$，发动机特性最优时，CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。

发动机采用单涵道模式，将选择活门面积设置为 0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度和高压涡轮导叶角度均设置为 0°，后混合器出口总面积设置为 2.8518e+004，后混合器内和外涵道面积可调。

在 25.8.1 小节分析中，采用全局寻优方法能够取得较好的收敛效果，能够有效地克服粒子群算法寻优早熟等问题，选取题目所有的未知变量为求解个体，进行发动机特性最优求解，从而得到 CDFS 导叶角度和低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积的值。未知变量设置如下：

```
aCDFS = x(1);     %CDFS 导叶角
aCH = x(2);       %低压压气机导叶角
A8 = x(3);        %尾喷管 8 截面的面积
nL = x(4);        %低压转速（风扇、低压涡轮物理转速）
nH = x(5) ;       %高压转速（CDFS、高压压气机、高压涡轮物理转速）
ZCL = x(6);       %风扇 压比函数值
ZCDFS = x(7);     %CDFS 压比函数值
ZCH = x(8);       %高压压气机 压比函数值
ZTH = x(9);       %高压涡轮 压比函数值
ZTL = x(10);      %低压涡轮 压比函数值
T4 = x(11);       %主燃烧实验室出口温度
```

问题三（2）考虑后混合器内和外涵道面积可调。因此，针对每一组变化的内 A_{61} 和外涵道面积 A_{62}，飞行马赫数从 $Ma=1.1$ 变化到 $Ma=1.6$，系统最优时的输出 CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积的值，结果整理如表 25-8 所示。

表 25-8　发动机特性最优时，CDFS导叶角度、低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积值统计表

后混合器内 A_{61}、外涵道面积 A_{62}	飞行马赫数 Ma	CDFS 导叶角度	低压涡轮导叶角度	尾喷管喉道面积
A61 = 3954.0 A62=24567.0	Ma=1.1	9.707863	11.988158	9635.954221
	Ma=1.2	2.967727	7.393285	9627.424144
	Ma=1.3	-5.000000	6.298335	9734.538876
	Ma=1.4	-0.438669	5.395537	9556.824853
	Ma=1.5	9.106104	2.612958	10480.596629
	Ma=1.6	8.365925	8.951386	10558.104997
A61 = 5306.1 A62=23212	Ma=1.1	6.977310	3.212256	10651.271930
	Ma=1.2	8.258030	9.671016	9638.898559
	Ma=1.3	5.854786	13.308879	9627.424144
	Ma=1.4	1.193664	3.662224	9510.904112
	Ma=1.5	7.149031	5.732235	10883.966187
	Ma=1.6	1.897361	0.454712	9565.880840
A61 = 5832.0 A62=22691.0	Ma=1.1	1.969499	5.413700	10875.409640
	Ma=1.2	6.914709	6.860284	9602.542761
	Ma=1.3	-0.984034	3.696518	9865.357946
	Ma=1.4	0.801114	13.084550	9994.650975
	Ma=1.5	3.000000	13.207634	9635.414582
	Ma=1.6	0.615947	0.266539	10583.195666
A61 = 7991.0 A62=20529.0	Ma=1.1	-1.5000	12.570372	10590.206073
	Ma=1.2	0.037221	2.702487	10410.597870
	Ma=1.3	-4.441209	8.843615	10733.870565
	Ma=1.4	6.311047	6.799886	9640.748873
	Ma=1.5	1.935076	-0.432089	10619.278818
	Ma=1.6	8.464985	9.365958	9628.773431

由表 25-8 可得，画出两两关系图分别如图 25-21～图 25-23 所示。

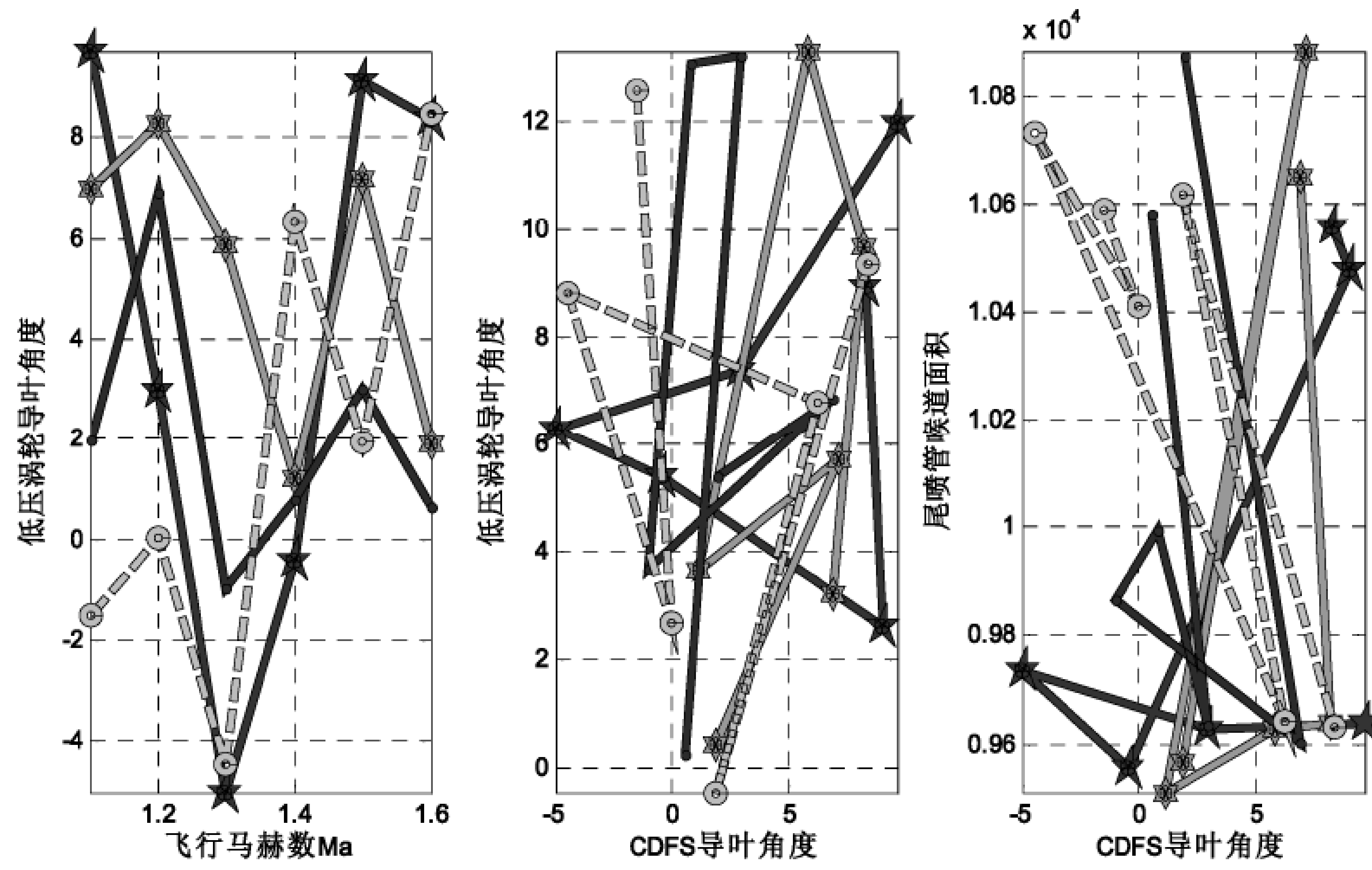


图 25-21　CDFS 导叶角度与 Ma、低压涡轮导叶角度和尾喷管喉道面积关系图

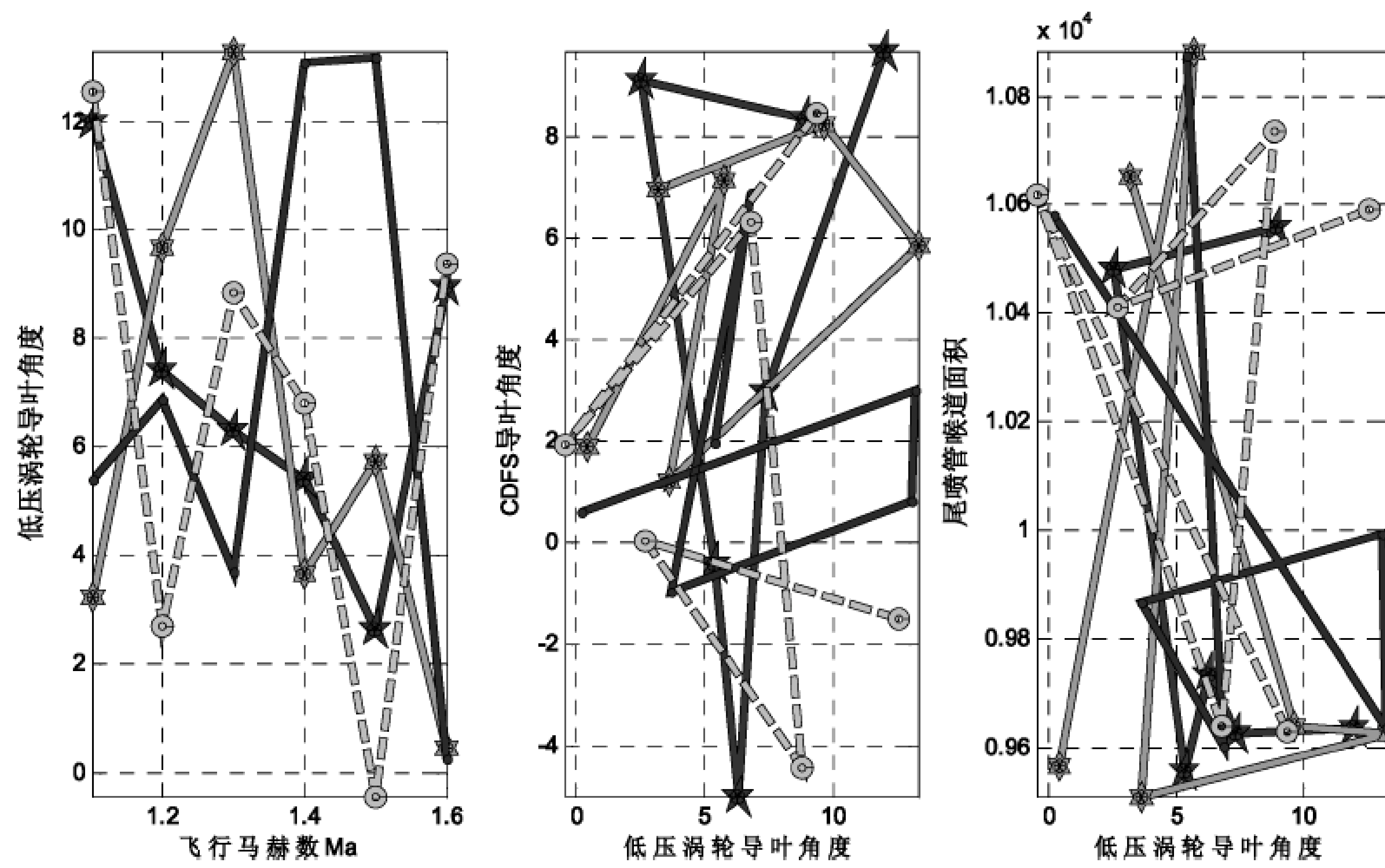


图 25-22　低压涡轮导叶角度与 Ma、CDFS 导叶角度、尾喷管喉道面积关系图

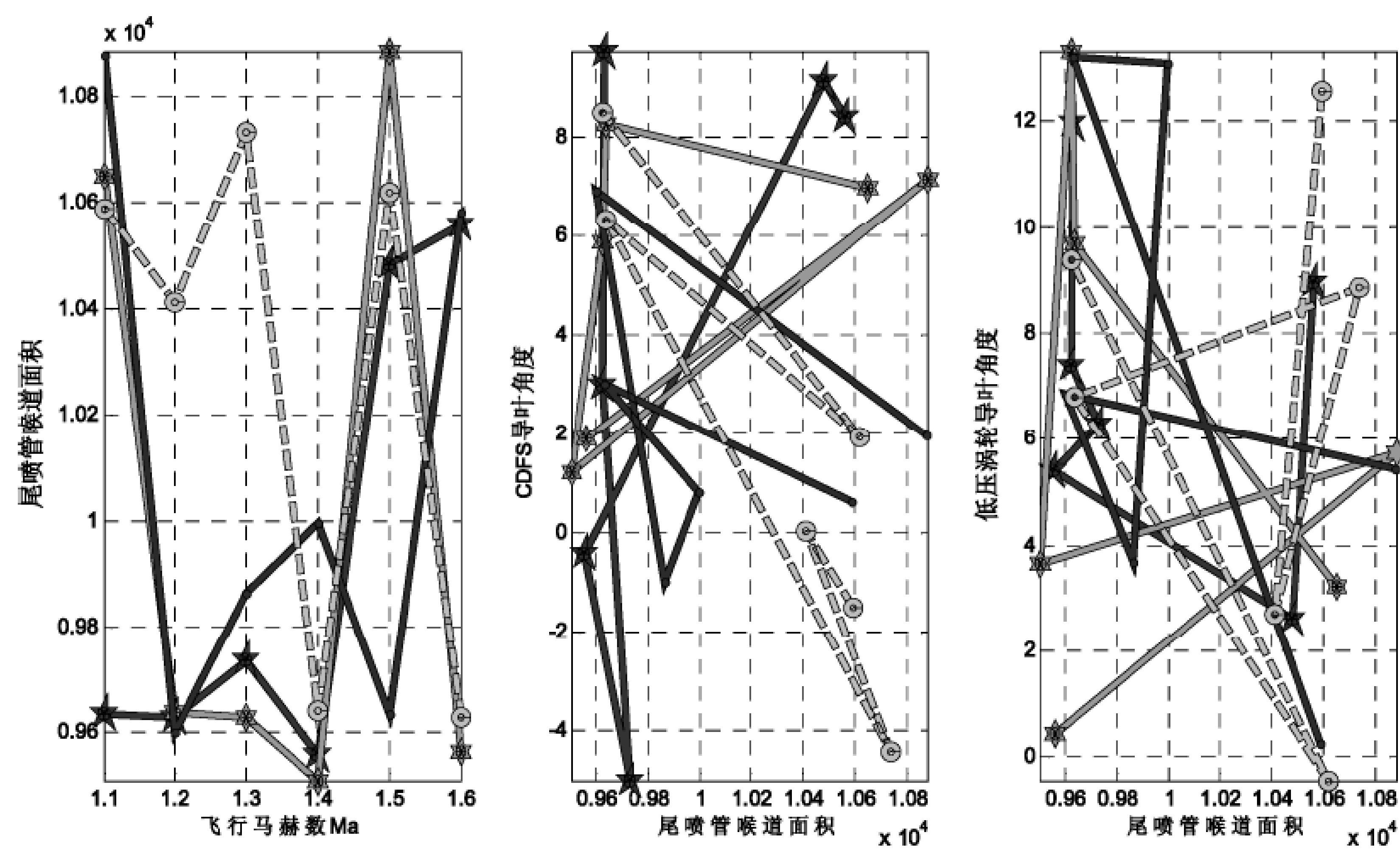


图 25-23　尾喷管喉道面积与 Ma、CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度关系图

CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积值随飞行马赫数 *Ma* 变化关系不明显，服从随机分布，归因于粒子群算法寻优计算规则。粒子群算法（PSO）是一种基于群体的随机优化技术。与其他基于群体的进化算法相比，它们均初始化为一组随机解，通过迭代搜寻最优解。基本的对粒子个体进行操作：①飞离最近的个体，以避免碰撞。②飞向目标。③飞向群体的中心。因此，后混合器内、外涵道面积、飞行马赫数 *Ma* 对 CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积值的影响被粒子群寻优计算准则所淹没。

25.9　模型的评价与推广

25.9.1　模型的评价

模型优点：本章按照题目给出变循环发动机部件建模法，仔细分析并推导所有部件的计算过程，推导出了发动机平衡方程所决定的非线性方程组，同时根据发动机的各部件的工作机理搭建了一个基于 MATLAB 的 GUI 软件计算平台。

针对非线性方程的求解计算，建立了基于自适应遗传的粒子群算法寻优计算。该算法搜索速度快、效率高、算法简单，适合于实值型处理，特别是求解多元函数的优化问题，很好地求解出非线性方程的数值解及发动机的性能优化问题。

模型缺点：粒子群算法存在运算量较大、对离散的优化问题处理不佳，容易陷入局部最优解。

25.9.2　模型的推广

对于变循环涡扇发动机性能，国内做过很多研究。有的建立起了变循环发动机的部件级模型，有的通过专业软件仿真变循环发动机的工作状况，有的搭建起了变循环发动机的半物理实验平台，还有的介绍了解决变循环发动机工作方程的各种算法。但是在这些研究中，要么是先确定发动机参数再予以验证，有的是简单介绍解决共同工作方程的各种算法，还很少有通过数学方法来优化变循环发动机工作参数从而提高发动机性能发面的研究。本章基于自适应遗传的粒子群算法（PSO）的应用，包括系统设计、多目标优化、分类、模式识别、调度、信号处理和决策等，PSO 算法的应用十分广泛，有比较好的发展背景，值得做进一步研究。

25.10　基于 MATLAB 的 GUI 软件介绍

本章基于变循环发动机部件法建模及优化，针对第一问风扇和 CDFS 输出总温、总压和输出流量，开发了基于 MATLAB 的 GUI 软件。该软件包括分为单涵道工作模式计算和双涵道模式计算，分别如图 25-24 和图 25-25 所示。该 GUI 软件包括参数初始化模块、图形显示模块和输出结果显示等功能，方便用户进行参数设置。

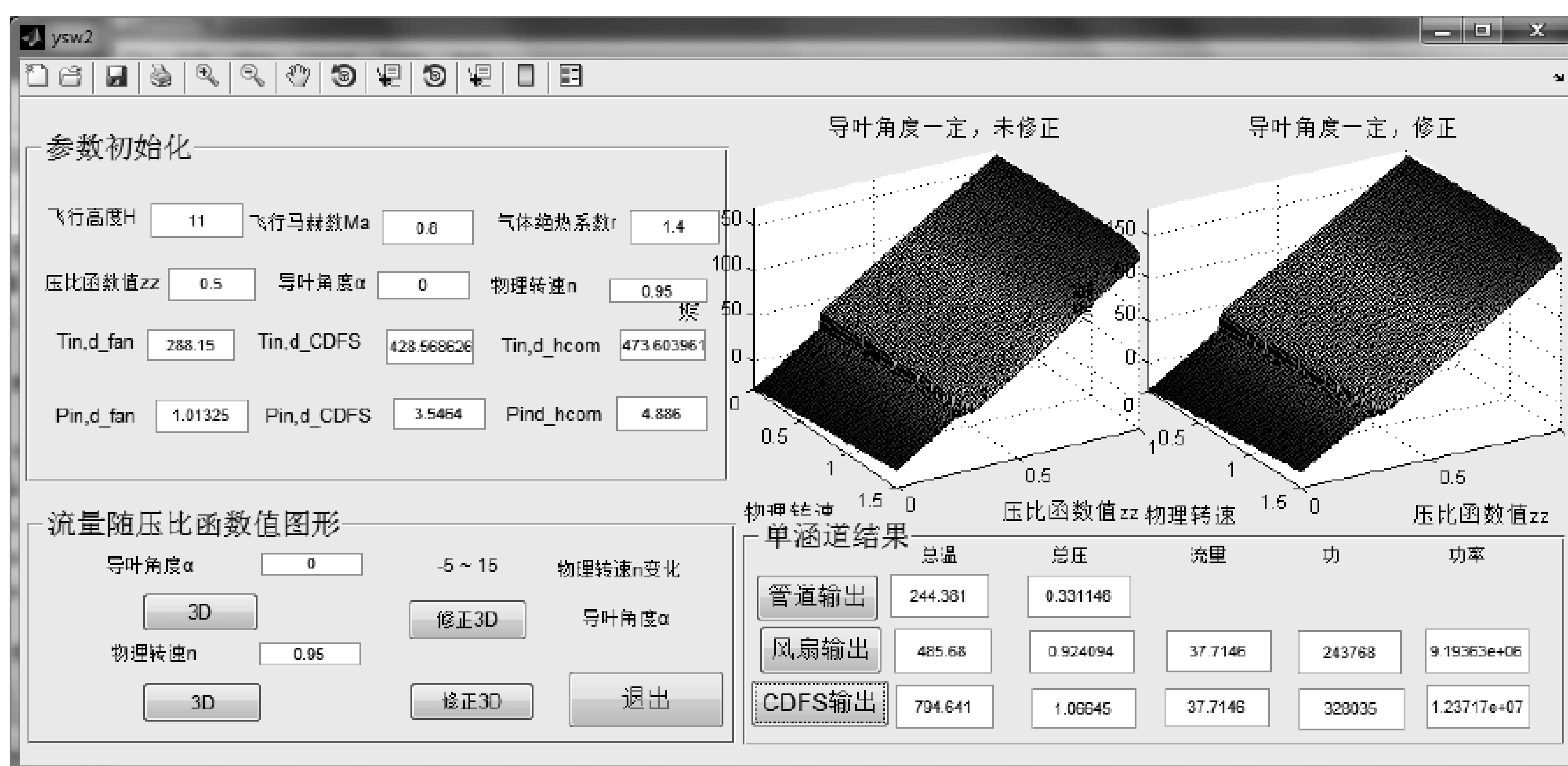


图 25-24　单涵道风扇和 CDFS 输出量显示

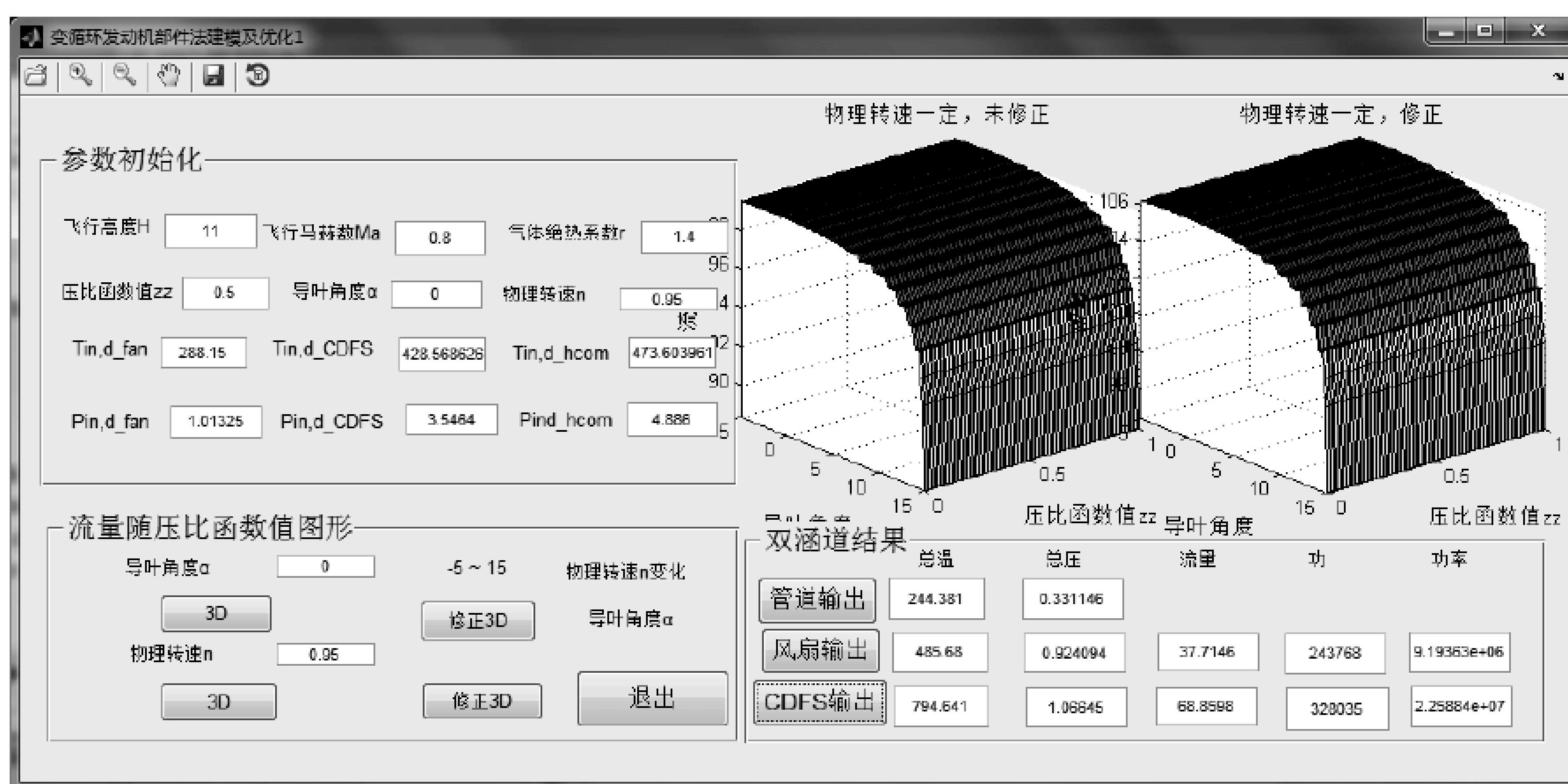


图 25-25　双涵道风扇和 CDFS 输出量显示

针对第二问中提出的发动机性能优化求解问题，为了进行实验数据的验证输出，针对双涵道、单涵道不同工作模式，设计了不同的 GUI 软件，主要体现在内嵌程序不同，如图 25-26 和图 25-27 所示。

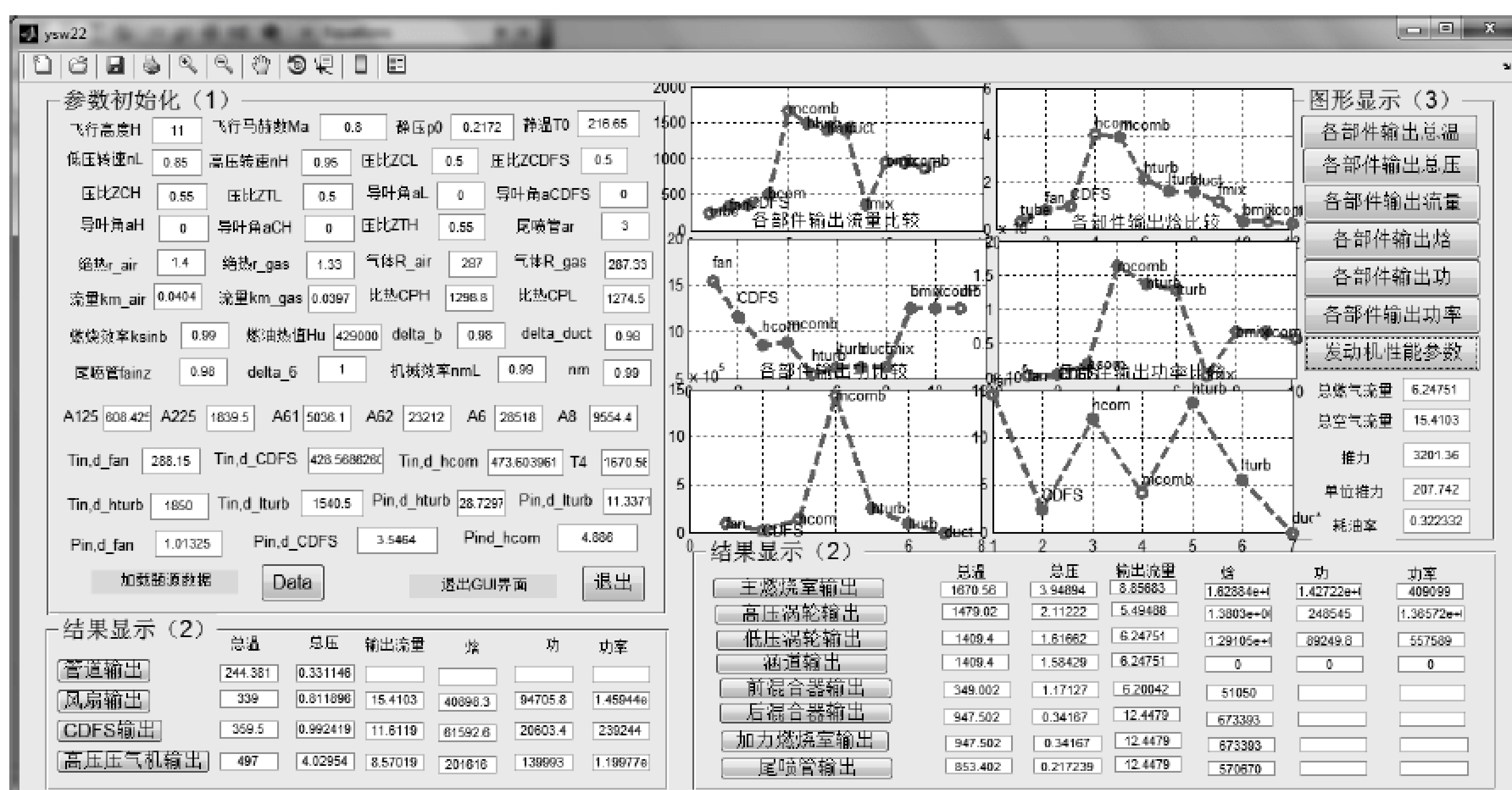


图 25-26　双涵道各部件输出量显示


图 25-27　单涵道各部件输出量显示

25.11　正文重要公式推导过程

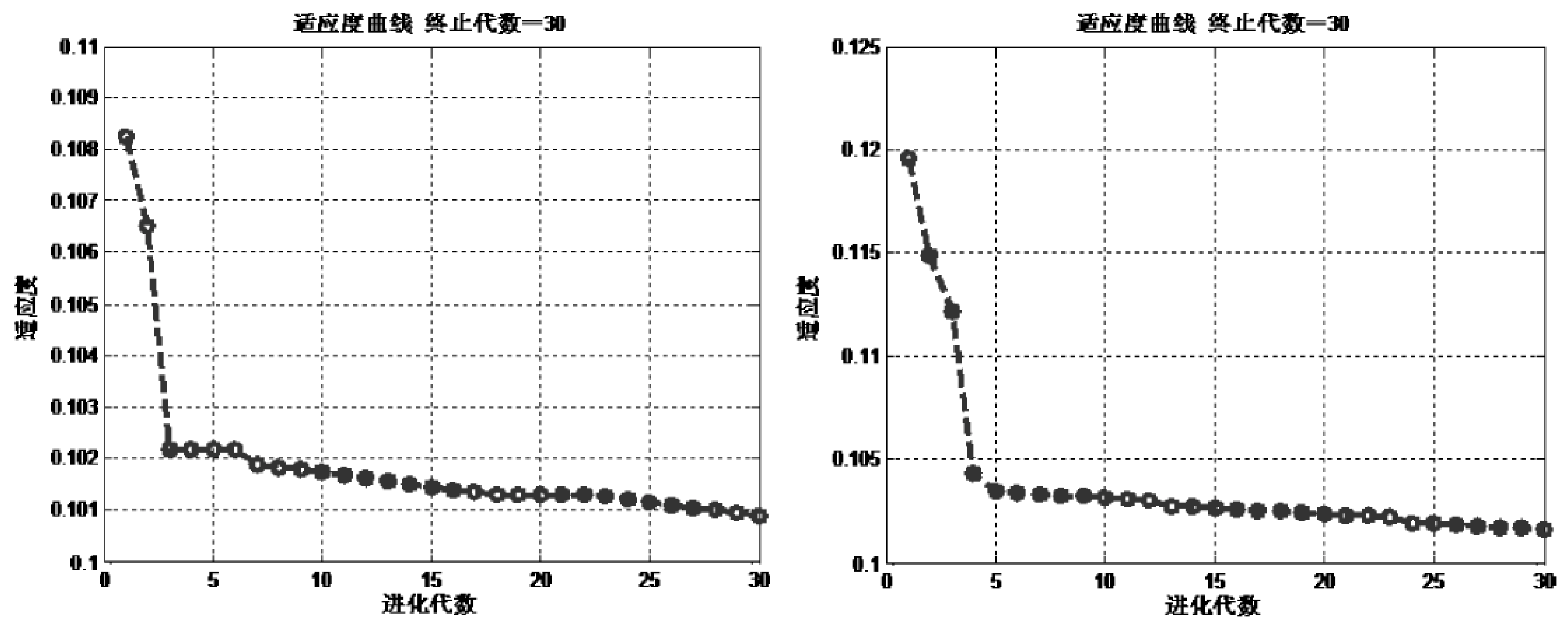
1. 附图清单

附图 1：航空发动机 UG/NX 模型。


附图 1　UG/NX 模型

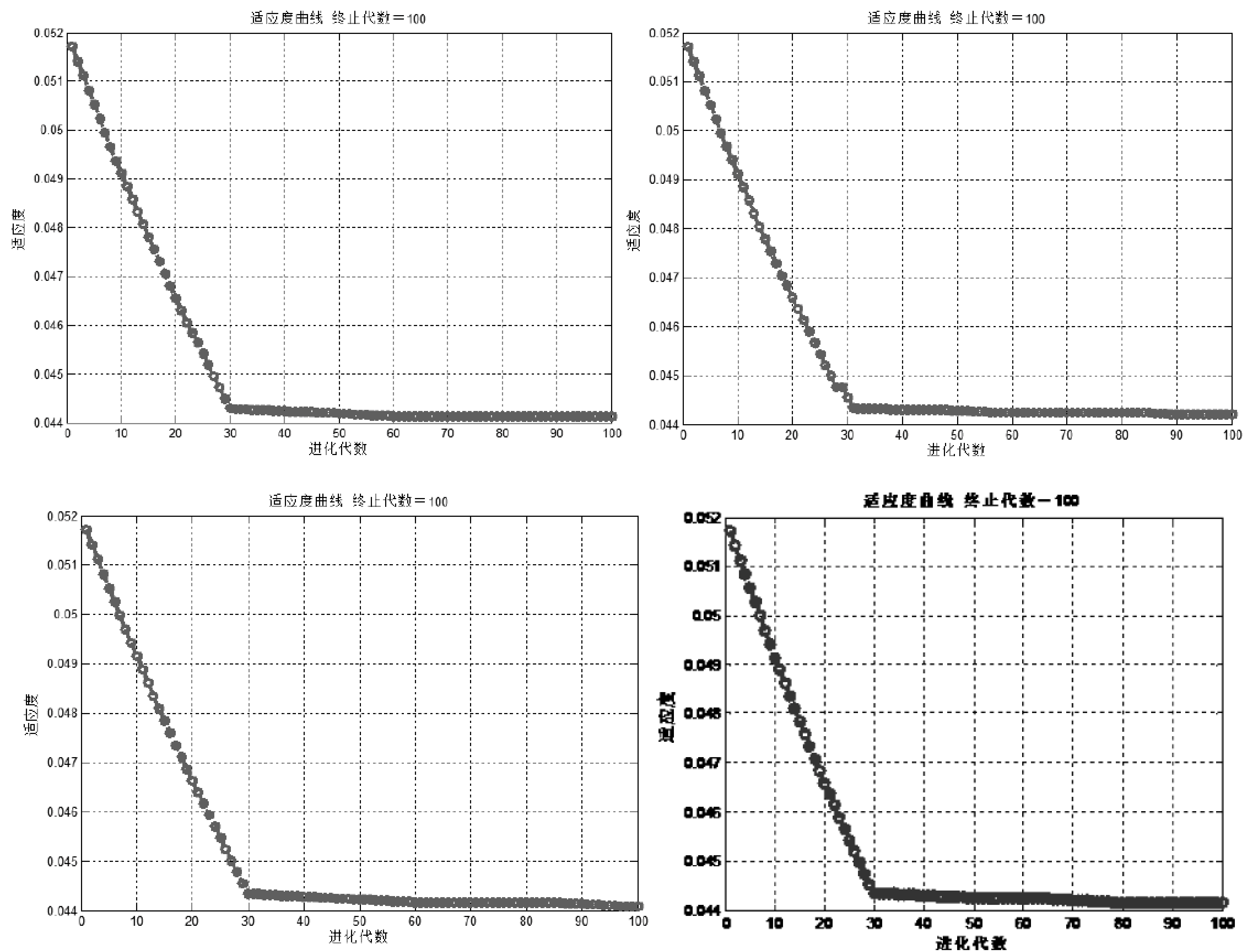
附图 2：基于自适应粒子群算法的迭代寻优。





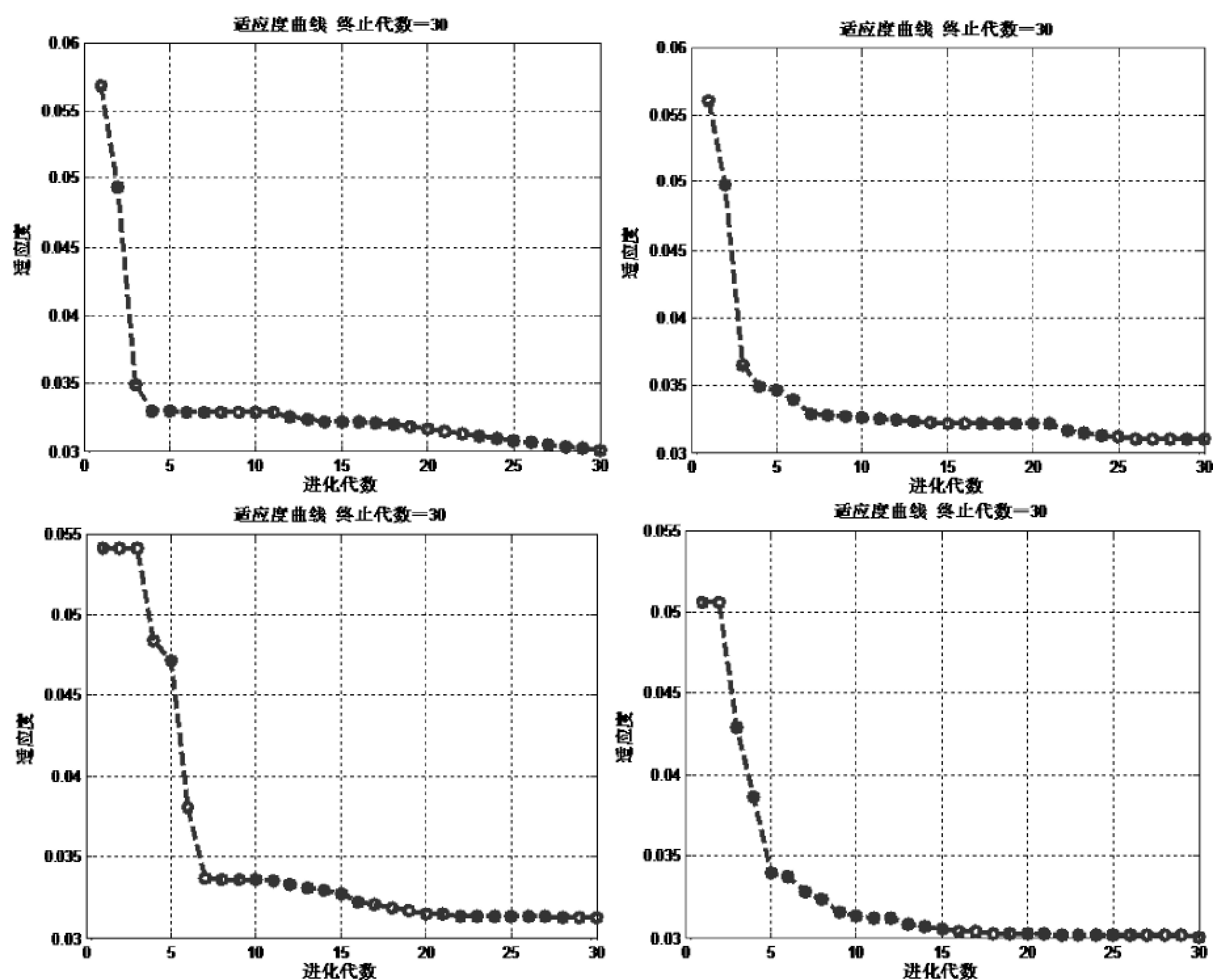
附图 2　粒子群算法求解 7 个平衡方程所组成的非线性方程组的部分适应度曲线 nH = x(1) ; ZCL = x(2); ZCDFS = x(3); ZCH = x(4); ZTH = x(5); ZTL = x(6); T4 = x(7);

附图 3：特定值下的粒子群寻优适应度曲线。



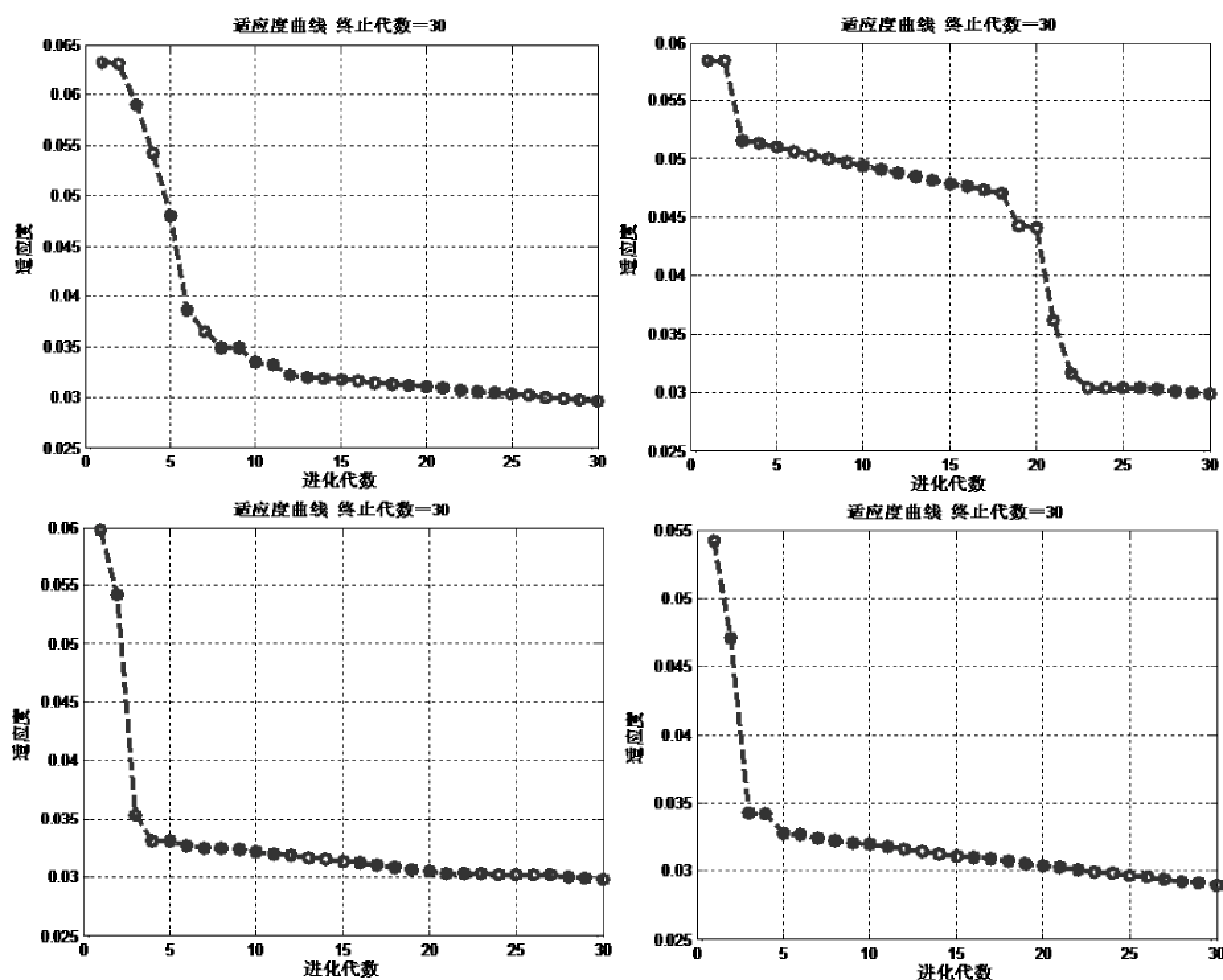
附图 3　aCDFS = x(1); aCH = x(2); A8 = x(3);nL = 0.6; nH = 1.1 ; ZCL = 0.5;ZCDFS = 0.5; ZCH = 0.55; ZTH = 0.5; ZTL = 0.5; T4 = 1700;

附图 4：全局粒子群寻优适应度曲线。



附图 4　aCDFS = x(1); aCH = x(2); A8 = x(3); nL = x(4); nH = x(5) ; ZCL = x(6); ZCDFS = x(7); ZCH = x(8); ZTH = x(9); ZTL = x(10); T4 = x(11);

附图 5：CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律，粒子群寻优适应度图。



附图 5　飞行马赫数 Ma 从 1.1 到 1.6 变化，部分收敛图

2. 附录正文公式推导

1. 风扇

风扇的功率 N_{CL}：

$$N_{CL}=W_a\cdot l_{CL}=$$

$$\frac{0.1644\xi_{12}(n_L,Z_{CL})(h(\psi^{-1}(\psi(244.318)+287\ln[2.3894(\xi_{11}(n_L,Z_{CL})-1)+1]))-53808)}{\xi_{13}(n_L,Z_{CL})} \quad (1)$$

风扇出口流量 W_{a2}：

$$W_{a2}=0.1780\xi_{12}(n_L,Z_{CL}) \quad (2)$$

风扇出口总压 $p_{1\text{out}}$：

$$p_{1\text{out}}=p_{1\text{in}}\cdot pr_c=0.7911\xi_{11}(n_L,Z_{CL})-0.4600\rightarrow P_1(n_L,Z_{CL}) \quad (3)$$

风扇出口总温 $T_{1\text{out}}$：

$$T_{1\text{out}}=h^{-1}(\frac{h(\psi^{-1}(\psi(244.3812)+287\ln[2.3894(\xi_{11}(n_L,Z_{CL})-1)+1]))-h(244.3812)}{1.0684\xi_{12}(n_L,Z_{CL})}-53808)$$

$\rightarrow T_1(n_L,Z_{CL})$（表示这是关于 n_L， Z_L 的函数，下同）　(4)

2. CDFS

CDFS 的功率 N_{CDFS}：

$$N_{\text{CDFS}}=$$

$$\frac{0.6528\xi_{22}(n_H,Z_{\text{CDFS}})\text{p}_{2\text{in}}\cdot(h(\psi^{-1}(\psi(T_{2\text{in}})+287\ln[0.3059\xi_{21}(n_H,Z_{\text{CDFS}})-0.6941]))-h(T_{2\text{in}}))}{\xi_{23}(n_H,Z_{\text{CDFS}})\sqrt{T_{2\text{in}}}} \quad (5)$$

CDFS 出口流量 W_{CDFS}：

$$W_{\text{CDFS}}=\frac{0.8756\xi_{22}(n_H,Z_{\text{CDFS}})\cdot p_{2\text{in}}}{\sqrt{T_{2\text{in}}}} \quad (6)$$

CDFS 出口总压 $p_{2\text{out}}$：

$$p_{2\text{out}}=p_{2\text{in}}\cdot pr_c=p_{2\text{in}}\cdot[0.3059\xi_{21}(n_H,Z_{\text{CDFS}})+0.6941]\rightarrow P_2(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}}) \quad (7)$$

CDFS 出口总温 $T_{2\text{out}}$：

$$T_{1\text{out}}=h^{-1}(h_{\text{out}})=h^{-1}(\frac{h(\psi^{-1}(\psi(244.3812)+287\ln[2.3894(\xi_{21}(n_H,Z_{\text{CDFS}})-1)+1]))-h(244.3812)}{1.0684\xi_{23}(n_H,Z_{\text{CDFS}})}-$$

$$53808)\rightarrow T_2(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}}) \quad (8)$$

3. 高压压气机

高压压气机的功率 N_{CH}：

$$N_{CH}=W_a\cdot l_{CH}=$$

$$\frac{1.5982p_{3\text{in}}\xi_{32}(n_H,Z_{CH})\cdot(h(\psi^{-1}(\psi(244.318)+287\ln[0.9119\xi_{31}(n_H,Z_{CH})-0.0981]))-h(T_{3\text{in}}))}{\xi_{33}(n_H,Z_{CH})\sqrt{T_{3\text{in}}}}$$

(9)

高压压气机出口流量 W_{CH}：

$$W_{CH}=1.7131\cdot\frac{\xi_{32}(n_H,Z_{CH})\cdot p_{3\text{in}}}{\sqrt{T_{3\text{in}}}} \tag{10}$$

高压压气机出口总压 $p_{3\text{out}}$：

$$p_{3\text{out}}=p_{3\text{in}}\cdot pr_c=0.7911\xi_{31}(n_H,Z_{CH})-0.4600\ \ (3.13) \tag{11}$$

高压压气机出口总温 $T_{3\text{out}}$：

$$T_{3\text{out}}=h^{-1}(\text{h}_{\text{out}})=h^{-1}\left(\frac{h(\psi^{-1}(\psi(244.3812)+287\ln[0.9119\xi_{31}(n_H,Z_{CH})-0.0981]))-h(244.3812)}{1.0684\xi_{33}(n_H,Z_{CH})}-\right.$$

$$\left.h(T_{3\text{in}})\right)\rightarrow T_3(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{CH}) \tag{12}$$

4．主燃烧室

（1）根据公式 $f_b=\dfrac{h_4-h_3}{\xi_b H_u+h_3}$ 求出主燃烧室出口油气比，其中，$h_3=h(T_{4\text{in}})$ 和 $h_4=h(T_4^*)$ 分别为主燃烧室进出口焓，燃烧效率 ξ_b=0.99，燃油热值 H_u=42900000。

于是可以求得主燃烧室出口油气比：

$$f_b=\frac{h_4-h_3}{\xi_b H_u+h_3}=\frac{h(T_4^*)-h(T_{3\text{out}})}{42471000-h(T_{3\text{out}})}\rightarrow f_b(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{CH},T_4^*) \tag{13}$$

（2）主燃烧室燃油流量：

$$W_f=W_{a4}\cdot f_b=\frac{W_{CH}(h(T_4^*)-h(T_{3\text{out}}))}{42471000-h(T_{3\text{out}})}\rightarrow W_f(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{CH},T_4^*) \tag{14}$$

（3）主燃烧室出口总压：

$p_4^*=p_{3\text{in}}\sigma_b=0.98p_{3\text{in}}$，其中主燃烧室总压恢复系数 σ_b=0.98。

5．高压涡轮

高压涡轮流量 W_{TH}：

$$W_{TH}=\frac{20.2955\xi_{12}(n_H,Z_{TH})\cdot p_{5\text{in}}}{\sqrt{T_{5\text{in}}}} \tag{15}$$

高压涡轮出口总压 $p_{5\text{out}}$：

$$p_{5\text{out}}=\frac{p_{5\text{in}}}{1.5342\xi_{11}(n_H,Z_{TH})-0.5342}\rightarrow P_5(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{TH},T_4^*) \tag{16}$$

高压涡轮出口总压 $T_{5\text{out}}$：

$$T_{5\text{out}}=T_{5\text{in}}\ (1-1.0121\zeta_{13}(n_H,Z_{TH})(1-(1.5342\zeta_{11}(n_H,Z_{TH})-0.5342)^{0.2212}))$$

$$\rightarrow T_5(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{TH},T_4^*) \tag{17}$$

高压涡轮出口功率 N_{TH}：

$$N_{TH}=\frac{20.092545\xi_{12}(n_H,Z_{TH})\cdot p_{5\text{in}}\cdot(h(T_{5\text{in}},f_b)-h(T_{5\text{out}},f_b))}{\sqrt{T_{5\text{in}}}} \tag{18}$$

其中 $f_b=\dfrac{h(T_4^*)-h(T_{3\text{out}})}{42471000-h(T_{3\text{out}})}$。

6．低压涡轮

低压涡轮流量W_{TL}：

$$W_{TL}=\frac{1.4724\xi_{12}(n_L,Z_{TL})\cdot p_{6\text{in}}}{\sqrt{T_{6\text{in}}}} \tag{19}$$

低压涡轮出口总压$p_{6\text{out}}$

$$p_{6\text{out}}=\frac{p_{6\text{in}}}{0.7902\xi_{21}(n_L,Z_{TL})+0.2098}\to P_6(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{TH},Z_{TL},T_4^*) \tag{20}$$

低压涡轮出口总温$T_{6\text{out}}$：

$$T_{6\text{out}}=T_{6\text{in}}\,(1-1.0061\zeta_{23}(n_L,Z_{TL})(1-(0.7902\zeta_{21}(n_L,Z_{TL})+0.2098)^{0.2254}))$$
$$\to T_6(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{TH},Z_{TL},T_4^*) \tag{21}$$

低压涡轮出口功率N_{TL}：

$$N_{TL}=W_{TL}\cdot l_{TL}\eta_m=\frac{1.3302\xi_{22}(n_L,Z_{TL})\cdot p_{6\text{in}}\cdot(h(T_{6\text{in}},f_b)-h(T_{6\text{out}},f_b))}{\sqrt{T_{6\text{in}}}} \tag{22}$$

其中$f_b=\dfrac{h(T_4^*)-h(T_{3\text{out}})}{42471000-h(T_{3\text{out}})}$。

7．涵道

$$\begin{cases}T_{\text{out}}^*=T_{\text{in}}^*\\ p_{\text{out}}^*=p_{\text{in}}^*\sigma_{\text{duct}}\\ W_{a,\text{out}}=W_{a,\text{in}}\end{cases} \tag{23}$$

其中总压恢复系数$\sigma_{\text{duct}}=0.98$。

由此可见：涵道中的气体参数变化情况是温度和流量不发生变化，只有压强会降低一些。

8．前混合器，选择活门，副外涵道建模（求$W_{\alpha 21}$和$W_{\alpha 13}$）

混合器两股（副外涵道和 CDFS 涵道两股）参混气流参混前的总温、总压，副外涵、CDFS 涵道出口面积和 CDFS 涵道出口流量。副外涵道混前总温$T_{225}^*=T_{1\text{out}}$，$T_{125}^*=T_{2\text{out}}$，$p_{225}^*=0.98p_{1\text{out}}$，$p_{125}^*=0.98p_{2\text{out}}$，$W_{g125}=\dfrac{W_{CL}}{2}$，CDFS 涵道出口流量应该等于 CDFS 的出口流量减去高压压气机的出口流量，即：

$$W_{g125}=W_{\text{CDFS}}-W_{CH}=\frac{0.8756\xi_{22}(n_H,Z_{\text{CDFS}})p_{2\text{in}}}{\sqrt{T_{2\text{in}}}}-\frac{1.7131\xi_{32}(n_H,Z_{CH})p_{3\text{in}}}{\sqrt{T_{3\text{in}}}}$$
$$\to W_{g225}(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{CH}) \tag{24}$$

由涵道的性质知$W_{g225}=W_{a13}$。题目已知副外涵道出口面积A_{225}=1.8395e+003，CDFS 涵道出口面积$A_{125}=608.4252$。

CDFS 入口流量 Wa21 为：

$$W_{a21}=0.1500\xi_{22}(n_H,Z_{\text{CDFS}}) \tag{25}$$

副外涵流量 W_{a13} 为：

$$W_{a13} = W_{g225} = 74.3185\frac{p_{1\text{out}}}{\sqrt{T_{1\text{out}}}}q(\pi^{-1}(\frac{p_{2\text{out}}\cdot\pi(q^{-1}(\frac{W_{g125}\sqrt{T_{2\text{out}}}}{24.5803p_{2\text{out}}}))}{p_{1\text{out}}})) \rightarrow W_{g225}(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{CH}) \tag{26}$$

前混合器出口流量为：

$$W_{g15} = W_{g225} + W_{g125} \tag{27}$$

前混合器出口总温为：

$$T_{15}^* = h^{-1}(\frac{W_{g225}h(T_{1\text{out}}) + W_{g125}h(T_{2\text{out}})}{W_{g225} + W_{g125}} \rightarrow T_{15}(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{CH}) \tag{28}$$

前混合器出口总压为：

$$p_{15}^* = \frac{(W_{g225}+W_{g125})\sqrt{h^{-1}(\frac{W_{g225}h(T_{1\text{out}}) + W_{g125}h(T_{2\text{out}})}{W_{g225}+W_{g125}})}}{98.8962q(z^{-1}(\frac{0.0397(1839.5p_{1\text{out}}f(\lambda_{225}) + 608.4252p_{2\text{out}}f(\lambda_{125}))}{W_{g15}(\frac{2}{\gamma+1})^{\frac{1}{\gamma-1}}\sqrt{h^{-1}\frac{W_{g225}h(T_{1\text{out}}) + W_{g125}h(T_{2\text{out}})}{W_{g225}+W_{g125}}}}))})) \rightarrow P_{15}(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{CH}) \tag{29}$$

9. 后混合器

内涵静压 $p_{61} = p_{61}^* \cdot \pi(\lambda_{61})$，计算外涵静压 $p_{62} = p_{62}^* \cdot \pi(\lambda_{62})$；

$$p_{61} = p_{6\text{out}}\cdot\pi(q^{-1}(\frac{W_{TL}\sqrt{T_{6\text{out}}}}{210.6521p_{6\text{out}}})) \rightarrow P_{61}(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{TH},Z_{TL},T_4^*) \tag{30}$$

$$p_{62} = p_{15}^*\cdot\pi(q^{-1}(\frac{W_{15}\sqrt{T_{15}^*}}{92.1516p_{15}^*})) \rightarrow P_{62}(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{CH}) \tag{31}$$

混合器出口流量 W_{g6}：

$$W_{g6} = W_{g15} + W_{TL} \tag{32}$$

混合器出口总温 T_6^*：

$$T_6^* = h^{-1}(\frac{W_{15}h(T_{15}^*) + W_{TL}h(T_{6\text{out}})}{W_{15}+W_{TL}})) \rightarrow T_6^*(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{TH},Z_{TL},T_4^*) \tag{33}$$

混合器出口总压 p_6^*：

$$p_6^* = \frac{(W_{g6})\sqrt{T_6^*}}{1132.1646q(z^{-1}(\frac{0.0397(5306.1p_{6\text{out}}f(\lambda_{61}) + 23212p_{15}^*f(\lambda_{62}))}{W_{g6}(\frac{2}{\gamma+1})^{\frac{1}{\gamma-1}}\sqrt{T_6^*}}))})) \rightarrow p_6^*(n_L,n_H,Z_{CL},Z_{\text{CDFS}},Z_{TH},Z_{TL},T_4^*) \tag{34}$$

10．加力燃烧室

$$\begin{cases} P_{6\text{out}}^{*} = P_{6\text{in}}^{*} \cdot \sigma_6 \\ T_{6\text{out}}^{*} = T_{6\text{in}}^{*} \\ W_{g,6\text{out}} = W_{g,6\text{in}} \end{cases} \tag{35}$$

其中 $P_{6\text{in}}^{*}$、$P_{6\text{out}}^{*}$ 分别为进出口总压，$T_{6\text{in}}^{*}$、$T_{6\text{out}}^{*}$ 分别为进出口总温，$W_{g6\text{in}}^{*}$、$W_{g6\text{out}}^{*}$ 分别为进出口流量，$\sigma_6=1$ 为总压恢复系数。温度压强流量均不发生变化。

11．尾喷管

（1）求出 A_8：

$$A_8 = \frac{W_{g6}\sqrt{T_6^{*}}}{k_m p_6^{*}} = \frac{W_{g6}\sqrt{T_6^{*}}}{0.0397 p_6^{*}} \to A_8(n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{\text{CDFS}}, Z_{TH}, Z_{TL}, T_4^{*}) \tag{36}$$

（2）$p_9 = p_0$，计算出 $\pi(\lambda_9) = p_9 / p_9^{*}$，并求出 λ_9：

$$\lambda_9 = \pi^{-1}(p_0 / p_6^{*}) = \pi^{-1}(\frac{0.2172}{p_6^{*}}) \tag{37}$$

（3）由流量公式 $W_{g9} = k_m \frac{p_9^{*}}{\sqrt{T_9^{*}}} A_9 q(\lambda_9)$ 计算出 A_9：

$$A_9 = \frac{W_{g6}\sqrt{T_6^{*}}}{0.0397 p_6^{*} q(\pi^{-1}(\frac{0.2172}{p_6^{*}}))} \tag{38}$$

（4）判断 $\frac{A_9}{A_8} > ar$（这里 $ar = 3$），如果是，则 $A_9 = 3A_8$，利用流量公式重新计算 λ_9：

$$\frac{A_9}{A_8} = q(\pi^{-1}(\frac{0.2172}{p_6^{*}})) \tag{39}$$

（5）计算尾喷管出口静温 $T_9 = T_7^{*}\tau(\lambda_9)$：

$$T_9 = T_9^{*}\tau(\lambda_9) = T_6^{*}\tau(\pi^{-1}(\frac{0.2172}{p_6^{*}})) \tag{40}$$

（6）尾喷管出口气流速度 $c_9 = \varphi_{nz}\sqrt{2\left(h_9^{*} - h_9\right)}$，其中，$\varphi_{nz} = 0.98$，焓 h_9^{*} 和焓 h_9 分别由尾喷管出口总温和静温求出。

$$c_9 = \varphi_{nz}\sqrt{2\left(h_9^{*} - h_9\right)} = 0.98\sqrt{2\left(h(T_9^{*}) - h(T_9)\right)} \tag{41}$$

参 考 文 献

[1] 姜启源，谢金星，叶俊. 数学模型（第 4 版）. 北京：高等教育出版社，2011

[2] 王亮、冯国臣、王兵团. 基于 MATLAB 的线性代数实用教程. 北京：科学出版社，2008

[3] 丁国盛，李涛. SPSS 统计教程——从研究设计到数据分析. 北京：机械工业出版社，2005

[4] 王亮等. 基于 MATLAB 的线性代数使用教程. 北京：高等教育出版社，2008

[5] 田俐萍，曹思越. 高等数学（第二版）. 北京：高等教育出版社，2008

[6] 余斌，李建伟，王彤，戴慧. 当前我国物价上涨的主要特征及影响因素. 重庆工学院学报（社会科学版），2008,22(9)

[7] 朱力. 我国食品消费价格指数的灰色关联分析. 新疆财经，2007,6

[8] 胡冰川. 消费价格指数、农产品价格与货币政策——基于 2001～2009 年的经验数据. 中国农村经济，2010,12

[9] 刘静. 利用 Matlab 由山区等高线图模拟三维地形图. 中国科技论文在线

[10] 黄有群，王睿. 由等高线图像生成三维地形的简易方法. 沈阳工业大学学报，2007,2

[11] 李长明. 在等高线地形图上量算表面积各种方法的分析、比较和改进. 武汉测绘学院学报，1980,2

[12] 蒋玉明. 快速求取自由曲面上两点间的最短路径算法. 计算机辅助设计与图形学学报，1994,1

[13] 赵静，但琦. 数学建模与数学实验（第 3 版）. 北京：高等教育出版社，2008

[14] 韩中庚. 数学建模方法及其运用. 北京：高等教育出版社，2005

[15] 沈恒范. 概率论与数理统计教程（第五版）. 北京：高等教育出版社，2011

[16] 邹至庄，牛霖琳. 中国城镇居民住房的需求与供给. 金融研究，2010,1

[17] 许纯祯，吴宇晖，张东辉. 西方经济学（第三版）. 北京：高等教育出版社，2008

[18] 唐焕文. 数学模型引论（第三版）. 北京：高等教育出版社，2005

[19] 刁在筠，郑汉鼎等. LINGO 教程. 北京：清华大学出版社，2006

[20] 王庚，王敏生. 现代数学建模方法. 北京：科学出版社，2008

[21] 苏静芝等. 神经网络在空气污染预报中的应用研究. 四川环境，2008

[22] 张德丰. MATLAB 神经网络应用设计. 北京：机械工业出版社，2009

[23] 范高峰，王伟胜，刘纯，戴慧珠. 基于人工神经网络的风电功率预测. 中国电机工程学报，2008

[24] 时庆华，高山，陈昊. 2 种风电功率预测模型的比较. 能源技术经济，2011

[25] 路万忠. 我国大学毕业生一次性就业与起薪研究. 中国青年研究，2008

[26] 宋大祥. 蜘蛛的网和它的捕食策略. 生物学通报，2000

[27] 卓春晖，蒋平，吴灵芝，彭茂，郭聪. 不同体重悦目金蛛的蛛网结构. 动物学杂志，2007

[28] 宋大祥. 蛛网的进化. 菏泽师范专科学校学报，1997
[29] 黄献聪，施楣梧. 蜘蛛丝的力学性能及其应用取向. 纺织导报，2004
[30] 蒋平，吕太勇，肖永红等. 三种不同功能蛛丝的超微结构与拉伸力学行为. 材料科学与工程学报，2011
[31] 贺晓雷，于贺军，李建英，丁蕾. 太阳能方位角的公式求解及其应用. 太阳能学报，2008
[32] 方荣生. 太阳能应用技术. 北京：中国农业机械出版社，1985
[33] 孙忠玉. 独立光伏系统在小型游览船上的应用研究. 武汉理工大学学报，2010,5
[34] 查振高，丁淮. 研究生招生计划编制原则及其影响因素分析. 煤炭高等教育，2009,5,27（3）
[35] 葛亚宇. 对我国硕士研究生招生规模和招生计划的思考. 学位与研究生教育，1997
[36] 苟学中. 变循环发动机建模及控制规律研究. 硕士学位论文，南京航空航天大学，2011
[37] 尹大伟. 航空发动机模型求解算法及性能寻优控制中的参数估计研究. 博士学位论文，国防科学技术大学，2011
[38] 苟学中，周文祥，黄金泉. 变循环发动机部件级建模技术. 航空动力学报，2013，28（1）：104-111